Беларуская Сацыялістычная Савецкая Рэспубліка
Белорусская Социалистическая Советская Республика

ПРАЦЫ
Беларускага Дзяржаўнага Унівэрсытэту ў Менску

ТРУДЫ
Белорусского Государственного Университета в г. Минске

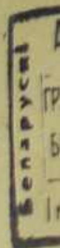
LES ANNALES
de l'Université de la Blanche-Ruthénie

ПЭДАГОГІЧНЫ ФАКУЛЬТЭТ

ФІЗЫКА-МАТЭМАТЫЧНЫЯ і ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ.

1928 г. № 17-18

Выданьне Праўленьня Б. Д. У.
Менск—1928



ПРАЦЫ
Беларускага Дзяржаўнага Унівэрсытэту ў Менску.

ТРУДЫ
Белорусского Государственного Университета в г. Минске

LES ANNALES
de l'Université de la Blanche-Ruthénie.

1. ПЭДАГОГІЧНЫ ФАКУЛЬТЭТ

ФІЗЫКА-МАТЭМАТЫЧНЫЯ і ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ.

1928 г. | I | № 17-18

Выданьне Праўленьня Б. Д. У.
Менск — 1928

Напечатано во 2-ой
типо-литографии
Бел. Гос. Изд-ва
Тираж 500 экз.
Главлит 196.
З. № 833.

Вл. Н. Ивановский.

Из лекций по методологии наук[1].

Глава II.

Для непосвященного анализ... покажется просто рядом хитросплетений и мелочей. И это действительно мелочи; но мелочи такого рода, с какими имеет дело, напр., микроскопическая анатомия.

К. Маркс. Капитал, т. I, предисловие к 1-му изданию. Пер. под ред. В. Базарова и И. Степанова. Госиздат, 1923, стр. XXXVI.

К методологии наук математических.

1. Мне неоднократно придется в дальнейшем касаться вещей, которые могут, на первый взгляд, показаться излишними „умствованиями", пустыми хитросплетениями.

Во время одной из моих первых лекций в Белорусском Госуд. университете я получил из аудитории такую записку: „К чему эти умствования? хорошо ли это?" Я ответил шуткой. Но в основе такого рода недоумений лежат настроения серьезные и нередкие среди начинающих, мало еще знакомых с наукой и ее методологией: в них сказывается, с одной стороны, недостаточное понимание важности детального изучения методических основ знания, а с другой—боязнь из-за того, что кажется излишними „умствованиями", потерять из вида важное и основное. Необходимо раз навсегда уяснить себе, что есть детали *побочные*, загромождающие главное: такие детали излишни. Но есть другого рода „мелочи": это—*мельчайшие составные части* изучаемого, те микроскопические клеточки, из которых оно состоит. Эти „мелочи" не внешни изучаемому предмету: именно они его *образуют* (а след., и *об'ясняют*). Без такого рода „мелочей" не может быть серьезного понимания; такие мелочи не отвлекают внимания от главного; напротив, только они позволяют его правильно истолковать.

Все в мире—как физическом, так и умственном—складывается из мельчайших частиц и из элементарных процессов, и именно в этих частицах и процессах происходят все реальные явления. В наших восприятиях мы имеем весьма сложные их результаты. Вначале мы даже не подозреваем всей их сложности: будучи сознаваемы непосредственно, они кажутся нам простыми, неразложимыми. И только психологический и логико-гносеологический анализ знания показывает нам всю их сложность.

В том месте „Предисловия" к 1-му тому „Капитала", из которого взят эпиграф, Маркс превосходно выясняет значение анализа элементарных составных частей изучаемого. „Развитое тело, говорит Маркс, легче изучать, чем клеточку тела". К тому же, продолжает он, в такого рода вопросах, как вопросы общественные (а также и философские, добавлю я), „нельзя пользоваться ни микроскопом, ни химическими реактивами. То и другое должна заменить *сила абстракции*" (благодаря чему и может иногда у непривыкшего к умственному анализу появиться впечатление „умствования"). „Для непосвященного, заканчивает Маркс, анализ... покажется просто рядом хитросплетений и мелочей. И это действительно мелочи; но мелочи такого рода, с какими имеет дело, напр., микроскопическая анатомия".

Кто хочет знать строение органического тела, тот должен изучать клетки его тканей под микроскопом. Кто хочет понять механизм общественно-производственного процесса в буржуазном обществе (об этом именно говорит Маркс в том месте, из которого взят эпиграф), тот должен внимательно рассмотреть „форму его экономической клеточки—товарную форму труда, или форму стоимости товара". Совершенно так же, кто хочет

[1] Продолжение. См. „Працы Б. Д. Ун.", № 8-9-10.

понять механизм познавания и всех его продуктов („знаний"), тому нужно углубиться в анализ познавательных процессов и тех систематических целых, в которые эти процессы складываются,—т. е. наук, хотя бы кое-что в таком анализе и показалось, на первый взгляд, „хитросплетениями и мелочами". От „микроскопической анатомии знания" зависит понимание его строения и его законов.

2. Подбор материала в отдельных частях настоящей работы определялся, во-первых, тем, что цель ее *общеобразовательная*: она имеет в виду не лиц, специально изучающих данные отрасли науки, а тех, кто ставит себе задачей ориентироваться в научном знании вообще.

В силу этого я сосредоточиваю изложение на некоторых вопросах, представляющихся мне центральными, особо важными для понимания, и обхожу то, что имеет более специальное и техническое значение.

Равным образом, настоящая работа не ставит себе задачей сообщить все то, что относится, с одной стороны, к формальной логике, как ее элементы проявляются в каждой отдельной науке, а с другой—к специальной методологии отдельных наук. Эта книга—прежде всего, введение в *науку вообще*.

Наконец, и собственно научный материал я буду привлекать преимущественно лишь для иллюстрации методологических положений. Более широкое трактование его вышло бы за пределы моей компетенции, да и опять-таки не отвечало бы моей основной задаче.

3. На протяжении истории мыслители высказывали очень различные воззрения на методологию математических наук.

Как и естественно, обычно они имели в виду *математику своего времени* и строили свое понимание ее методологии на основании современного им фактического состояния этой науки. Поэтому не имеет большого смысла исходить в выяснении методологии математических наук из воззрений мыслителей прошлых времен; наоборот, *их взгляды надо оценивать* с точек зрения, подсказываемых современным развитием математики. Надо взять *проблему в ее существе*, т. е. выяснить себе в общих чертах, что представляет собою *современная* математика. Это прольет свет на методологию этой науки, как она должна пониматься в настоящее время, и даст твердую исходную точку для оценки прежних воззрений на этот предмет.

В истории науки и философии бывали случаи, что мыслители вообще не считали нужным выводить свое понимание методологии математики из современного им состояния науки. Они им даже мало интересовались, предпочитая выдерживать ту или иную *общую* методологическую линию, проводить какой-либо „принцип", не опиравшийся на фактическое состояние данной науки,—внешний для нее. Так, напр., Д. С. Милль, уверенный в том, что метод всех наук должен быть одним и тем же, полагал, что принципы методологии естествознания должны быть и принципами методологии математики; он догматически принимал, что математика не может отличаться от естествознания в этом отношении. Такой предвзятостью страдает его теория математического мышления, развитая во II-й книге „Системы логики".

Наконец, бывали случаи что мыслители писали о методологии математики просто, как говорится, „с потолка", вообще плохо разбираясь в этой науке. Забавные взгляды в этом духе высказал очень начитанный, хотя и не сильный творчески, шотландский мыслитель сэр У. Гамильтон.

В виду всего этого мы должны, во-первых, остеречься принять какое-либо из старых мнений о методологии математики на основании одной только его „авторитетности", твердо помня, что устарение с течением времени даже самых „авторитетных" положений есть *всеобщий* закон природы—закон, в силу которого только и возможно непрерывное и бесконечное движение вперед.

Во-вторых, мы должны избегнуть указанной выше предвзятости: мы должны брать методы математики из нее самой, а не исходить из общих соображений о том, какими бы нам „хотелось" их видеть в связи с теми или иными нашими симпатиями.

Чтобы выяснить основы методологии современной математики, мы должны посмотреть сначала, каковы были исторические фазисы развития этой науки.

При таком историческом подходе многие различия в воззрениях на методологию математики окажутся зависящими просто от той эпохи, в какую данные воззрения были высказаны, и от тогдашнего состояния самой науки.

Пять главных периодов в развитии математических наук.

4. Историю математического мышления и математики, как науки,—с точки зрения ее жизненных корней, ее основных методологических принципов, ее общего строя, наконец, ее целей, ее назначения и приложений,--можно разделить, как кажется, *на 5 главных периодов*.

I-й период—эпоха *первобытно-магического* мышления. Установить ее хронологические границы невозможно: она обнимает все время от появления первых зачатков математической мысли в полу-животном состоянии человека до эпохи так наз. „древнейших цивилизаций".

II-й период—*практико-эмпирическая* математика древнейших цивилизованных народов, особенно египтян и ассиро-вавилонян. Этот период охватывает несколько тысячелетий, предшествовавших расцвету греческой науки.

III-й период—*систематическое* построение греками (преимущественно) геометрии (Эвклид) и арифметики индусами. Так наз. „средневековье"—западно-европейское и восточное, арабское—не составляет особого периода в истории математики. Новые народы (германцы, арабы, славяне) начинают этот период приемами мышления, не далекими от „первобытно-магических", и постепенно впитывают в себя индусскую арифметику и греческую геометрию.

В силу смешения в средние века первобытных, свойственных самим „новым" народам, приемов мышления с заимствованными у греков относительно высокими образцами научной мысли, в течение средневековья мы видим пеструю картину умственного быта; рядом стоят и грубейшая магия, и довольно уже развитые, научные приемы мышления, в дальнейшем постепенно подготовлявшие тот расцвет науки, который начался с XVI века.

Этот, третий период захватывает две с лишком тысячи лет, если границами его считать, с одной стороны, Пифагора (ок. 580-501 г. до Р. Х.), а с другой--XVI-й век нашей эры.

IV период—*эпоха математики на службе у естествознания*. Он охватывает XVI, XVII и XVIII столетия нашей эры. Зачатками своими это великое движение умов заходит еще в XV и даже в XIV и XIII века: в XV веке—Николай Кузанский, 1401—1464 г.; в XIV веке парижская школа оккамитов: Николай Орезм(+1382 г.), предтеча Декарта, Галилея и Коперника, Николай из Аутрикурии, сторонник механистического атомизма и замечательный критик познания; Іоанн Буридан и другие сторонники „механизма" в XIV веке; наконец, еще в XIII веке знаменитый Рожер Бэкон—1214—1292 г.—Коперник, Кеплер, Галилей, Декарт, Вьет, Ферма, Роберваль, Паскаль, Лейбниц, Ньютон, Л. Эйлер, семья Бернулли, французские математики XVIII века—вот главные имена этого периода, когда математика была в теснейшей связи с физикой и разрабатывалась почти исключительно в целях непосредственного служения новому, естественно-научному миропониманию. В области методологии науки период этот заканчивается Кантом.

Наконец, V период начинается с конца XVIII века (или с начала XIX) и охватывает весь XIX век и истекшую часть XX в. За это время математика начинает разрабатываться не только в интересах ее применения в естествознании, но *но и сама по себе*, как таковая. Она и в это время продолжает быть *орудием* естественно-научного познания; но кроме того мыслители изучают теперь и само это орудие,— его собственную природу и его характерные признаки. Это ведет ко все более отчетливому отграничению математики от естествознания, к новому пониманию состава и строя самой математики и к новому истолкованию ее отношений к „реальности".

Период этот не закончен еще и сейчас.

5. *Первый* из этих периодов был уже вкратце охарактеризован нами в I главе. В течение его мышление имеет в основном еще исключительно *конкретный* характер; умственные деятельности отвлечения, обобщения, синтеза, построения делают только первые шаги. Поэтому, напр., систематическое построение ряда „натуральных" чисел (1, 2, 3 и т. д.) идет еще очень недалеко; существует то, что я попробовал назвать „качественным счетом". Не выработаны основные (кажущиеся нам самоочевидными) положения относительно пространства и движения. Весьма вероятно, что нет еще мысли о неизменности размеров находящихся в пространстве предметов (и участков самого пространства), вследствие чего видимое уменьшение размеров предмета при его удалении от нас понимается как *реальное уменьшение* величины предмета, а также и занимаемого им участка пространства. А затем (и это самое главное) и числа, и геометрические и механические данные пропитаны *магическими* ассоциациями: все имеет магический смысл, все выражает собою деятельность тех фантастических сил, какие рисовались в основе природы человечеству той эпохи...

Как этот фазис соответствует в общем эпохе *дикого и полудикого* состояния человечества, так *второй, эмпирически-прикладной* период связан с „древнейшими цивилизациями". В эту эпоху фантастика первобытной мысли уже в значительной степени исчезает. Усложнявшаяся техника (измерение и межевание полей, постройка водоемов и оросительных каналов, больших зданий—дворцов, храмов, пирамид, сфинксов и т. д.) заставляла считаться уже не с магико-фантастическими, а совершенно *реальными* свойствами об'ектов—с измеримой длиной, шириной, величиной, формой, весом, расстояниями об'ектов, с различными отношениями между этими данными и т. д.

В течение этого периода, с одной стороны, делает некоторые успехи *синтетическая* работа мысли (дальнейшее развитие схемы чисел), а с другой—математические познания накопляются при помощи *отдельных* наблюдений, измерений, вычислений и построений. При технической работе и в ее целях замечаются некоторые соотношения между геометрическими и физическими фигурами, телами и их частями, а затем устанавливаются более или менее определенные зависимости между ними—сначала, вероятно, просто (приблизительным) измерением—для каждого отдельного случая, а затем и в более общей форме—для целого класса сходных об'ектов. В такого рода знании основные понятия бывают обычно очень неточны, числовые отношения изучаемых величин—лишь приблизительны; здесь почти нет еще *систематического* элемента—обзора и построения всех возможных случаев и комбинаций в их внутренних связях и соотношениях; не развита ни одна из математических наук в виде систематического целого. Общие вопросы о природе числа, пространства также еще не

возникают: мысль удовлетворяется решением *частных* проблем, возникающих при технической работе и имеющих непосредственное применение на практике. Словом, строение математики в эту эпоху является в его исходной точке и в его генезисе преимущественно *эмпирическим*, опытным, а в его заключительной стадии—*технически-прикладным*[1]).

6. Существенно меняется принципиальная постановка математики и ее методологии в *третьем* периоде, особенно у древних *греков*, а отчасти и у *индусов*. В это время математическая наука впервые начинает разрабатываться *систематически*—на основе некоторых общих положений и принципов: определений, аксиом, постулатов. Эвклид строит геометрию, систематически развивая из принципов ее отдельные главы, и создает форму строгого, дедуктивного геометрического доказательства. Индусы в построении системы чисел и числовых обозначений выходят безмерно далеко за пределы того, что было нужно для повседневно применявшихся, „практически“ полезных вычислений и технических расчетов и систематически развивают схему числа, как способной беспредельно увеличиваться совокупности единиц[2]). Как известно, чрезвычайно расширяет пределы чисел и счета и крупнейший представитель последней эпохи греческой математики—знаменитый Архимед[3]); этот же гениальный ум закладывает и первые камни здания научной механики (основы статики).

Для греческой математики чрезвычайно характерна была разобщенность арифметического и геометрического элементов. Греки не знали того, что составило великую силу и славу „нового“, математического естествознания,—того *приложения арифметики и алгебры к*

---

[1]) В последнее время было высказано мнение, что египтяне обладали обширными и глубокими геометрическими и геодезическими познаниями, на основании тех закономерностей, которые якобы были обнаружены в размерах и положении некоторых пирамид и других сооружений древнего Египта. Однако, повидимому, размеры научных познаний строителей этих памятников сильно преувеличены. Вопрос этот возбудил полемику.

Краткие сведения о математике древних восточных народов есть в известном руководстве проф. *М. Симона* „Дидактика и методика математики“ (рус. пер. М. 1922).

[2]) Проф. *А. В. Васильев* в книжке „Целое число“ (Петр. 1922) приводит из поэмы Э. Арнольда „Свет Азии“ следующий отрывок. Восьмилетний царевич, будущий Будда, экзаменуется Висвамитрою, „наук, искусств учителем превосходным“... „И сказал Висвамитра: Повторяй за мной! считай так, как я буду, пока дойдем до лакхи (100,000): один, два... затем десятки, и сотни, и тысячи... И вслед за ним назвал отрок единицы, десятки, сотни и не остановился на лакхе; нет, он шептал дальше—до тех чисел, которыми можно считать все, начиная от зерен на поле и до самой мелкой песчинки. Потом он перешел к катхе, к счету звезд ночных, к кати-катхе, счету морских капель, и далее к счету песчинок Ганга и к счету, единицами которого изображается весь песок десятка лакх рек таких, как Ганг. Затем пошли еще более громадные числа... и, наконец, число, при помощи которого боги вычисляют свое прошедшее и будущее“.

[3]) В сочинении „Псаммит, или исчисление песка (по греч. psammos—песок) в пространстве, равном шару неподвижных звезд“. Мир для Архимеда шар, которого центр Земля, радиус же равен расстоянию от центра Земли до центра Солнца; поперечник шара неподвижных звезд меньше десяти тысяч раз взятого поперечника мира. И Архимед создает для измерения об'ема этого шара следующую систему чисел: числа от 1 до „мириады мириад“ (по нашей цифровой схеме—10,000×10,000, т. е. сто миллионов, или 10^8) он называет *первыми*. Эти 10^8 являются одной единицей *вторых* чисел, которые идут до 10^{16}. *Третьи* числа идут до 10^{24}, и т. д. Все это будет составлять числа *первого периода*, который заканчивается числом $10^{8.10^8}$, т. е. единицей с восемьюстами миллионов нулей. Это число будет единицей чисел *второго периода*, которые идут до $10^{2.8.10^8}$. Далее следуют *третий*, *четвертый* и дальнейшие периоды... до беспредельности. И напр., число $10^{10^8.8.10^8}$ изобразится единицей с восемьюдесятью тысячами миллионов нулей; чтобы написать его, нужно потратить около 2,000,000,000 лет непрерывной работы днем и ночью. „Псаммит Архимеда ввел в науку *понятие о бесконечно продолжающемся ряде целых положительных чисел*“. Многотрудная работа человеческого ума была окончена. (Проф. *А. В. Васильев*. Целое число, стр. 11—13).

геометрии, из которого в XVII в. вышла „аналитическая геометрия" Декарта. „Греки пытались построить геометрию при помощи (весьма остроумного) *метода пропорций*, или *отношений*"[1]). Геометрия у Эвклида строилась на понятиях равенства и неравенства, на пропорциональности—вообще на отношениях не специально числовых. Поэтому геометрия греков была мало приспособлена для тех числовых измерений, на каких основываются и техника производственных процессов, и детальное исследование явлений природы. Потому же античная математика стояла в общем в стороне от естествознания; ею пользовались лишь немногие ученые (в роде, напр., Архимеда). У греков математика больше служила обще-философскому мировоззрению (Пифагор, Платон), чем науке о природе.

7. Геометрия греков и арифметика индусов, усвоенные в течение средних веков арабами, а затем европейцами, надолго остаются высшими достижениями математической мысли. Ими питается все арабское и европейское средневековье, делающее само от себя лишь несколько шагов вперед в области алгебры (усовершенствование символической формы обозначений, техники решения уравнений и т. п.).

За весь этот период общефилософские вопросы, связанные с математикой (о природе числа и пространства, об отношения математического мышления к реальности и т. д.), стоят на втором плане. Характерно, что даже у такого первоклассного и всеоб'емлющего мыслителя, каким был Аристотель, нет общего понятия о пространстве и общей философской теории его. Аристотель знает лишь *конкретное* понятие „места", занимаемого телом среди других тел; он говорит лишь об отношениях одного тела к другим, его окружающим.

Правда, у греков в течение почти всего периода расцвета их культуры было—и очень влиятельное—*математико-философское* направление, крупнейшими представителями которого были Пифагор и Платон. Оба эти мыслителя и их школы придавали огромное значение математическому мышлению, математике и основанному на математике пониманию реальности. Однако, это об'яснение реальности математическими основаниями („числами" у Пифагора, „идеями", родственными по смыслу математическим понятиям,а позже и отожествлявшимися с этими последними—у Платона) имело не научный а *догматико-метафизический* характер. В нем не было еще того, что нас интересует здесь,—более или менее определенного представления о внутреннем соотношении между строго *научным* математическим мышлением, с одной стороны, и *научно* же составленной картиной реального мира и науками о реальности, с другой.

8. Глубочайший интерес представляет роль и значение математики в течение *четвертого* периода ее истории—в эпоху великого научного движения XVI—XVIII веков, создавшего новое естествознание.

Весь этот период стоит под знаком „новой науки", „нового мировоззрения". Средневековые, религиозно-церковные принципы и точки зрения постепенно изживают себя... Протест начинается с области общественно-этической: простые люди, простодушно верующие, мало-по-малу проникаются негодованием при виде морального упадка духовенства, светски-веселой и черство-легкомысленной жизни „князей" церкви. Их робкие попытки отстраниться от церкви, завести себе таких пастырей, какие им нравятся, каким они доверяют, католическая церковь встречает осуждением, об'являет ересью. Гонения ожесточают протестующих,—постепенно подготовляется общее отрицание

[1]) *А. Фосс*. Сущность математики, 1923, стр. 20.

авторитета римской церкви—церковная реформация. После того, как сложились новые протестантские церковные общины, католицизм начинает против них ожесточенную, кровавую борьбу,—в которой позже и протестанты не остаются в долгу... Варфоломеевская ночь во Франции, жестокие времене Марии Кровавой в Англии, 30-летняя война в Германии показывают всем, что религиозная вражда не останавливается ни перед какими жестокостями, ни перед какими ужасами... В связи с этим быстро падает тот религиозно-вероисповедный, церковный пафос, которым жило средневековье и первое столетие новой истории, тускнеют теологические призраки потустороннего, и интересы постепенно переходят на земное, человеческое, светское; место богословия занимает *наука о природе*. Один из крупнейших ее основоположников, великий Галилей так пишет в своем сочинении Saggiatore о задачах новой научной эпохи: „Философия написана в грандиозной книге, постоянно открытой для каждого (я говорю о вселенной); но ее может понять только тот, кто ранее научится понимать язык и знаки, которыми она написана. А написана она на языке математики, и знаками ее являются треугольники, круги и другие математические фигуры". Этими словами высказана основная тема той эпохи в вопросе о значении математики: в основе действительности лежат математические отношения, а потому математика есть техническое орудие, основное пособие при исследовании природы.

На первом плане для Галилея было именно естествознание; математика же была для естествознания лишь предверием, орудием разработки [1]).

9. В эту эпоху поразительных естественно-научных открытий, быстро следовавших одно за другим, внимание было направлено прежде всего на изучение *природы*. И не даром главные приобретения математики в эту эпоху состояли как раз в создании *двух* новых дисциплин, сделавших возможными блестящие успехи естествознания. Это были *аналитическая геометрия и счисление бесконечно малых*.

Вот перечень важнейших естественно-научных открытий той эпохи, как его дают историки науки... Книга *Коперника* De revolutionibus orbium coelestium вышла в 1543 г. Под ее влиянием Дж. Бруно (сожжен на костре в 1600 г.) пришел к мысли о бесконечности вселенной и о бесчисленном множестве миров. Около того же времени имеют место великие открытия Кеплера (1571—1630 г. г.) и Галилея (1564—1642 г. г.); а также ряд более мелких открытий, в роде приложения патером Мерсенном (1588—1648 г. г.) законов колебательного движения к механическому об'яснению главных звуковых явлений; данного Торричелли (1608—1647 г. г.) механического обяснения (весом атмосферного воздуха) факта поднятия воды за поршнем в насосе—об'яснения, покончившего с той пресловутой пустотой, которой якобы боялась природа, и др. Тогда же Паскаль экспериментально доказывает, что воздух имеет вес, и дает идею барометра; Галилей и Дреббель кладут начало измерению температур; магдебургский бургомистр Отто Герике в 1650 г. изобретает воздушный насос и при помощи его производит свой знаменитый опыт с „магдебургскими полушариями", доказывающий давление воздуха на земные тела; Роб. Бойль создает новое понятие о химическом элементе, оставшееся в химии и до на-

---

[1]) Несколько иной смысл имеет заявление Канта, сделанное в конце того периода, о котором идет речь. „В каждой отдельной естественной науке, говорит Кант в предисловии к „Метафизическим основаниям естествознания", можно найти собственно науку лишь постольку, поскольку в ней можно найти математику". Кант в этих словах придает математике значение не просто инструмента для исследования природы (как это делал Галилей). Кант видит в математике *критерий научности* самого естествознания; он признает за „собственно науку" одну лишь математику, „математизирует" естественные науки... И тем не менее, даже и Кант все же *оставляет математику в теснейшей связи с естествознанием* и в этом отношении не расходится принципиально с Галилеем. Для Галилея математика—метод исследования; для Канта—основа, твердый каркас „собственно научного" в естествознании... Но ни Галилей, ни даже Кант не разрабатывают математики *помимо естествознания*, мало говорят о ней, *как таковой*, как о самостоятельной науке с оригинальными, ей только свойственными задачами и достижениями.

шего времени, а 1661 г. устанавливает закон сжимаемости газов, несколько позже найденный независимо от него Мариоттом; гениальный, но рано умерший Джон Майо (1645—1679 г. г.), предшественник Лавуазье и Пристли, производит ряд замечательнейших опытов по химии горения и дыхания; патер Гассенди возобновляет атомизм и кладет основание механической схеме световых явлений в виде теории „истечения“ световых частиц; иезуит Гримальди (1618—1663 г. г.) выдвигает первые идеи другой—„колебательной“ теории света, развитой Гюйгенсом (1629—1695 г. г.); Ньютон в 1671 г. открывает рассеяние света; Герике в 1672 г. строит первую, еще очень несовершенную, электрическую машину; Ремер в 1676 г. измеряет скорость света, и т. д., и т. д. Наконец, в 1686—7 г. г. выходят Ньютоновы Philosophiae naturalis principia mathematica, систематизировавшие основные понятия и законы новой физики и об'яснявшие тяготением весь строй солнечной системы.. Можно сказать, что почти не проходило года без какого-либо поразительного открытия. Общий интерес к естествознанию достигал огромного напряжения: всюду шли споры на естественно-научные темы, делали ь опыты, выходили книги, образовывались кружки и общества для изучения природы и т. д.

10. „Новая“ физика—в противоположность „старой“, аристотелевски-средневековой—решительно становится на *количественно-механическую* точку зрения. Все процессы, происходящие в физическом мире, суть *движения* материальных частиц, передаваемые ударом или толчком.

Движения эти происходят преимущественно по кривым линиям; ибо даже всякое „прямолинейное“ движение предмета необходимо предполагает заполнение образующейся сзади движущегося предмета пустоты воздухом или иной средой, выталкиваемой передней частью предмета вперед и в стороны и обтекающей предмет с обоих его боков. Так, воздух, выталкиваемый паровозом поезда, течет вдоль движущихся вагонов и затем заполняет пустоту сзади поезда, где образуется ветер в направлении движения последнего, так сказать, догоняющий его (это видно по бумажкам, сухим листьям и другим легким предметам, всегда мчащимся за поездом). Поэтому, по Декарту, материальный мир есть *сложнейшая система „вихрей“*, разнообразнейших криволинейных движений частиц материи. А отсюда одной из первых задач физики становится изучение путей этих криволинейных движений, т. е. *кривых линий*. Метод такого изучения и дал Декарт, создав новую науку—*аналитическую геометрию*. Отсюда видна вся колоссальная важность этого великого изобретения Декарта; оно дало способ точного изучения движений, т. е., значит, всех процессов физических.

Исходной точкой аналитической геометрии является остроумный прием определения положения каждой точки в плоскости выраженными в числах расстояниями этой точки от двух произвольно проведенных в этой плоскости пересекающихся линий—*координат*. Каждая форма изучаемой кривой линии выражается тогда особым, характерным для нее *уравнением*[1]).

11. Подобным же образом и другое великое математическое изобретение XVII века—*исчисление бесконечно малых*—также возникло в целях изучения процессов природы, т. е. движений. Этот огромный и в высшей степени важный отдел математики был создан в течение XVII в. трудами ряда крупных умов; окончательную форму ему придали Ньютон и Лейбниц. Ньютон прямо назвал свой метод *методом флюксий* (от латин. fluo-теку; fluxio-течение), т. е методом течений (или *движений*).

---

[1]) Вот что говорит в своей „Геометрии“ сам Декарт. „Все проблемы геометрии легко можно свести к такого рода терминам, что потом для их построения будет нужно только узнать длину некоторых прямых линий. Поэтому я и не буду стесняться вводить в геометрию эти арифметические термины“. (Geometria, Francofurti ad Moenum, 1695, p.1). Вот именно такого „приложения арифметики (и алгебры) к геометрии“, такого применения числа к измерению пространственных величин и не было у древних греков.

„В исчислении флюксий, как это показывает само название, основные представления о бесконечно малых были заимствованы из учения о движении“ [1]), а именно: из динамики Галилея. Лейбниц исходил в своих основных понятиях не столько из механики (как Ньютон), сколько из геометрии: „примыкая непосредственно к геометрическому представлению, он положил в основу своих рассуждений *бесконечно малые величины*“ [2]).

Замечу, что в оценке Лейбницевых взглядов на бесконечно малые авторитетные математики расходятся. Так, *Г. Кантор* (в статье: „О точках зрения на актуально бесконечное“, переведенной в VI вып. „Новых идей в математике“, стр. 86) пишет: „Бесконечно малые представляют собою лишь *переменные*, произвольно малые вспомогательные величины, совершенно исчезающие из результатов; поэтому Лейбниц характеризовал их как простые *фикции*“. Напротив, *А. Н. Уайтхэд* говорит так: „в изложении основ дифференциального исчисления естествоиспытатель Ньютон был большим философом, чем признанный философ Лейбниц; но Лейбниц создал ту удивительную систему знаков, которая имела важное значение для развития этой науки... Лейбниц, как это ни покажется странным, полагал, что бесконечно малые величины действительно существуют (а вместе с ними и бесконечно малые числа). Идеи и терминология Ньютона носят более современный характер“ [3]).

Но изобретения обоих великих умов [4]) послужили одной и той же цели: они дали новый (и в высшей степени плодотворный) метод изучения *движений*, а след. и вообще процессов природы.

„Отныне, говорит Фосс (Сущность математики, стр. 13), открылся путь для дальнейшего развития исчисления бесконечно-малых. Стало ясно, что во всех процессах природы (*а их-то, главным образом, и имела в виду тогдашняя наука*) мы встречаемся с тем же, с чем и в геометрических и аналитических изысканиях. Определенная группа неизвестных процессов, которые—благодаря своей измеримости—допускают числовое выражение, дана при помощи их флюксий или производных относительно группы независимых переменных (величин времени или длины); требуется найти эти неизвестные процессы... Употребление бесконечно малых величин чрезвычайно облегчило наглядное понимание задач... Мало-по-малу удалось всецело выразить в системе дифференциальных уравнений не только вопросы геометрии и анализа, но и всю механику, и притом не только астрономическую (или механику неба), но и молекулярную: теорию упругости, гидродинамику, теорию распространения теплоты, а позднее также учение об электричестве и магнитизме, поскольку уже были установлены экспериментальные основы этих явлений“...

„Никогда еще никакая наука не праздновала таких триумфов, как математика в период героев исчисления бесконечно малых: Бернулли, Эйлера, Даламбера, Лагранжа, Лапласа. Проникновение математического анализа во все области мира явлений в XVIII в. явилось воистину триумфальным шествием. Проблемы, о разрешимости которых в прежнее время даже думать не смели, теперь были поставлены и немедленно же, чуть не шутя, разрешены. Ничто в области точных естественных наук не казалось отныне недоступным человеческому уму“...

Столетием с лишком позже возникновения аналитической геометрии была создана французским математиком Лагранжем *аналитиче-*

---

[1]) Проф. *А. Фосс*. Сущность математики. руск. пер., 1923. стр. 13.

[2]) Там же.

[3]) *А. Н. Уайтхэд*. Введение в математику. Русский перевод. Петроград. 1916. стр. 206-207.

[4]) Из предшественников их особенно замечателен гениальный французский математик *Ферма* (1601-1665 г.). Уайтхэд говорит про него так: „Ферма настолько развил идеи своих предшественников, что вся эта наука кажется почти созданной им“. Кроме того, тот же Ферма „имеет право разделить с Декартом и честь изобретения координатной (аналитической) геометрии“. (Введение в математику, стр. 200).

ская механика, позволившая распространить и на эту область все выгоды и достижения аналитического и числового трактования предмета.

12. Итак, в эпоху радикальной перестройки физического мировоззрения передового человечества, в XVI—XVIII в., математика разрабатывалась, главным образом, в целях ее непосредственного приложения к изучению природы. На сущности математики, как таковой, останавливались мало; а потому значение ее основных понятий (а вместе с этим и ее методология) представлялись еще очень неясно. Математика в эту эпоху ставилась в слишком тесную связь с науками о природе, с науками „реальными", от чего возникали многочисленные недоразумения. И даже первоклассные умы, научно-философские гении впадали в ошибки в этих вопросах, туманно представляя себе отношение между математическим мышлением, с одной стороны, и реальностью, с другой. В общем считали, что математика занимается „реально существующим"; а потому *одни*, нахо́дя те или иные математические образования несогласными с обычными представлениями о реальности, признавали их невозможными, внутренно противоречивыми; *другие* на том-же основании признавали „реальными" такие математические образования, которые мы сейчас считаем чисто умственными построениями; *третьи* отвергали возможность изучения математикой чего-либо реально не существующего.

К первой из этих групп можно отнести Декарта и его школу; эти мыслители отвергали так наз. „мнимые количества", считая их *невозможными* в силу их „нереальности"[1]).

Многие первоклассные мыслители XVI—XVIII веков считали *невозможными* „бесконечно большие" числа (с которыми, однако, совершенно уже свыклась современная математика). *Г. Кантор* („Основы общего учения о многообразиях",—пер. в „Новых идеях в математике", вып. VI, стр. 20) называет в числе их Декарта, Локка, Спинозу, Гобза, Лейбница, Беркли, прибавляя, что „вряд ли и теперь возможно придумать более сильные доводы против введения бесконечных целых чисел, чем те, которые имеются у этих авторов"[2]).

Особенно много недоразумений вызывали величины „бесконечно малые" и их отношения к реальности. „Одни принимали их прямо за нули; другие создавали себе... представление о величинах, которые, будучи меньше всякой представляемой величины, все же заключают в себе зародыш возникновения конечного количества" [3]).

Дж. Беркли отрицает бесконечно малые величины, считая их *невозможными и в математике*—на том основании, что их нет в *реальном* мире.

Дело в том, что Беркли—тонкий, хотя и односторонний и в некоторых важных вопросах предвзято настроенный, мыслитель—резкий *сенсуалист*. Сенсуализм, шедший еще частью от Аристотеля, возобновленный в XV веке Телезием и другими, был чрезвычайно распространен в XVIII столетии. „Всякая мысль есть копия ощущения; следовательно, мыслить можно только о том, что может быть дано в виде реального восприятия",—таков лозунг сенсуализма. Отсюда требова-

---

[1]) *Ф. Журден*. Природа математики. Одесса, 1923 г., стр. 66.

[2]) Правда, в другом месте Кантор отмечает, что иногда (в противоречие с самим собой) Лейбниц высказывался самым недвусмысленным образом в пользу „собственно-бесконечного", причем Кантор приводит и соответствующую цитату. („Основы общ. учения о многообразиях", рус. пер., стр. 24).

[3]) Так резюмирует положение вопроса *А. Фосс* в своей сжатой, но богатой содержанием брошюре „Сущность математики" (рус. пер., 1923 г. стр. 22).

ние, чтобы и математика занимались только *конкретным*, чтобы все математические понятия соответствовали „реальностям" (т. е., значит, напр., чтобы „математические" точки были в то же время и физическими, и т. п.). А так как было очевидно, что „бесконечно малые" величины не совпадают ни с какими физическими величинами (ибо физическое деление не может продолжаться беспредельно), то эти мыслители их попросту отрицали, называя нелепостями, „духами почивших количеств", „химерическими порождениями воображения математиков" и т. д.

Именно так выражается об этих величинах Беркли. Исходя из своего сенсуализма, Беркли полагает, что и математика должна иметь своим предметом только *чувственно воспринимаемое*[1]) (по его терминологии, *идеи;* идеи, как известно, Беркли понимал как восприятия „духов"; из них и состоит то, что *мы обычно* называем „внешней реальностью").

Математические понятия Беркли *отожествлял* с реальными восприятиями и реальными предметами. Его „Записная книжка" (Commonplacebook) полна заявлений в роде следующих.

„Мы не можем вообразить линию или пространство бесконечно большими; поэтому *нелепо* (курсив мой. В. И.) говорить или выставлять положение о бесконечных линиях или бесконечном пространстве"... „Нельзя рассуждать о вещах, о которых у нас нет идей (т. е. чувственных образов); след. нельзя рассуждать о бесконечно малых величинах"... „Линия состоит (*реально*. В. И.) из известного числа точек, лежащих между 2 точками"... Вот замечание о методе: „По отношению к линиям и фигурам должно быть применяемо *скорее ощущение* (sense), *чем разум или доказательство*, так как линии и фигуры чувственны"... Наконец даже: „Положение Архимеда относительно квадратуры круга *неприложимо к окружностям, содержащим в себе менее* 96 точек"... „Сравните кривую линию с равной ей прямой и *под микроскопом* вы найдете, что они неравны"...

Везде прямое отожествление *математических* элементов и понятий с *реальными*, физическими [2]).

Конечно, столь кричащее непонимание об'ектов математики и методов ее разработки можно найти лишь у таких противников математики и крайних сенсуалистов, как Беркли.

Однако, даже у специалистов математиков той эпохи нет еще положительной теории математического мышления в его отношении к реальности: и у них оно стоит в какой-то не совсем ясной близости к мышлению естественно-научному; и им не ясна еще специфическая природа математики, не ясны основания ее метода и характерные для нее приемы мысли [3]).

Многим из них казалось, что математическая наука *едина*, что нет и не может быть нескольких отличных друг от друга геометрий или арифметик, что эта единая математика (арифметика „вещественных" чисел, эвклидова геометрия, ньютонова механика) в силу своей строгой доказательности „необходима" (в философском смысле), что

---

[1]) Развивая это *совершенно неверное* положение, Беркли, тем не менее, попутно высказывает в отношении математики ряд ценных мыслей, критикуя Ньютона и других математиков той эпохи. См. об этом у проф. *А. В. Васильева*, „Пространство, время, движение. Исторические основы теории относительности". Петроград, 1923, стр. 39—42.

[2]) См. также в сочинении The Analyst, adressed to an infidel mathematician, sect. 5, 6 и др., De motu и в других работах Беркли.

[3]) В высшей степени поучительным было бы рассмотрение методологии математики XVII—XVIII веков с этой именно точки зрения—отношения математического мышления к реальности.

она представляет собою необходимое и общеобязательное (рациональное, априорное) построение ума, а в то же время и вместе с тем выражает и законы реального мира, как он нами познается.

13. Особенно ярко и отчетливо отразилась эта фаза математической науки и ее методологии в воззрениях *Канта*. Канта надо считать завершителем и систематизатором той методологии математики, какая создалась на почве невиданно быстрого и обильного достижениями расцвета ее в XVI—XVIII веках. Кант стоит на пороге следующего периода, основные положения которого зарождаются как раз около времени конца его жизни.

Как известно, в своей теории знания, развитой в „Критике чистого разума" (1781 г.), Кант попытался связать методы математики и естествознания (как эти науки сложились в XVI—XVIII веках, найдя свое заключительное выражение в знаменитых „Математических началах естественной философии „Ньютона, 1686-7 г.), с положениями, с одной стороны, „скептической" (вернее, „позитивной") теории знания Юма, а с другой—с теорией рационального познания—с „априоризмом", шедшим от Лейбница.

Согласно взглядам Канта, во-первых, *математические* науки существуют каждая в единственном числе: есть только *одна* арифметика (вещественных чисел), только *одна* геометрия (эвклидова), только *одна* механика (ньютонова). Канту совершенно чужда еще та мысль, которая стала пробиваться после его смерти,—мысль о *множественности* (научных и законных) форм каждой математической науки. Эта мысль, из которой вышли так. наз. „воображаемые математические науки", обусловила полную переоценку и пересоздание методологии и философии математики. Кант и не подозревал еще надвигавшейся революции!..

Во-вторых, по Канту, эта единая математика безусловно достоверна, „аподиктична", необходима; а потому она может быть только *априорной*; т. е., она представляет из себя продукт деятельности познавательной способности человека (и именно, особой способности „чистого наглядного представления", или „чистого воззрения"), строящей (на основе, конечно, отдельных, разрозненных данных опыта) *единые, бесконечные* и *необходимые* „чистые „формы" воззрения" (по современной терминологии, „восприятия"): пространство и время. Эти две „формы" суть необходимые условия всякого нашего опыта: они как бы налагаются нашим познающим умом на все отдельные показания чувственного опыта, вмещают в себя эти последние. Таким образом, математические пространство и время, *как общие формы всякого опыта, суть создания нашего ума*.

В-третьих, эти создаваемые умом общие формы (и основанные на них науки: геометрия и арифметика) суть в то же время и необходимые и единственно возможные формы научного понимания и об‘ективирования нами *действительности*. Эти создаваемые мыслящим суб‘ектом формы являются и об‘ективными формами самого реального мира, [1]) поскольку он нами познается.

14. Замечательно, что эта тенденция сливать математику с реальностью неоднократно прорывалась и позже; она доходит в виде пережитка до наших дней. Так, напр., в некоторых отношениях такой сильный мыслитель, как глава марбургской школы „неокантианцев" Герман Коген, *увлеченный стремлением везде найти в познании* математику,

---

[1]) Хотя Кант не отрицал „эмпирической" реальности пространства и времени и придавал им лишь „трансцендентальную" идеальность (т. е., идеальность в смысле *необходимых условий всякого нашего опыта*), однако, воззрения его в этом вопросе не лишены больших неясностей.

считает возможным вывести „реальность“ из *математического* бесконечно-малого, не замечая радикального различия *чисто умственного*, математического *построения* от *реально-чувственного бытия*.

И у нас один из видных нео-православных церковников, свящ. Павел Флоренский в брошюре „Мнимости в геометрии“ (М. 1922 г.) пытается обосновать некоторое подобие средневековой картины реального мира на чисто математической,— мало того, и в математическом-то аспекте только *условной*, только иллюстративной—локализации мнимых количеств *не во втором измерении плоскости* (как это обычно делают), а на *обратной стороне* этой последней (второе измерение плоскости, говорит о. Флоренский, уже занято одной из координат Декарта).

Брошюра о. Флоренского вся основана на смешении математически условного с реально существующим.

На том же смешении понятий основана и недавно вышедшая брошюра *М. М. Гаркуши* „Параллельные линии. Постулат Эвклида. Пространственный минимум. В чем ошибка Лобачевского?“, М. 1926. Автор все время указывает на *невозможность беспредельной (реальной) дробимости реального пространства*. „Числовые величины, подчиняясь нашей фантазии, могут быть уменьшаемы до бесконечности; величины же реально пространственные только до своего последнего минимума и до нуля... В результате смешения этих понятий и родилась (по мнению автора) „параллель“ Лобачевского—его основная ошибка“ (стр. 7—8). Автор никак не может себе усвоить, что „воображаемая“ геометрия вовсе и не нуждается в совпадении ее положений с данными „опыта“, особенно взятыми в ограниченном масштабе. Такого же рода совершенно неосновательные требования выставляют и сторонники так наз. „натуральной геометрии“, согласно взглядам которых геометрическое равенство должно всегда сопровождаться и физическим совпадением („конгруэнцией“) при наложении. Поэтому, напр., никогда ни одна кривая линия не может быть равной по величине прямой, и т. д.

Наконец, даже такой первоклассный, творческий математический ум, как знаменитый Георг Кантор, не свободен от указанных смешений.

Правда, в общей форме он ясно различает („Основы общего учения о многообразиях“, рус. пер., стр. 30) *собственно математическую*, „умственную“ бесконечность (целых чисел), которую он называет *„интра-суб'ективной*, или имманентной, *реальностью*“, и бесконечность *транс-суб'ективную* (или *транзиентную*), „поскольку бесконечные числа следует рассматривать как выражения, или отображения процессов и отношений во внешнем мире, поскольку различные числовые классы... являются представителями мощностей, имеющих действительное место в телесной или духовной природе“.—Однако, в деталях своих рассуждений он не всегда проводит точную границу между математическим и реальным аспектами бесконечных чисел, и у него иногда не совсем ясно, что он разумеет под „действительностью, или существованием бесконечных чисел“, под их „реальностью“ и т. д. Кантору вредит в этом пункте его заигрывание с богословскими точками зрения, благодаря которому у него встречается немало таких, напр., мест, как „краткие намеки“ на доказательство „сотворенного бесконечного“, из которых один состоит в „умозаключении от высшего совершенства существа божия к возможности сотворения Transfinitum ordinatum, а затем от его всеблагости и величия к необходимости фактически последовавшего сотворения Transfinitum“, а другой—в доказательстве „a posteriori, что допущение Transfinitum in natura naturata дает лучшее... об'яснение явлений“... (К учению о трансфинитном“, рус. пер., стр. 121). Подобных мест у Кантора немало. Признание бесконечностей в реальном мире на основании (несомненной) возможности *математических* бесконечностей—со слабой опорой в богословских аргументах—есть, конечно, незаконное выхождение за строгие пределы собственно математики.

В сущности, как кажется, надо различать не два, а *три* рода бесконечностей: 1) бесконечность *не-собственная*—незавершенный ряд беспредельно возрастающих чисел („дурная“ *математическая* бесконечность), 2) *собственная* бесконечность—завершенный в известном смысле, хотя и беспредельный, ряд чисел („актуальная“ *математическая* бесконечность) и 3) бесконечность реально существующего („актуальная“, но уже не математическая, а *реальная* бесконечность).

У нас нередко смешивают две последних бесконечности и считают, что, раз Кантор показал возможность завершенной, актуальной *математической* бесконечности, то этим доказана и *реальная* бесконечность... На самом деле это две совершенно различных проблемы, и от математики к реальности тут аргументировать нельзя. Это смешение заметно, напр., у *Б. П. Вышеславцева* в его книге „Этика Фихте“.

15. Начиная с конца XVIII в., то понимание математики, на почве которого стоял Кант, постепенно оказывается несостоятельным. Наступает *пятый* (и пока последний, захватывающий и современность) период в развитии математики и ее методологии.

Этот период характеризуется, прежде всего, появлением ряда *новых*, ранее не существовавших математических наук. И эти новые

науки лежат, так сказать, в иной плоскости методологии, чем прежние математические науки. И ранее, в XVII и XVIII веках возникали новые математические науки: аналитическая геометрия, аналитическая механика, счисление бесконечно малых. При этом менялась, конечно, и методология,—однако, так сказать, *внутри самой математики*. Теперь же стала меняться и философская, *гносеологическая* методология ее. Стали вводиться *новые познавательные принципы, новые* основные, исходные положения, давшие начало так наз. „воображаемым“ наукам.

Параллельно с развитием этих наук постепенно осознается и их *методология*—те процессы мысли, которые привели к их возникновению. А в связи с этим получает новую форму и учение о методах наук математических вообще.

Вместе с тем, внутри математики (в ее новом, более обширном составе) происходит дифференциация: одни дисциплины отрываются от тесной связи с реальностью и выделяются в состав *чистой* математики (науки „собственно математические“); другие, наоборот, начинают ставить себе задачей как раз исследование этой реальности, приближаясь таким образом до известной степени к наукам естественным. Оказывается, что вопрос, о котором шло много споров: что именно изучает математика? умственные ли построения или же реальность?— решается очень просто... Математика (в ее целом) изучает и то, и другое,—но только различными своими отделами и, конечно, различными методами. То, что иногда, быть может, чувствовалось как „апория“, как безвыходное внутреннее противоречие (ибо, с одной стороны, сознавали, что элемент умственного построения играет в математике какую-то очень важную роль; а с другой—казалось нелепым, чтобы могла существовать наука, „отрешившаяся“ от реальности), оказалось двумя сторонами одного и того же сложного целого. Место прежнего, не дифференцированного единства заняла опирающаяся на более отчетливое усмотрение сущности математики дифференциация.

Эта перегруппировка математических дисциплин, быть может, еще не вполне утвердилась в общем сознании; однако, существо дела, повидимому, говорит всецело за нее.

16. С самого рубежа между XVIII и XIX столетиями начинает все настойчивее пробиваться мысль о том, что арифметика наших обычных, „вещественных“ чисел и эвклидова геометрия не представляют собою единственно возможных типов арифметической и геометрической науки.

У источника этого движения стоит один из самых широких и глубоких умов математики—знаменитый „князь математиков“ Гаусс (1777—1855 г.). Еще около 1792 г. (т. е. при жизни Канта и всего через 11 лет после выхода в свет „Критики чистого разума“) Гаусс приходит к мысли, что одна из основных аксиом эвклидовой геометрии—постулат о непересекаемости (при любом продолжении) лежащих в одной плоскости „параллельных линий“—не является строго обоснованной, и что поэтому возможна иная, не-эвклидова система геометрии. Однако, Гаусс высказал это свое убеждение только в письмах к ближайшим друзьям и не опубликовал его в печати [1]). И честь опубликования первых трудов по не-эвклидовой геометрии выпала на долю нашего русского

[1]) Беру у *А. Фосса* (Сущность математики, стр. 94) цитаты из писем Гаусса. „Вот уже свыше 30 лет (пишет Гаусс Тауринусу 8 ноября 1824 г.), как я занимаюсь этим предметом. Допущение, что сумма 3 углов △-а меньше 180°, приводит к совершенно новой и отличной от нашей геометрии. Эта геометрия совершенно последовательна, и я развил ее для себя вполне удовлетворительно“. „Мое убеждение (письмо Бесселю 27 янв. 1829 г.), чт нельзя обосновать геометрию вполне a priori, еще более укрепилось“ (последние слова уже прямо против Канта!)

гениального математика, проф Казанского университета Н. И. Лобачевского. Лобачевский, независимо от Гаусса и совершенно не зная о его воззрениях, пришел к тому же убеждению относительно необоснованности аксиомы о параллельных линиях. 12-го февраля ст. ст. 1826 г. он прочел в заседании факультета первый свой мемуар о новой геометрии, а в 1829 г. выпустил первое печатное ее изложение.

В 1832 г. выпустил небольшую работу в том же духе сын университетского товарища Гаусса венгерец *Иоанн Болиаи*, на которого, повидимому, имели косвенное влияние воззрения Гаусса. Позже на этом поприще выступили *Риманн*, *Бельтрами*, *Ф. Клейн* и многие другие. И теперь „не-эвклидовы“ [1]) геометрии являются признанными членами в семье наук.

Тот же Гаусс способствовал и созданию первой системы арифметики, выходившей за пределы традиционной арифметики вещественных чисел. Гаусс расширил понятие о числе введением „комплексных“ чисел и тем дал начало арифметике многих типов единиц (чисел комплексных, гиперкомплексных, кватернионов), законы которой оказываются отличными от законов арифметики чисел вещественных. Позже для теории комплексных чисел много сделал французский математик *Коши*; учение о кватернионах разработал в 40-х годах XIX в. ирландский математик *В. Р. Гамильтон* (хотя, как указывает А. Фосс, они были введены, собственно говоря, тем же Гауссом в 1819-20 г. г.).

Позже *Г. Кантор* (предшественником которого был в этом *Больцано* в своих „Парадоксах бесконечного“) создает еще иной тип арифметики—*арифметику бесконечных множеств и трансфинитных чисел*.

Наконец, в XX в. возникает и отличная от ньютоновской система механики (эйнштейнова), пролагающая путь к образованию механики „воображаемой“.

Таким образом, последний период истории математических наук отмечен, прежде всего, появлением целого ряда ранее не существовавших, „воображаемых“ наук.

Каждая из этих новых наук представляет собою вполне „научное“ (в математическом смысле,—т. е. стройное, логическое, вытекающее из основных допущений, лишенное внутренних противоречий) целое.

Эти основные допущения образованы (в известных пределах) свободно, но затем развиваются строго логично, при помощи дедукции. Оказалось, что традиционные математические дисциплины суть не *единственно возможные*, *„разумно“ необходимые* системы, что кроме них и параллельно им может быть построен ряд иных математических наук.

Возникновение „воображаемых“ математических наук сделало неизбежным распадение математики на две принципиально одна от другой отличные области: 1) на „чистую“, отвлеченно мыслимую, или собственно „построительную“ математику и 2) математику реальную.

А так как в основе каждой из этих областей математики лежат специфические для нее методы, то и методология математики получает теперь две различных формы: одну—в области чистой математики и др гую—в области математики „реальной“ (см. ниже).

Теперь об'ектом „чистой“ математики становится уже не то, что „существует реально“, т. е. в фактическом смысле, а то, что существует, в качестве *правомерного логического построения*, т. е. то,



[1]) О не-эвклидовых геометриях, а также о других упоминаемых здесь математических системах я дам краткие сведения ниже.

1) что может (в известной области) мыслиться без внутренних противоречий, 2) что строго логически выводится из предпосылок, хотя бы последние строились до известной степени произвольно. „Чистая“ математика обнимает теперь отвлеченно возможное, логически мыслимое, строго связное и вытекающее из предпосылок; она становится наукой об *умственных построениях.*

Только приняв во внимание эту радикальную перестройку методологии новейшей (чистой) математики, можно понять и оценить определения, даваемые этой науке ее современными представителями[1]. Вне общего направления современной математики определения эти могут показаться неожиданными, а пожалуй—и странными и парадоксальными...

Известно определение чистой математики, данное одним из крупнейших математиков-философов нашего времени *Бертраном Рёсселем.* Чистая математика, говорит Рёссель, целиком состоит из утверждений следующего типа: если такое-то положение справедливо в применении к какому-нибудь об‘екту, то в применении к тому же об‘екту справедливо и такое-то другое положение. Здесь существенно, во-первых, то, что вопрос, справедливо-ли на самом деле первое положение, не подлежит обсуждению, а во-вторых, что нет необходимости указывать, что представляет собою тот об‘ект, в применении к которому признается справедливым первое положение.

Таким образом, математика может быть определена как *наука, в которой мы никогда не знаем, о чем мы говорим, и никогда не знаем, верно ли то, что мы говорим*[2]).

Во избежание недоразумений, необходимо точно понять это определение.

Прежде всего, оно страдает неполнотой: в нем не указаны *об‘ем* и *область* тех положений, которые входят в математику. *Не всякие логические выводы одних положений из других дадут математику.* Рёссель слишком приближает математику к логике. В этом отношении определение Рёсселя хорошо дополняется другим, столь же известным определением *(Г. Кантора),* согласно которому *матеметика есть наука о хорошо упорядоченных многообразиях,* или *о формах хорошо упорядоченных многообразий.*

Мы можем упорядочивать „многообразия“ (т. е. вообще все возможные содержания нашего знания) по *количеству и числу, по времени, пространству, порядку,* а также в отношении того синтеза форм времени и пространства, в которой отливается *движение.* И все эти формы составляют содержание математических наук.

Таким образом, определение Рёсселя должно было бы получить приблизительно следующий вид: *чистая математика есть наука логических выводов одних положений из других в сфере форм хорошо упорядоченных многообразий.*

В последней фразе своего определения математики Рёссель играет понятиями: *знать, верно* и т. д.

---

[1]) Некоторые из современных определений математики собраны у *А. Фосса* (Сущность математики; Госизд., 1923, стр. 68) и у проф. *А. В. Васильева* (Математика, Казань. 1916).

[2]) Не имея под руками того сочинения Рёсселя, в котором он дает это определение (The principles of Mathematics), я беру его из книги *И. Е. Орлова* „Логика естествознания“. Скажу кстати, что книга И. Е. Орлова написана с настоящим знанием дела. Менее удовлетворительной представляется мне в ней как раз глава III, посвященная математике.

Это придает пикантность его определению, но может повести к недоразумениям, если не истолковать совершенно отчетливо употребляемых Рёсселем терминов.

Говоря: „мы никогда не знаем, *о чем* говорим“, Рёссель имеет в виду *предметное* знание с его *конкретными* об‘ектами. „Дважды два—четыре“ означает не 4 яблока или лошади или мысли или отношения, словом, вообще ничего определенного, конкретного, а *четыре вообще*: все вообще и ничего в частности. Поэтому „мы и не знаем, о чем (конкретном) говорим“... обо всем и ни о чем в частности... Но это не значит, конечно, будто мы не знаем, *о чем математическом* мы говорим: *математическое* содержание данного положения совершенно ясно—не известен лишь тот *конкретный* материал, к которому оно прилагается.

„Мы не знаем, верно ли то, что мы говорим“, значит только то, что (*реальная*) *верность, истинность выводного положения зависит от истинности того положения, из которого мы его выводим*. В чистой математике возможны „воображаемые“ построения—такие, которые мы строим (в известной мере) произвольно. Поскольку эти основные допущения *совпадают* с реальной действительностью, постольку с последней будут совпадать (т. е. будут *реально* истинны) и выводные положения (теоремы данной науки). Поскольку основные положения окажутся *не соответствующими* реальной действительности, постольку ей не будут отвечать и положения выводные. Но вопрос о таком соответствии или несоответствии *в чистую математику, как таковую, не входит*. Вопрос этот должен относиться к другой отрасли знания —к *математике реальной*.

Но у Рёсселя в его остроумной формуле отлично подчеркнута одна основная сторона *современной чистой математики*—ее построительно-логический, конструктивно-дедуктивный характер, ее (вполне законно обоснованное) равнодушие к реальности, изучение которой (с математических ее сторон) составляет задачу иного ряда дисциплин. Такое „равнодушие к реальности“ со стороны *чистой* математики отнюдь не обозначает ее „химеричности“, „оторванности от жизни, от реальности“ и т. п.

Все это обозначает лишь ставший неизбежным *новый шаг вперед в дифференциации научной мысли, в разделении научного труда*. Освободившись от погони за „реальностью“, *чистая математика* сможет создать наиболее полный и наиболее тонко разработанный *репертуар построений, а след., и возможных об‘яснений действительности*. А затем *реальная математика* сумеет использовать эти возможные об‘яснения, сделать из них выбор, скомбинировать их для наилучшего, наиболее стройного, непротиворечивого и обоснованного *истолкования реальности, как таковой*. При этом она применит свои особые методы, отличные от методов чистой математики.

18. Аналогичны рёсселеву и другие современные определения чистой математики: все они подчеркивают *построительно-логический, конструктивно-выводной* характер этой науки.

Б. Пирс (как и вообще все строгие логицисты) слишком тесно связывает (в сущности, сливает) математику с логикой. Математика есть „наука“, выводящая необходимые следствия, говорит Пирс в своей Linear associative Algebra (1870 г.) [1])

Э. Папперит (1892 г.) говорит: „предмет чистой математики составляют отношения, которые могут быть логически устанавливаемы

[1]) Беру *А. Фосса*, Сущность математики, стр. 68.

между какими-либо мыслимыми элементами, когда мы их принимаем за входящие в состав какого-либо вполне упорядоченного многообразия; закон порядка этого многообразия должен подлежать нашему выбору".

Сжатое и очень ясное определение дает M. Böcher. „Математика[1]) есть наука, которая при помощи логических прицинов выводит из логических определений дедуктивные заключения" [2]).

В этом определении выпукло указаны два основных методологических приема, которыми строится современная чистая математика: [1]) *мысленное построение* основных элементов (аксиом, определений и т. д.) и [2]) *дедукция следствий* этих элементов, совершаемая на основе „логических принципов".

То же (в существе) говорит и Кутюра („Философские принципы математики", 185): „метод математики—дедукция... Всякая дедукция предполагает первые предложения, которые приходится постулировать и которых нельзя вывести, и эти постулаты могут быть заимствованы из какого угодно источника познания, эмпирического или априорного".

В другом месте того-же сочинения (стр. 6) Кутюра говорит то же в применении специально к геометрии и механике.

„Геометрия и механика, очищенные, насколько возможно, от интуиции, стали „гипотетико-дедуктивными системами", основанными на известном числе аксиом и постулатов, из которых все остальное выводится логически".

Тот же смысл имеет и современное „аксиоматическое" понимание геометрии, развитое в особенности *Д. Гильбертом*. В своем сочинении „Основания геометрии" [3]) Гильберт ставит себе задачей (стр. 1) „выставить для геометрии [4]) *полную и возможно более простую* систему аксиом и вывести из них важнейшие геометрические теоремы так, чтобы при этом возможно ярче выяснилось значение различных групп аксиом и об'ем следствий, выводимых из отдельных аксиом". Иначе говоря, Гильберт старается создать „канон" основных аксиом, систематизировать *построительный* элемент геометрической науки [5]).

---

[1]) „Чистая", конечно.

[2]) Таким образом, и исходные положения, и принципы выводов из этих положений характеризуются в современной матиматике как *логические*, т. е систематически, планомерно, последоват-льно и эффективно (с надлежащими результатами) *мыслимые* (построяемые и выводимые), а не просто „воспроизводящие" ту или иную реальность. Современняя чис ая математика, таким образом, окончательно перестает быть способом простого и непосредственного *изучение реальности* и делается *системой умственных построений*.

[3]) Рус. пер. под ред. проф. А. В. Васильева, со статьями редактора и А. Пуанкаре, изд. „Сеятель", Петроград, 1923.

[4]) „Геометрии вообще", т. е. как эвклидовой, так и всякой „не-эвклидовой".

[5]) В сущности даже Д. С. Милль, главный представитель противоположной „эмпиристической" методологии математики, не мог не сознавать, что в математике дело „чувственным" опытом не исчерпывается. И у него мы находим такие, напр., признания. „Метод всех дедуктивных наук (а типом их Д. С. Милль считает совершенно правильно математику. В.И.) *гипотетичен*. Науки эти излагают следствия из некоторых предположений, предоставляя особому исследованию вопрос о том, истинны эти предположения или нет, и если не в точности истинны, то достаточно ли близко приближаются они к истине". В сущности, тут есть уже почти прямое признание значения в математике „построений", а если угодно, то и намек на необходимость „реально-математического" исследования („особое исследование" вопроса о соответствии предположений реальности). Или: „Геометрия основана на гипотезах; ...во всякой науке мы можем, рассуждая на основании гипотез, получить систему заключений, столь же достоверных, как заключения геометрии, т. е. столь же строго соответствующих гипотезам и столь же непреодолимо требующих признания—*в том случае, если* эти гипотезы справедливы".

Наконец, об арифметике: „Наука о числах истинна лишь в том смысле, что ее предложения правильно вытекают, если предположить истинными посылки". (Система логики, пер. под ред. *В. Ивановского*, 1899 года., стр. 205. 179. 203). Таким образом,

Приведу еще определение математики, даваемое проф. *А. В. Васильевым* в его статье „Математика" (Казань, 1916, стр. 58). Проф. Васильев отмечает особое важное значенне для математики *символизма.*

„Желая дать самое широкое значение слову *математика,* говорит проф. Васильев, мы не можем не ввести в определение ее употребления символов. Поэтому, оставаясь в общем на точке зрения Рёсселя и Уайтхэда, следовало бы определить *чистую математику, как систему логических следствий, выводимых с помощью символов из предпосылок* (аксиом, постулатов, гипотез), которые могут быть устанавливаемы свободно разумом"...

Итак, *построение* (*конструкция*) и логические *выводы* из построений (*дедукция*) являются теми основными методами, какими строится современная *чистая* математика.

19. Перейдем к новому пониманию современной математикой ее отношений к реальности.

Выше было уже сказано о том, что в современной математике явственно намечается распадение ее на „чистую" и „реальную".

Чистая математика имеет содержанием известного рода умственные построения, которые могут не совпадать с „реальностью",—мало того *не могут все совпадать* с ней уже потому, что для каждой области упорядоченных многообразий таких построений имеется *несколько.*

Однако, это вовсе не значит, конечно, что математика *вся в целом* „оторвалась" от действительности, стала заниматься чем-то нереальным, фиктивным, ударилась в „идеализм" и т. п. Как я уже говорил, дело сводится тут просто *к более правильному и более глубоко обоснованному* распределению труда между различными по характеру дисциплинами этой науки.

Да! „чистая" математика имеет содержанием действительно построения, дедуктивно развиваемые из основных начал, устанавливаемых до известной степени произвольно. Да! она допускает *несколько* параллельных друг другу и теоретически одинаково обоснованных, равно логичных, равноправных и равно „возможных" конструкций той или иной области математического знания. Но именно поэтому „чистая" математика и *не имеет прямого отношения к реальности.* Она представляет собою лишь „репертуар" возможных пониманий действительности (из которых, быть может, ни одно *не охватывает этой действительности в целом)*: она есть как бы „клавиатура", общий запас нот, из которого фактически будут приложены к действительности лишь одна или какая-либо комбинация нескольких.

Характеристика „чистой" математики.

20. Как сказано выше, современное состояние математики приводит к различению в ее составе 1) математики „чистой", или наук „собственно математических", и 2) наук „реально-математических". Эти две группы дисциплин различаются и своим внутренним строением, и отношением каждой из них к „реальности", а также методами их построения и обработки.

истина стучалась в двери даже к предубежденному в этом вопросе мыслителю. Само собой разумеется, что Милль выдвигает на первый план не эти „гипотетические" моменты математики, а эмпиристические и истолковывает первые в свете вторых, как их второстепенные придатки.

Термин „*чистая* математика" употребляется в *нескольких* значениях, которые необходимо разграничить.

Во-первых, „чистую" математику иногда противополагают *прикладной*, разумея под последней разнообразные приложения математики в технике и включая в „чистую" все математические дисциплины собственно-теоретического характера.

Во-вторых, иногда (правда, скорее в повседневном обиходе, чем у специалистов) под „чистой" математикой разумеют все математические науки—в противоположность наукам естественным.

В-третьих, сами математики иногда либо включают в „чистую" математику все математические дисциплины, кроме механики, либо понимают под „чистою математикой" одно только учение о числе. Это последнее понимание освящено именем Гаусса, видевшего в арифметике науку математическую *par excellence:* изучение природы, по Гауссу, опирается на математику, которая поэтому является „царицей наук", а сама математика (в широком смысле,—включая геометрию и механику) опирается на арифметику [1]).

Так смотрит, напр., и *А. Фосс*, делящий „всю совокупность математических изысканий на *чистую* математику и область ее *приложений*. К последним относятся *геометрия* и *механика*—в самом широком смысле. *Чистая-же математика есть наука о числах*". (Сущность математики, 1923, стр. 15).

Я употребляю термин „чистая математика" в отличном от всех этих смыслов значении: под „чистой математикой" у меня разумеется *изучение всех отвлеченно возможных типов построений* математических элементов и дедуктивных выводов из них. В таком смысле учения „чистой математики" необходимо *множественны*, ибо в каждой области возможно несколько отвлеченно равноправных и равно научных построений.

Понимаемой в таком смысле „чистой математике" противостоит *математика реальная*,—изучающая действительный, проявляющийся в опыте строй той или другой (подчиняющейся математике) сферы реальности (а также и человеческой деятельности). Реальная математика, очевидно, необходимо *единственна*, „однозначна", так как строй действительности, конечно, *один*.

Выбор терминов и установление их значений—дело практического удобства; необходимо только точно разграничить значения каждого термина и строго выдерживать принятые значения их [2]).

21. Я уже сказал выше, что в современной „чистой" математике *конструктивный* („построительный") момент получил особо важное, первенствующее значение и что очевиднейшим свидетельством этого служит факт возникновения в XIX и XX веках ряда „воображаемых" математических наук.

Это не значит, конечно, чтобы элемент этот впервые появился именно в современной математике. Он был на лице в математической науке и раньше,—только был менее осознан и не проводился так систематично и широко.

---

[1]) „Арифметика стоит в том же отношении к математике, в каком последняя стоит к изучению природы. Математика есть царица наук, а арифметика есть царица математики". Беру эти слова Гаусса из книги проф. *А. В. Васильева* „Целое число", Петроград, 1922, стр. 14.

[2]) Понятий „чистой" и „прикладной" (а также „смешанной") математики касается проф. *А. В. Васильев* в статье „Математика" (изд. Казанского Физико-математич. Общества, Казань, 1916, стр. 24—27). В этой брошюре проф. Васильев говорит и еще об одном разграничении в пределах математики—о различении математики *точной и приближенной* (которую он отожествляет с „практической").

В чем же, в каких формах проявляется в математике эта конструктивная деятельность мышления?

Всякое вообще мышление происходит, главным образом, при помощи *понятий*, связываемых в суждения и умозаключения. И вот, оказывается, что математические понятия образуются *не так, как понятия о реальных* предметах, что есть *особый* способ их возникновения, не вполне похожий на способ образования понятий, специфических для наук естественных. Этот способ и есть *построение, конструкция*. По нему и всю математику называют часто наукой *конструктивной* (или, что то же, *построительной)*, а также *рациональной* (или *умозрительной*, иначе *спекулятивной*).

Школьная логика до сих пор говорит еще обычно только об одном способе образования понятий: а именно, при помощи *абстракции*.

Понятия, согласно этой логике, возникают при помощи *отвлечения* (абстрагирования) несходных признаков от ряда сходных (в общем) представлений, *об'единения* (синтеза) их сходных признаков в одно целое, придания этому целому общего значения *(обобщение*, генерализация), и наконец, обозначения этого целого известным названием, или термином *(называние)*.

Этот способ образования понятий применим только к реальным предметам: понятия о таких предметах образуются действительно этим путем, т. е. начиная с „абстракции“. Поэтому такой способ образования понятий обычно и называется *абстрактивным*.

Однако, есть и другой процесс выработки понятий,—давно, конечно, фактически применявшийся в науке, но в общей форме выделенный логикой и теорией познания лишь в сравнительно недавнее время. Это—способ *конструктивный*: он-то и создает основные понятия чистой математики.

„Конструктивные“ понятия образуются *также при помощи опыта*, но не опыта чувственного восприятия, а „опыта“ некоторых *активных умственных операций—опыта воображения и мышления*.

„Опыт“ есть понятие многосмысленное (как и все вообще наши понятия), и отожествление его с одним только „чувственным“ опытом сильно мешает ясности научно-методологических воззрений. Можно выделить, по меньшей мере, следующие значения этого термина: (не считая того значения, в котором он равнозначен „эксперименту“): 1) опыт *чувственных* восприятий, 2) опыт в самом *широком* смысле—всяких вообще переживаний, испытываний, желаний, действий и т. д. („у него большой опыт в организационной работе“, или „в отвлеченном мышлении“, или „в чувствах любви и ненависти“, или „в творчестве“ и т. п.), 3) опыт *научный*, как то организованное целое самых разнообразных умственных процессов, на котором основывается та или другая наука (или наука вообще).

И вот, „опыт воображения и мышления“, столь широко применяемый в математике, относится именно к этой последней рубрике.

Возьмем, напр., математическое понятие *о бесконечности*—в какой-либо из его разновидностей (бесконечность пространства, времени, числа и т. д.).

Как оно образуется? Понятие о бесконечности пространства, напр., я составляю себе при помощи воображения. Я *воображаю* себя летящим, положим, вверх; когда я долетаю до солнца, мое мышление подсказывает мне, что это еще не конец возможности моего воображаемого пути,—я могу лететь дальше. Я умственно долетаю до самых далеких звезд, и опять сознаю, что и тут еще не конец. И сколько бы раз я ни делал остановки на этом моем воображаемом пути,

каждый раз я сознаю, что конца еще нет,—есть возможность лететь (умственно) дальше... Таким образом, понятие математической бесконечности есть понятие *не о чем-то* конкретном и доступном внешним чувствам (в роде, напр., камня, дерева и т. д.), а о *некоторой деятельности ума*, которая и образует (или „построяет") это понятие. Бесконечность нельзя видеть, ощупать и т. д.: это просто *мысль* о безграничной возможности для нашего воображения переходить всякие пределы...

Возьмем другое основное понятие математики — понятие о *числе*. Как оно возникает?

Прежде всего, мы должны отчетливо поставить вопрос, о каком „возникновении" числа идет речь?

Числа могут „возникать" в результате пересчета или измерения предметов. Однако, когда мы спрашиваем о возникновении *числа вообще*, мы имеем в виду не это, не пересчет или измерение на основании ранее уже готовой схемы чисел, а возникновение *этой самой схемы*—той системы их, при помощи которой производятся пересчет и измерение. Акт пересчета той или другой группы об'ектов состоит в приведении каждого из членов этой группы в поединичное соответствие с ранее уже образованным рядом идущих в строгой последовательности „порядковых" чисел, а всей группы в целом—в соответствие с одним из ряда последовательно, от члена к члену, возрастающих (каждый раз на единицу) *количественных чисел*. Ясно, что выполнение акта пересчета возможно *лишь тогда, когда у нас в уме сложилась эта схема правильно возрастающих чисел* („натуральных"—целых положительных: 1, 2, 3, и т. д.). Если же этой схемы в нашем уме еще нет (как у животных или у маленьких детей) или она существует лишь в самых скромных зачатках, то и акт пересчета будет либо вовсе невозможным, либо будет осуществляться лишь как раз до того пункта, до которого у нас сложилась эта схема: один дикарь будет считать только до 5, другой только до 31 (см. выше) и т. д.

Итак, акт „пересчета" становится возможным лишь благодаря тому, что схема чисел (хотя-бы небольшая) у нас уже образовалась.

Сама же эта схема образуется посредством ряда актов *умственного синтеза* отдельных единиц в некоторые целые („числа").

Этот умственный синтез *может*, конечно, немедленно по достижении нового числа иллюстрироваться и подкрепляться приложением этого числа к пересчету групп реальных предметов; но *суть* образования числа—не в этом приложении, а в акте умственного синтеза, *создающего новое, ранее не бывшее в уме число, как целое*. И это вновь построенное число—для того, чтобы оно могло быть приложено к пересчету группы об'ектов, должно пониматься *уже как отвлеченное*, как *приложимое* ко всем группам реальных предметов (или, по крайней мере, к *нескольким* классам их). Умственно синтезированная „тройка" есть *тройка вообще*: и хотя-бы она была тотчас-же приложена к пересчету деревьев, но *и к этому пересчету она прилагается на основании своей общезначимости*—на основании того, что она есть „тройка" не только какого-либо одного рода предметов, а „тройка" *всяких вообще* предметов,—просто „тройка", т. е. одна единица и еще одна и еще одна.

22. В виду важности уяснения этого вопроса я попробую еще раз выделить элементы *чувственного* (в обычном, популярном смысле) и *умственного* опыта в процессе образования системы чисел.

Чувственный опыт в построении чисел дает понятие о *конкретной* единице—напр., о животном, о дереве, как *о естественном целом*.

Но понятия об *отвлеченной единице*—о „единице вообще"—и о *числе*, как *совокупности* единиц, даются уже опытом воображения и мышления.

Надо иметь в виду, что термины „один", „единица" покрывают два различных содержания. Во-первых, *единство*, т. е. тесную связность частей одного конкретного предмета, *как целого*, так или иначе выделяющегося из окружающей его обстановки и от других предметов; и во-вторых, тот факт, что этот предмет представляет собою *единицу*, что он „один"—в противоположность всякому множеству, в которое он может войти членом.

И вот, *единство конкретного предмета*, его целостность мы воспринимаем преимущественно „чувственным" опытом. Береза, баран и т. д. представляют собою „единства" на основании тесной связности их частей; отдельные члены такого „единства" гораздо прочнее и теснее связаны друг с другом, чем с окружающей средой, и это единство отчетливо выделяется именно, как *одно целое*.

Напротив, каждое такое целое становится *единицей, как составным элементом* (или зачатком) *числа*, лишь после некоторой нашей активной операции: а именно, *деятельности счета*. Это тоже „опыт", но только иной, чем чувственное восприятие; это – наша *активная деятельность*, которая отнюдь не навязывается нам извне сама собою, независимо от нашей воли (как это имеет место с внешним восприятием), а требует с *нашей стороны произвольного и планомерного усилия*. Если мы такой произвольной деятельности не проявим, то, сколько бы мы ни восприняли отдельных об'ектов, „числа" их у нас не получится. Таким образом, число возникает тоже, конечно, из „практики", из „опыта", но только из практики и опыта *активных операций* выделения единиц, их синтеза и т. д., т. е., вообще говоря, *счета*.

23. Подобным же образом, в *геометрии и механике* „чувственный" опыт дает нам восприятия конкретных пространственных положений, отношений между предметами, движений и т д. Но только опыт умственных деятельностей воображения и мышления сливает эти отдельные восприятия в некоторое целое—в представление и понятие *пространства*, как об'екта математической науки.

Отдельные пространственные восприятия даются нам многими путями. Очень серьезные исследователи признают, что „пространственность" есть такое же основное качество ощущений и восприятий, как и цвет, напр., или сила освещения и т. п. Они говорят поэтому о „первичной об'емности" ощущений. Так, выстрел из пушки уже сразу кажется нам занимающим *большее* пространство, чем, напр., жужжанье комара; ощущение при погружении тела в ванну *об'емистее* укола булавкой. Далее, пространственные восприятия возникают из многообразных ассоциаций и переработок данных опыта зрительного, осязательного и двигательного (это известно из психологии).

Но все эти чувственные восприятия и их переработки дают нам лишь *конкретные* показания относительно величин и расстояний предметов. В них еще нет основных свойств *пространства, как такового* (ближайшим образом—эвклидова): бесконечности, сплошной однородности, индифферентности ко всякому содержанию (предметы от перемещения в пространстве не меняют величины и формы), прямолинейного характера. единства (ибо все отдельные его участки сливаются в нем в одно целое) и т. д. И вот, эти-то общие свойства эвклидова пространства получаются уже не при помощи „чувственного" опыта, а при помощи опыта воображения и мышления.

В еще гораздо большей степени участвует построяющая функция ума при образовании понятий о не-эвклидовых пространствах. Там вся основная работа проделывается воображением и мышлением,- непосредственное восприятие дает лишь элементарнейший материал для сложных умственных построений и для строго дедуктивного выведения из них следствий.

Подобным же образом возникает *и представление* (*и понятие*) времени. *Психологический зародыш* его дается нам конкретным представлениям *смены* отдельных, друг за другом идущих переживаний. Такая „смена" воспринимается нами, как некоторые думают, уже непосредственно: мы сознаем самый процесс перехода, *самый момент*

смены—в то самое время, как она совершается. Настоящее, как думают эти мыслители, прямо связывается с будущим—с тем, что за этим настоящим следует, во что оно переходит. Точно так же есть тесная связь и между настоящим и только что прошедшим прошлым: настоящее как-бы на наших глазах „вырастает" из прошлого, оно постепенно из него выходит,—и этот переход мы непосредственно сознаем. „Настоящее есть не тонкая линия, разделяющая прошлое и будущее, а довольно широкое седло, сидя на котором мы озираем как прошлое, так и будущее".

Кроме такого непосредственного восприятия, „смена" моментов сознается нами еще *косвенно*—через сопоставление содержания данного момента с отличным от него содержанием предыдущих моментов, сохранившимся в нашей памяти и сознаваемым нами также в качестве реально переживавшихся. Такое сопоставление приводит нас к мысли о переходе предшествующего в последующее, о смене первого вторым.

Кроме момента „смены", нами воспринимается психологически и само „течение" времени, сама „длительность"—в зависимости от количества, силы, значения для нас пережитых за данный период состояний. При этом есть разница в оценке в зависимости от того, когда она производится. Известно, что промежуток времени, бедный психическим содержанием, кажется *во время его переживания* очень длинным („скука"); *в воспоминании* же он представляется чрезвычайно коротким; наоборот, период, богатый сильными переживаниями, „пролетает очень быстро", кажется при переживании его коротким, в воспоминании же занимает большое место.

На основе этих психологических данных ум построяет *математическое* понятие времени, как общей формы всех событий, бесконечной в обе стороны—и в прошедшее, и в будущее, сплошной (не имеющей перерыва), вполне равномерно текущей (независимо от нашей оценки содержания отдельных периодов, наоборот, дающей схему для всех наших оценок продолжительности), наконец, единой (так как всякий промежуток времени составляет часть этой общей, все охватывающей схемы).

Всех этих признаков в „психологическом" времени нет: но они составляют самое существенное содержание времени математического; и они вносятся в понятие времени *умом*—построением воображения.

Нечто подобное имеет место и в применении к движению: и здесь также на известной конкретной, чувственно-опытной основе восприятий постепенно складываются отвлеченные, *математические* понятия о движении.

Таким образом, в математическом мышлении „чувственный" опыт дает конкретный материал; научную же форму материал этот получает лишь при посредстве „умственного опыта" построения, активных операций воображения и мышления.

24. Построяющая деятельность воображения и мышления, применяемая в математике, совершается *систематически* и на основе некоторых *принципов*. Систематичность и определяющее значение принципов являются характерными особенностями чистой математики.

Так, основа арифметики—„натуральные" (целые положительные) числа—построяются при помощи активной умственной операции—*счета*, исходящей из принципа *повторения* (*итерации*,—от латин. iterum= повторно) любое, неограниченное число раз основного элемента всякого натурального числа (+1) и *синтеза* этих повторенных единиц в непрерывно, с каждой новой единицей растущие целые (числа).

И такое построение происходит *систематически*, т. е. без перерывов, в строго последовательном порядке нарастания величины чисел. Отсюда 1) ни одно число не может быть образовано, если ранее не уяснены в принципе все предшествующие ему, меньшие, чем оно, числа, 2) каждое число занимает строго определенное место в системе чисел,—оно больше предшествующего ему на одну единицу и меньше следующего за ним также на одну единицу. Так, напр., число 5 может быть образовано только тогда, когда уже есть число 4, и если мы не знаем еще, что такое 4, мы не можем знать и того, что такое 5. Это число 5 занимает далее в системе строго определенное место—между 4 и 6,—его никуда нельзя передвинуть с этого места,—оно понятно *только в этой связи*.

Таким образом, в „рядах" математических понятий их содержание нарастает по известному закону, в строго систематической последовательности—с такими (равными один другому) перерывами между отдельными членами ряда, какие предусматриваются законом образования данной системы (напр., с перерывом в *одну единицу* в системе нату-

ральных чисел). Это можно выразить так: основные математические понятия имеют *рядовой* характер; они образуют *ряды*, отдельные члены которых тесно связаны между собою общим законом образования данного ряда. Каждое понятие „вытекает“ из предыдущего по основному закону образования ряда, *функционально* связано со своим предыдущим.

25. В этом „рядовом“ характере математических понятий их радикальное отличие от понятий реальных, естественно-научных. *Типические естественно-научные* понятия не образуют „рядов“, члены которых стояли бы на *одинаковых* расстояниях от своих предыдущих и последующих. Ель, сосна, пихта, кедр, кипарис, туя, лиственница (или ветла, верба, ива)—не составляют „ряда“, связанного *одним* определенным законом своего образования. В одних отношениях известные из этих деревьев ближе к одним, в других—к другим. Различия между ними даны уже реальной действительностью, и они в одних случаях больше, в других меньше,—то выступают различия одного рода, то другого... Нет той простоты, закономерности и четкости, какие мы имеем в правильно нарастающем, математическом ряде: 1, 2, 3, 4 и т. д. И это, конечно, потому, что числовой ряд есть систематическое создание нашего ума по определенному, единому на всем протяжении этого ряда закону, тогда как реальная действительность далеко не вполне подчиняется стройным, строго систематическим формам математического упорядочения многообразий.

Поэтому, напр., сосну может изучать и человек, не знающий, что такое туя, и обратно: тую—не знающий сосны... Можно изучать сосну раньше кипариса (или кипарис раньше сосны); можно знакомиться с этими видами хвойных деревьев в нескольких последовательных порядках, и каждый, с известной точки зрения, будет не только возможным, но правильным...

Но понять, что такое 5, не узнав ранее, что такое 4, *совершенно немыслимо*.

26. Высказывалось мнение, что основные математические понятия (и в частности, понятие числа) образуются таким же путем, как и типичные естественно-научные понятия, т. е. при помощи *абстракции* от конкретных восприятий, от данных *чувственного* опыта. В логической науке мнение это было выдвинуто, между прочим, Д. С. Миллем в его „Системе логики“.

Д. С. Милль написал свою „Систему логики“ в начале 40-х годов XIX века, когда принципиальные позиции *современной* математики еще только намечались в отдельных, передовых математических умах.

Поэтому нет ничего удивительного в том, что в области методологии математики он высказал мнения, являющиеся для нашего времени уже устаревшими.

Милль стоял на старой почве тесного единения математики с естествознанием, столь характерного для предыдущего периода математических наук, и его основная тенденция состояла в том, чтобы показать, что методология наук математических тожественна с методологией естествознания, что эта последняя есть *единственный* тип научной методологии.

Вот что говорит Д. С. Милль об арифметике: „Все основные истины науки о числах опираются на очевидность ощущений; доказательством их служит восприятие глазами или пальцами того, что любое данное число предметов (напр., 10 шаров) может, благодаря разъединению и перераспределению, возбуждать в наших чувствах впечатления всех сочетаний чисел, сумма которых равна 10“ [1]).

Прежде всего, у Милля не проведено отчетливой границы между двумя *совершенно различными* операциями: 1) образованием самой системы чисел (числового ряда) и 2) актом пересчета какого-либо конкретного множества. *Акт пересчета*, как мы говорили, *требует уже готовой, ранее составленной системы чисел* и без нее не может быть выполнен.

Построение же самих *чисел*, как (отвлеченных), совокупностей единиц, есть нечто совершенно иное. *Числа, как таковые*, суть не какой-либо непосредственно воспринимаемый *признак* группы предметов (в роде, напр., их цвета), а результат особой дея-

[1]) Система логики, пер. под ред. В. Н. Ивановского, М., 1899, стр. 202—203.

тельности „счисления“ — некоторой активно выполняемой операции. Поэтому, как мы говорили, *образование самого ряда чисел* есть основа и необходимая предпосылка всякого пересчета конкретных об'ектов. Эта—задача в высшей степени трудная, требовавшая, как мы видели, многих веков для своего завершения. Трудности процессов отвлечения, синтеза и т. д. преодолевались лишь с огромными усилиями, шаг за шагом.

Милль не замечает того, „что воспринять глазами или пальцами, что любое данное число предметов (напр., 10 шаров) может, благодаря раз'единению и перераспределению, возбуждать в наших чувствах впечатления всех сочетаний чисел, сумма которых равна 10“, — возможно только в том случае, если мы пр дварительно *сосчитаем* общую сумму шаров (10), а также все те группы их, суммы которых равны 10. Тут дело не в „ощущениях“ (как думает Милль), а в активной *деятельности* пересчета, предполагающей уже *готовую* схему натуральных чисел.

Ошибочность выведения Миллем чисел и отношений между ними из „ощущений“ будет очевидной, если мы возьмем более крупные числа. Пока мы имеем дело с *маленькими* числами (Милль берет, напр., группы из 2 и 3 камешков), может еще казаться, что они возникают из чувственного опыта—из простого восприятия. Однако, на самом деле это не что иное, как одна из иллюзий популярного мышления: если какой-либо процесс мышления элементарен и происходит очень быстро, его вовсе не замечают. Если предо мной всего *два* зерна (или камешка), то я могу, конечно, *мгновенно*, посмотрев на них, сказать, что „зерен тут два“,—потому, что я их *сосчитал* в один миг. Но возьмите не два зерна, а 23, положим,—и тогда на вопрос, сколько тут зерен, может быть дан только один ответ: „позвольте, я их посчитаю“. Мало того, даже когда перед нами 2—3 предмета, но когда *условия их восприятия и пересчета затруднены*, число их можно установить только отчетливо производимым действительным пересчетом. Представьте себе, что вы темной ночью в незнакомом вам парке хотите сосчитать отдельную группу деревьев,—напр., елей, ветви которых переплелись друг с другом. Как вы это сделаете? Вы станете проверять неясно вами воспринимаемые контуры стволов ощупыванием их (и вообще нижних частей этих елей)... „Вот одна ель... вот вторая... Всего тут две“. Т. е., вы выполните *акт пересчета*. Кажущаяся доказательность недостаточно прoанализированного „воображаемого примера“, условия которого взяты произвольно (четкая раздельность об'ектов), рушится от небольшого изменения этих воображаемых условий.

Итак, несомненно, что число возникает не из пассивных чувственных восприятий, а из активных операций мысли.

Аналогичное надо сказать и про другие группы математических понятий. Так, геометрические фигуры (даже самые простые) суть не просто восприятия [1]), как таковые, а продукты активной умственной работы.

В природе мы имеем *тела*, и притом всегда не совсем правильной, не строго геометрической формы. Чтобы получить, напр., математический (плоский) треугольник, мы должны 1) совершенно отвлечься от 3-го измерения, от плотности, цвета, тяжести и других физических свойств тел, 2) представить себе этот треугольник ограниченным строго прямыми линиями, 3) отвлечься от телесных свойств этих линий (которые на чертеже, напр., всегда представляют собой тела 3 измерений) и т. д.

Если активные операции мышления так очевидны уже в простейших образованиях эвклидовой геометрии, то они еще в гораздо большей степени имеют место в неэвклидовых геометриях, большинство элементов и образований которых даже вовсе (или почти) не допускают наглядного представления.

27. Может явиться вопрос: в каком отношении стоят счетные операции нашей мысли к *природе, как таковой?* Раз число есть продукт пересчитывания, то в каком смысле оно приложимо к природе самой по себе, помимо этой нашей операции?

Мы убеждены, что все в природе доступно пересчитыванию, все может быть (отвлеченно говоря) сосчитано: и звезды, и движения электронов в атоме... Мы не видим никакой причины, из-за которой

---

[1]) Это признает в сущности и Д. С. Милль. „В природе... нет вещей, вполне точно соответствующих определениям геометрии...“ (Система логики, 178). Заключения геометрии необходимы только в том смысле, это „они с точностью вытекают из тех предположений, из которых они выводятся. А эти предположения не только не необходимы, но даже не истинны: они преднамеренно более или менее уклоняются от истины... Эти заключения необходимо следуют из того или другого положения, которое, по условиям исследования, не подлежит вопросу“ (179).

В сущности, Милль, говоря о „гипотетичности“ положений математики, о „преднамеренном уклонении от истины“ ее основных предположений и т. п., имеет в виду как раз то, о чем говорили мы, как о „конструктивном“ характере этой науки. Только Милль не разрабатывает этой темы и подходит к ней со стороны своих эмпиристических предпосылок.

нельзя было-бы приложить к любой совокупности числовую схему. Однако, *пока* такой пересчет реально *не произведен*, в природе существует для нас лишь некоторая *неопределенная множественность*. Уже в простейших умственных актах мы замечаем такую множественность; напр., одним актом зрительного восприятия мы можем воспринять поверхность, отдельные участки которой окрашены в *разные* цвета. Но эта множественность цветов окраски выразится числом только после того, как она станет „хорошо упорядоченной", т. е. точно будет нами определена при помощи пересчета.

Далее, надо иметь в виду, что при измерении любого предмета или группы предметов, любого процесса, линии, площади, об'ема и т. д. результат может быть выражен *любым числом*.

В измерении все зависит от величины той единицы, какою мы измеряем. Об'ем этой комнаты мы можем выразить в кубических саженях, аршинах, вершках, футах, дюймах, метрах, дециметрах, сантиметрах, миллиметрах, верстах, а также в „третях кубич. аршина", в „семнадцатых долях кубич. метра", в 0,00179-х долях кубич. сажени и т. д. *до бесконечности*.

Поэтому *число в природе*, как *точно определенная*, однозначная множественность, *не существует*. И даже когда предметы сами подсказывают нам вполне определенные, казалось-бы, единицы для их пересчета (напр., яблоки, булки хлеба),—и тогда мы можем считать *парами* (или половинками, третями, десятыми долями и т. д.), причем получим для одного и того же множества каждый раз совершенно иные числа. И фактически мы часто так именно и поступаем: раздавая хлеб, мы делим 5 хлебов на доли по $^1/_4$ хлеба в каждой и узнаем, что в 5 хлебах таких долей будет 20, и т. п.

Числа в отношении к реальности—*условны* и зависят от той единицы, какую мы для измерения этой реальности принимаем в каждом отдельном случае. А выбор этот случаен, или, точнее говоря, он определяется не самой данной реальностью, как таковой, а теми или иными нашими задачами, жизненными потребностями и т. д., т. е. чем-то, привходящим к данной реальности извне.

28. Теперь я коснусь нескольких деталей процесса образования системы натуральных чисел и их отличительных признаков.

Прежде всего, в числе все единицы его должны быть *тождественны* одна с другой, вполне равны и равноценны одна другой,—именно как *единицы* числа.

Отсюда вытекает одно важное условие всякой операции пересчета группы об'ектов: об'екты эти должны быть взяты как (генерически) тождественные,—только тогда их можно будет пересчитать. Так, один баран и еще один баран составят, конечно, *двух баранов*; но один баран и одна корова не составят ни двух баранов, ни двух коров, а *двух домашних животных*; один баран и одна редька составят, положим, *два продукта сельского хозяйства*; один баран и одно психическое настроение, будучи сосчитаны, дадут *две вещи*, *два восприятия*, *два слова*, *или названия* и т. д. Об'екты для того, чтобы их можно было считать, должны быть взяты *как одинаковые*: должны быть исключены все специфические признаки каждого из них,—должно быть оставлено только то, в чем они сходны, генерически тождественны.

Это очищение считаемых об'ектов от специфических признаков каждого из них дается далеко не сразу. Первобытное и детское мышление, при их установке на конкретное, иногда склонны сами числовые номера об'ектов считать какими-то присущими каждому из них, специфическими их качествами. Одну девочку 4 лет учили (порядко-

вому) счету на акте пересчета ящиков буфета. Когда ее попросили повторить пересчет, она сказала: „вот этот ящик первый; а который второй, я забыла...“

29. Большое значение имеет различие между числами *отвлеченными и именованными.*

Первобытное мышление, насквозь конкретное, знало только именованные числа, или, пожалуй, точнее: только нечто недифференцированное, нерасчлененное и смутное, в чем совмещались элементы как именованных, так и отвлеченных чисел. Все группы предметов какого-либо одного рода (напр., положим, предметов длинных или деревьев, людей) считались *одними и теми же* именами числительными,—и тут, следовательно, числительные имели характер имен отвлеченных. Но разные роды предметов считались *различными* сериями имен числительных; тут, значит, на первом плане стояла конкретная, качественная определенность предметов, т. е. то, что характеризует числа именованные. Во всяком случае, характер „именованности“ решительно преобладал на заре математической мысли.

Однако, с течением времени на первый план выдвигается „отвлеченный“ момент числа. Он ясен уже при образовании хотя бы даже самой минимальной системы чисел; уже те дикари, которые знают только два настоящих числа: „один“ и „два“, понимают под своими *netat* и *neis* не ту или иную конкретную единицу и двойку, а „один вообще“, единицу чего угодно, и „два вообще“. Нечего и говорить о развитых системах чисел: преодолев первые трудности отвлечения, начав систематически строить ряд чисел, человечество уже, конечно, строит их вне зависимости от конкретного материала—не в именованной форме, а в чисто отвлеченной. „Миллион сто семнадцать тысяч пятьсот сорок три“ есть, конечно, уже не число яблок или камней или песчинок, а просто и вообще „столько-то“—число, большее на единицу своего предыдущего и меньше на единицу своего последующего. А числа Архимедова „Псаммита“ не могут даже и отдаленно быть конкретно сосчитаны: это чистые продукты отвлеченного, систематического построения. И в настоящее время в математике, как *науке*, отвлеченный момент играет, конечно, доминирующую роль.

30. Укажу еще одно условие счета совокупностей реальных об'ектов (все равно физических или умственных): пересчет возможен только в отношении, так сказать, законченных в своем составе групп. Если производится, напр., перепись населения или количества скота в целой стране, то результат пересчета может быть только „приблизительный“,—строго говоря, полученное число не будет выражать действительного количества особей группы.

Уже в течение процесса пересчета группы состав ее изменился: некоторые особи умерли, другие родились, и общее число стало уже не то.

Условие это проф. *А. В. Васильев* (Из истории и философии понятия о целом положительном числе, Казань. 1891 г., стр. 19—20) формулирует так: считаемые предметы „не должны пропадать, не должны сливаться друг с другом, не могут делиться на два или более во время пересчитывания; к ним не могут прибавляться во время этой операции новые предметы“.

31. Числа и их названия (имена числительные) могут быть *количественными и порядковыми.* Числительные количественные обозначают число единиц в группе, порядковые-же—номер каждой отдельной входящей в группу единицы, ее место в общем составе группы при данном акте ее пересчета.

В сущности говоря, это различие числительных количественных и порядковых зависит от того, на что мы направляем внимание при пересчете. В каждый момент процесса пересчитывания мы имеем, во-первых, группу, составленную рядом уже произведенных нами актов синтеза единиц, и во-вторых, новую единицу, которую мы в данный момент прибавляем к ранее составившейся группе.

Если мы будем говорить об этой последней, уже имеющейся у нас группе, мы выскажем количественное числительное, которое выразить ее состав из единиц (5,8); если же мы сосредоточим внимание на вновь присчитываемой в данное мгновение единице, у нас будет порядковый номер этой единицы, порядковое числительное.

Поднимался вопрос: который из этих типов имен числительных соответствует более основной, более первичной операции считающей мысли? Мы полагаем, что это дело условное и зависит в каждом *реальном* случае пересчета, как сказано, от направления внимания считающего. Можно сказать только одно: если отрешиться от реальных условий действительного выполнения пересчета и взять процесс *в его отвлеченной, логической типичности*, то первичными надо будет признать, как кажется, числительные *порядковые*. Действительно, если мы имеем группу из 4 об'ектов и присоединем к ней еще одну единицу, один об'ект, то количественное числительное (5) мы получим *именно в силу того, что мы прибавляем к 4-м следующую за 4-мя, т. е. 5-ю, единицу*. Мы мыслим приблизительно так: „у нас есть группа из 4 единиц; следующий номер, а значит, и следующий по порядку об'ект будет 5-й; присоединяя его к имеющейся группе 4-х, получаем новую группу 5". Установление следующего порядкового номера есть, повидимому, операция более простая и более основная, чем синтезирование новой группы. Идея последовательного синтеза единиц входит в само существо понятия о числе, как результате акта пересчета; именно такой последовательный синтез создает затем группы, т. е. числительные количественные [1]).

32. Итак, в образовании математических понятий работа воображения и мышления играет огромную роль; и „чистая" математика состоит из систем дедуктивных выводов из этих построяемых умом основных элементов.

Отсюда становится понятной и та особенность „чистой" математики, что в ней, в сущности, *все содержание дано* уже в известном смысле с того самого момента, как образованы исходные понятия. Конечно, все возможные выводы из этих понятий надо еще сделать; отношения между ними надо найти, „усмотреть". Это работа в высшей степено трудная, часто требующая величайшего напряжения гениальных умов.

Но как ни трудны *фактически* эти процессы *интуиции* и *дедукции*, результаты их с *логической* точки зрения уже предзаложены в основных допущениях и построениях.

Необходимо самым тщательным образом уяснить себе этот *конструктивно-систематический* характер чистой математики, делающий ее внутреннюю структуру совершенно отличной от (типического) естествознания.

О „реальной" и „прикладной" математике краткие сведения будут даны несколько ниже.

Дополнительные замечания.

1. Историки и методологи математики нередко определяют развитие математической науки так, что в XVII и XVIII веках мыслители *создавали* математические построения, не особенно заботясь о их критическом обосновании, а в XIX в. начали их *обосновывать*. Мне кажется, что процесс этот становится яснее, если привести это совершенно справедливое замечание в связь с образованием в XIX в. „воображаемых" математических наук и начать с XIX в. новый период математического знания, отмеченный полной реформой методологии чистой математики, как это сделано в настоящей статье.

2. У нас нередко, и очень решительно, высказываются по научным вопросам лица, не достаточно сведущие в том, о чем им приходится трактовать. В качестве примера укажу на статью *В. Егоршина* „Естествознание и классовая борьба" („Под знаменем марксизма", 1926 г., № 6), в которой автор ставит математикам (и, в частности, проф. I Москов. Гос. унив. *Н. Н. Лузину*) *в упрек то, что составляет сущность современного научного понимания чистой математики*.

---

[1]) Деление чисел на количественные и порядковые проводится иногда математиками еще в другом значении. Так, *Г. Кантор* определяет „количественное" число так: „Если в некотором данном множестве М, которое состоит из определенных, резко отличающихся друг от друга конкретных вещей или отвлеченных понятий (называемых элементами множества) и которое мыслится как некоторая вещь для себя, мы отвлечемся как от состава элементов, так и от порядка их следования друг за другом, то в нас возникнет определенное общее понятие..., которое я называю *мощностью* М, или *количественным числом*, присущим множеству М.". Кантор для обозначения его вводит условной знак – две горизонтальных черточки над буквой М ($\bar{\bar{M}}$). Эти две черточки обоз-

Вообще в статье В. Егоршина есть целый ряд недоразумений, о которых здесь впрочем, не место говорить.

3. У нас есть очень солидные и полезные работы по вопросу об основаниях геометрии. Такова работа проф. *В. Ф. Кагана* „Основания геометрии", 2 тома; серия работ проф. *С. А. Богомолова:* „Современные воззрения на аксиомы и метод геометрии", Спб., 1907; „Вопросы обоснования геометрии", ч. I, 1913; „Основания геометрии", 1923; наконец известная переводная „Энциклопедия элементарной математики" *Вебера* и *Вельштейна*, переведенная под ред. и с примеч. *В. Ф. Кагана* (том II посвящен геометрии, тригонометрии, аналитической геометрии и стереометрии; Одесса, 1909—10).

Популярный общий обзор истории математики, кончая XVII веком, дает в I томе „Элементов высшей математики" *Г. Лоренца* переводчик этой книги *В. П. Шереметевский* (4 изд. М. 1919). Так, глава IX второго отдела дает понятие об „аналитической геометрии" Декарта, а гл. X того же отдела содержит „очерк развития анализа бесконечно малых в XVII веке".

Более подробные указания литературы по методологии и истории наук математических я дам в конце этого отдела, посвященного математике.

4. *Г. Кантор* предлагает вместо термина „*чистая* математика"—„*свободная* математика". „Современная точка зрения на геометрию... резко отличается от прежней, когда под геометрией понимали науку, изучающую свойства реального пространства... По меткому замечанию *Пиери*, геометрия стала „гипотетически-дедуктивной системой". По прекрасному выражению *Г. Кантора*, „сущность математики заключается именно в ее свободе; творец учения о бесконечности предлагает вместо обычного предиката „чистая" говорить „свободная математика". (Проф. *С. А. Богомолов*. Вопросы обоснования геометрии ч. I. стр. 76-77).

5. Греки переняли от египтян „землемерие"—практическую технику („геометрия" и значит „землемерие") и превратили ее в *аксиоматически-дедуктивную науку об эвклидовом пространстве.* В XIX и XX веках наука об эвклидовом пространстве расширилась в *учение о различных (отвлеченно мыслимых) типах пространств* и, далее, в еще более общее учение *об известных типах многообразий вообще.* Так геометрия шла от техники к теории действительности, а от теории действительности к „чистой" теории возможных построений. Вместе с этим росла глубина, мощь и широта научного понимания.

Рукопись настоящей статьи любезно согласился прослушать уважаемый *Вл. Кондр. Дыдырко*, мой товарищ по профессуре в Белорусском Госуд. университете. Приношу ему за это мою глубокую благодарность.

(Продолжение следует).

начают, что „над M совершен *двойной* акт абстракции: в отношении состава элементов и в отношении их взаимного порядка". – Если же „произведен только первый род абстракции и элементы сохраняют и в понятии тот же взаимный порядок, с каким они мыслятся in concreto в M, получится *порядковый тип* M" (в других местах Кантор употребляет прямо термин: „порядковое число"). *Г. Кантор.* К учению о трансфинитном, пер. П. Юшкевича, в „Новых идеях в математике, сборник № 6. СПБ, 1914, стр. 134 и след.

А. Гайворовский.

Биологические и социальные основы современной психологии.

Как и что изучать в личности человека?

Ответить на этот вопрос, значит сделать попытку разрешить спор, который сейчас идет вокруг вопроса о том, какая научная дисциплина должна изучать личность, какими методами и с какими предпосылками и целями. В этой борьбе различных направлений к настоящему моменту особенно четко выделяются следующие научные течения.

1. Экспериментально-психологическое
   типа Вундта, Штумпфа, Штерна, Нечаева и др.
2. Философски-феноменологическое
   типа Франка, Дильтея, Липпса, Бергсона и др.
3. Реактологическое
   типа Корнилова, Басова, Выгодского и др.
4. Бихэвиористическое (поведенческое)
   типа Уатсона, Вагнера и др.
5. Рефлексологическое
   типа Павлова и Бехтерова.

Среди перечисленных нами научных течений, претендующих на наиболее глубокую и внутренне обоснованную позицию, выбранную ими в вопросе об об'екте и методах изучения личности, не все направления занимают резко обособленную от других направлений позицию.

И если диаметрально противоположными направлениями и оказываются философско-феноменологическое, с одной стороны и рефлексологическое направление, с другой, то этого еще далеко нельзя сказать об остальных трех направлениях, занимающих более срединное положение и стремящихся в различных сочетаниях синтезировать, феноменологическую и физиологическую точку зрения в деле изучения личности. Причем, у этих научных направлеиий, в добавление к интенционально-феноменологической и физиологической точкам зрения, выставляемым обоими вышеназванными направлениями, имеется довольно четкое подчеркивание социологической и широко биологической позиции.

Существующие плоскости научного исследования личности.

Таким образом, указанные пять направлений пользуются в различных сочетаниях следующими пятью плоскостями научного исследования, а именно:

1. Феноменологической, в которой все содержание личности рассматривается, как своеобразная закономерная смена одних явлений сознания другими явлениями.

2. Интенциональной, в которой все содержание переживаний личности расшифровывается как особые системы смыслов и значений, для которых сама феноменология является, так сказать, лишь символикой, одевающей значение и смысл во всю конкретную многоцветность переживаний личности.

3. Социологической, в которой все переживания и все поведение личности рассматривается, как нечто производное от определенных влияний социальной среды, эпохи, и классовых и национальных противоречий, заключенных в ней.

4. Биологической, в которой все переживания и все поведение рассматривается, как органическое явление творческого приспособления к изменяющимся условиям среды, идущее по пути раскрытия всех заложенных в ней тенденций и задатков и отражающее собою всю сложность борьбы за существование, рост и размножение что и характеризует собою все общежизненные процессы и явления органического мира.

5. Физиологической, в которой все поведение и все проявления личности понимаются, как результаты происходящих внутри ее физиологических процессов, сводящихся к системе физико-химических отправлений. механизмов нервной системы и деятельности желез внутренней секреции, а также и всех остальных вегетативных и моторных установок и систем нашего организма.

Об‘екты исследований.

Но если указанные направления пытаются вести свои исследования в руслах указанных областей в различных их сочетаниях, то, спрашивается, что ставят перед собою в качестве об‘екта своего изучения вышеуказанные научные направления.

Казалось бы, что все они должны были бы ставить об‘ектом своего изучения личность во всем многообразии ее проявлений и состояний.

Посмотрим, каково фактическое их положение по отношению к наличию у них тех или иных об‘ектов их исследований.

Если мы возьмем для начала философско-феноменологическое направление и присмотримся к тому, что ставит оно об‘ектом своего исследования, то увидим, что об‘ектом изучения для него явится обычно или индивидуальность или, иначе, чистая качественность и целостность явлений сознания, рассматриваемых и анализируемых без всякой связи со всей количественно-качественной многообразностью среды, ее окружающей. Таким образом, здесь обычно качественная своеобразность феноменов сознания почти отождествляется с самой личностью и организму, как носителю и выявителю всех этих качественностей сознания, внимания почти не уделяется Но „стихия сознания“, „ядро внутренней жизни“, „предметное сознание“ и „творческое самосознание“, равно как и чистая качественность сознания и его интенциональность—все это, хотя суб‘ективно и составляет, может быть, значительную часть личности, но об‘ективно оно на такое значение претендовать, конечно, не может. Все это является, хотя и весьма биологически ценной и жизненно полезной системой интенциональных процессов организма, родственной процессам дыхания и кровообращения (в их биологическом аспекте сохранения устойчиво-подвижного равновесия между проявлениями организма и окружающей средой), но все же „сознание“ не есть“, „личность“, как об‘ект научного исследования, ибо „личность“ не только „сознание“, но организм, стоящий на определенной ступени органического развития и на-

ходящейся в определенной социальной среде, со всем тем богатством и многообразием влияний и взаимообусловленностей, которое из этих моментов проистекает.

Итак интенционально-феноменологическая точка зрения не охватывает всю личность. Она охватывает только ее сознание, а отсюда это феноменологическая точка зрения ведет к отрыву от фактической, органической и социальной действительности и грозит превратиться в форму спиритуализма или солипсизма.

Если же мы обратимся к направлению рефлексологическому, то здесь картина будет резко противоположной. Здесь будут изучаться „элементы механизмов нервной системы", здесь вы встретите „рефлекс" безусловный и условный, найдете изучение явлений торможения и иррадиации. Здесь вы найдете изучение самых различных рефлексов, связанных с явлениями отправления и элементарного поведения организмов, но напрасно вы стали бы искать здесь изучения всего конкретного своеобразия личности, его здесь нет и не может быть.

На самом деле там, где изучаются нервно-физиологические механизмы отправлений и элементарных проявлений организма, там не возможен даже сам вопрос о личности, как таковой, потому что личность это—сознающее себя социально-органическое единство, а изучать целостность и всю конкретную своеобразность самосознающего организма рефлексология не в состоянии. Ее методика не допускает психологических, интенциональных и феноменологических категорий и терминов, равно как и социологических, а потому она так же, как и интенциональная феноменология, способна изучать лишь одну часть проявлений личности, а именно механику физиологической деятельности нервной системы организма, не будучи в состоянии охватить своей методикой психологической деятельности нервной системы, не говоря уже об анализе интенционально-биологических и интенционально социологических процессов и состояний сознания.

Таким образом рефлексология, являясь весьма ценной научной областью, имеющей своей целью изучение механики физиологических явлений нервной системы, а следовательно, и механики некоторых отправлений и физиологических проявлений организма, не может в то же время претендовать на звание науки о личности (понимаемой нами, как сознающее себя социально-биологическое единство) и о проявлениях этой личности.

Говоря о позиции, которую занимает современная экспериментальная психология в интересующем нас вопросе об изучении личности, необходимо отметить, что об'ектом экспериментальной психологии всегда были, в основном, процессы и функции сознания и нервной деятельности личности, которые понимались, как биологически целесообразные процессы, способствующие самосохранению, росту и размножению организмов. При этом в самих методах была допущена самая широкая возможность об'ективных исследований, когда на основании решения испытуемым тех или иных заданий (тестов) делались определенные, основанные на об'ективно фиксированных результатах, выводы о высоте развития той или иной функции или о скорости протекания того или иного процесса. При этом следует не забывать, что одной из основных предпосылок экспериментальной психологии всегда была мысль о том, что все проявления нашего сознания причинно зависят от целого ряда внешних раздражителей и что, изменяя и усиливая их, мы можем изменять, усиливать и ослаблять и само течение наших переживаний. При этом несомненной и громадной заслугой экспериментальной психологии, несомненно, служило то, что она

помогла нам реально почувствовать и понять все то многообразие индивидуальных отличий, которое имеется в жизни и внутреннем мирке различных людей. Но все же и экспериментальная психология в том виде, в каком она существовала, вряд ли могла претендовать на название науки о личности, для этого она недостаточно учитывала влияния социальной среды и все же уделяла недостаточно внимания вопросу о биологических проявлениях личности. Она изучала человека в лаборатории. она вырывала живую и конкретно-своеобразную личность из ее обычной обстановки, ее эксперименты носили характер искусственной изоляции тех или иных проявлений личности. В этом ее плюсы в отношении точности, но в этом же и ее отрыв от живой личности.

И вот на смену ей появляются сразу два направления. Одно, понимающее науку о личности, как реактологию, т е. науку о реакциях, так как в них, по существу, только и может проявляться личность (направление чрезвычайно интересно разработанное пр. Корниловым). При чем реактологи, подходя к личности диалектически, не отрицают ценности для этого изучения самого сознания личности и его функций, считая с другой стороны необходимым в основу проявлений личности положить механику нервного вещества, реакции организма на различные раздражения). А также очень близкое к реактологическому направлению, хотя, может быть, и не сливающееся с ним вполне, понимание психологии, как науки о поведении человека. Эти направления, несомненно, интересные по своему замыслу и по тем положениям, которыми они стараются укрепить основные и принципиальные свои позиции, тем не менее иногда грешат некоторой эклектичностью и механичностью соединения в своем фактическом содержании самых разнообразных методов и направлений, часто внутренне противоположных, а иногда и противоречащих друг другу. Это касается, главным образом, некоторых американских психологов типа Уатсона, у которых можно сплошь и рядом встретить смешение реактологической и бихэвиористической точки зрения с рефлексологической и психологической без достаточного анализа самого их принципиально-методологического отношения.

И если даже понимание поведения, как об‘екта психологии и есть, несомненно, большой шаг вперед в деле установления более верной позиции в отношении изучения личности и ее проявлений, то все же надо признаться, что в этой области еще нет достаточно четкого и ясного разграничения целого ряда моментов в изучении личности. Кроме того, здесь при правильном, в общем, подходе все же нехватает методологической разграниченности самого об‘екта изучения, нет дифференциации, которая позволила бы подходить к личности и ее изучению с приведенных в стройную диалектическую систему различных плоскостей возможного ее исследования.

Таким образом, перед нами по существу имеются следующие об‘екты изучения.

1. У философско-феноменологического направления об‘ектом изучения является:

а) Широкое изучение биологической символики сознания (биологических смыслов, скрывающихся за символами качественно-своеобразных переживаний личности).

б) Обще-философские проблемы, выявление самого понятия сознания и его отношения к времени, пространству, движению, бытию и другим координальным проблемам философии.

2. У физиологического направления (сюда входит и рефлексология) об‘ектом изучения является:

а) Вся бесконечно сложная механика нервной системы, со всем многообразием ее безусловных и условных рефлексов, автоматических и импульсивных движений и направлений.

б) Вся сложная деятельность желез внутренней секреции, как такой вид физиологических отправлений организма, который способен чрезвычайно многообразно влиять на характер, отправления и проявления личности.

3. У экспериментально-психологического направления об'ектом изучения является:

а) процессы сознания в их детерминированной связи с явлениями внешнего мира и внутренними имманентными закономерностями.

б) Проблемы функционального и структурного анализа индивидуальных отличий сознаний различных людей.

4. У реактологического и поведенческого направления об'ектом изучения является:

а) Двухсторонние реакции организма, одной стороной которых является физиологический акт нервной системы большей или меньшей сложности, а другой—суб ективное отражение его в сознании.

б) У поведенческого направления к изучению реакции присоединяются еще вопросы обще-биологического характера об эволюции той или иной системы реакций, об инстинктах, их генезисе и т. п.

Как мы видим из этого перечня фактически создавшихся об'ектов изучения у данных направлений все они не исключают, а, наоборот, лишь наиболее многогранно дополняют друг друга. Поэтому наше глубокое убеждение в том, что все эти направления могут войти отдельными главами (отделами) в общую науку о личности (которую по моему лучше всего было бы назвать индивидуалогией. Необходимо лишь так внутренне дифференцировать эту науку о личности и ее социальных и биологических проявлениях и переживаниях, чтобы между всеми этими отделами имелась гармоническая и последовательная связь, и чтобы в науке о личности сконцентрировались самые многообразные области изучения начиная с естественно-научных дисциплин и кончая дисциплинами социологическими и философскими.

Далее мы постараемся наметить, как такая диалектическая система может быть осуществлена.

На самом деле, может быть в основу изучения личности и ее проявлений следует положить принцип не бессистемной борьбы одних направлений с другими, не принцип соперничества различных научных течений, а принцип их глубокого и дружного сотрудничества, позволяющий использовать со всей максимальной возможностью достижения одного направления для уточнения и расширения и углубления сотрудничающих с ними направлений.

Не пора ли пересмотреть самые основы каждого из указанных научных направлений для того, чтобы попытаться создать стройную систему плоскостей научного исследования личности, в которых могли бы разместиться все указанные течения, без всякого умаления их научного достоинства

Итак, если мы возьмем за основу своего изучения личность и ее социальные и биологические проявления, то на ряд каких основных задач или плоскостей исследования может быть разложена эта конкретно сложная проблема.

Основные задачи, стоящие перед наукой о личности.

С нашей точки зрения, изучение личности и ее проявлений включает в себя следующий ряд основных задач или плоскостей научного исследования:

I. *Учение о конституции и ее типах в их биологическом и социальном значении (социально-биологическая типология)*

Эта задача ставится нами первой, так как и физиологические, и психологические. и анатомические, и биологические проявления организма и личности зависят, в первую очередь, от особенностей самого типа ее структуры, обуславливающий собою все ее отдельные и частичные особенности и отправления.

II. *Учение о внешних факторах и условиях проявлений личности (биологическая и социологическая факторология)*

Если организм, как целое, обуславливает всем своеобразием типа своей органической структуры почти каждую свою деталь и особенность своих отправлений, то свое поведение он строит, в первую очередь, в зависимости от того, как на него влияют различные условия и факторы окружающей его среды. Социальная и биологическая среда и ее влияния на индивидуальные реакции личности—вот вторая задача, стоящая на пути у тех, кто хотел бы изучить проявления личности. На самом деле мы, слишком часто оперируем понятием среды и понятием ее влияния на личность, но мы все же еще очень слабо представляем себе методику изучения факторов среды. Здесь перед нами могло бы встать не мало очень интересных вопросов и, в первую очередь, вопросы о факторах однозначно, альтернативно и многозначно определяющих собою поведение личности, о факторах совершенно и лишь частично детерминирующих поведение ее, о факторах, обуславливающих, и, главным образом, инстинктивный или интеллектуальный механизм личности. Здесь перед нами, без сомнения, важнейший отдел науки о человеческом поведении, так как до сих пор еще совершенно не было экспериментальной разработки вопроса о влиянии определенных факторов на поведение личности. А как же можем мы научно изучать поведение личности, когда точно не знаем что следует отнести за счет детерминированности (предопределенности) внешними факторами и что за счет ее внутренних потенций и ее прежнего опыта. Поэтому то мы и ставили эту задачу второй задачей или плоскость научного исследования личности и ее проявлений. В эту плоскость входит и изучение и учет амплитуд колебания количественно и качественно возможных многообразных реакций организмов различных типов и конституций на действия того или другого фактора или комплекса факторов (стимулов). Сюда же будет включен и учет различных форм поведения в их обусловленности комплексо-влияниями различных систем факторов, равно как и вопрос об упражняемости и ее законов в отношении преодоления личностью различных встречающихся ей на пути факторов и их систем. Сюда же должны быть отнесены и вопросы об однолинейности и альтернативности в самой направленности комплекса факторов, равно как и их многолинейности (разно-направленности) по отношению к их действиям на проявления личности. Помимо этого, проблема классификации факторов, обуславливающих поведение личности в той или иной мере, по их прерывистому или постоянному, равномерному или нарастающему действию, по их количественности и качественности, вот тот сложный ряд проблем, который включает в себя эта плоскость научного изучения личности и ее социальных и биологических проявлений.

Изучение среды—задача очень сложная, настолько сложная, что к ней по существу, ученые еще и не приступали, а те общие схемы изучения среды, какие, например, давал Моложавый, в значительной мере не

выдерживают критики по одному тому, что они не пролагают пути ни к достаточно углубленному и экспериментальному изучению среды, ни к достаточно систематизированному статистическому анализу ее. Этим же страдает и бихэвиористическое (поведенческое) и рефлексологическое Бехтеревское направление в психологии. Очень часто говорится много красивых и эффектных фраз о влиянии среды, но попыток к экспериментальному изучению среды в психологии по существу еще не было. При чем под наукой о факторах, обуславливающих и влияющих на все многообразие форм человеческого поведения, следует понимать не только узкую задачу изучения обстановки, окружающей личность человека, но и самую психологию среды. Психология же среды есть научная область, включающая в себя изучение: 1) различных типов среды, 2) доминант имеющихся в различных сложных комплексо-факторах и окрашивающих собою все остальные моменты комплекса, 3) законов нарастания влияния различных прерывистых и постоянных. сильных и слабых, периодических и случайных факторов, 4) законов сложения и вычитания однозначных, альтернативных и многозначных факторов и их комплексов в их действии на личность, 5) законов степеней детерминирования различными комплексами факторов различных форм поведения, 6) амплитуд колебания возможных реакций различных людей на действия того или иного фактора или комплекса факторов, 7) классификация факторов и целый ряд других проблем.

III. Следующей задачей науки о личности, помимо двух выше разобранных задач, является учение о внутренних факторах (задатках, потенциях и тенденциях) заложенных, наследственно и типоорганически, в структуре личности и обуславливающих ее темперамент и, главным образом, ее внутренний рост и ее общее развитие и общую направленность и целеустремленность этого развития. В эту задачу войдут все вопросы, касающиеся наследственной передачи тех или иных задатков, предрасположений и особенностей. Здесь мы встретимся также и с вопросами общей и специальной одаренности личности. Талантливость и гениальность, вот две особенно интересные и глубокие проблемы из данной плоскости изучения личности и ее проявлений. Изучение того, какие задатки и в какой мере могут передаваться по наследству и каковы сами методы определения различных потенций и задатков— вот что является методологически наиболее актуальными проблемами из данной области И здесь провозглашенный В. Штерном принцип „конвергенции" внешних воздействий с внутренними потенциями и задатками в сложном органическом процессе развития личности, как нельзя лучше раскрывает перед нами всю актуальную значимость изучения индивидуальных предрасположений и задатков личности. Мы их понимаем, как особые внутренние факторы бытийственно (эйдетически) обуславливающие собою развитие и поведение личности, наряду с факторами среды. Здесь, вероятно, также необходимо будет создать классификацию задатков, определить степени зависимости их развития от помогающих и задерживающих факторов среды. Выявить зависимость между первичными проявлениями того или иного задатка и различными возрастными группами развивающихся личностей. Сюда же войдут и все проблемы, касающиеся эволюции личности. Интересны здесь и индивидуальные вариации в развитии определенного задатка у различных людей. Комплексы задатков. симбиозы и антогонизм, которые могут проявляться в их развитии, все это очень интересные проблемы, которые стоят перед данной плоскостью всестороннего изучения личности и ее проявлений.

IV-й задачей, стоящей перед наукой о личности, является *синтетически-структурное* (в духе К. Коффки) *и аналитически-функциональное* (в духе Лазурского и отчасти Малапера и Кречмера) *учение о характере*.

Под характером мы понимаем нервно-психический тип проявлений (поведения) личности. При чем, этот тип проявлений (поведения и переживаний), иначе характер личности, является по нашему глубокому убеждению величиной, далеко не адекватной понятию психической конституции человека, что отчасти защищает проф. Позднышев в своей криминальной психологии типов, и с чем мы не можем согласиться. Характер или тип социальных и биологических проявлений личности динамичнее, чем понятие конституции, кроме того конституция захватывает и обуславливает, главным образом, область всего многообразия физиологических отправлений личности и часто хотя и не всегда слабо сказывается на том, что мы называем поведением личности. Далее конституция понимаемая, как биологический тип организма, является в значительной мере продуктом наследственной передачи структурных и физиологически-функциональных особенностей. Она частично обусловлена и теми моментами и особенностями эволюции организма, которые, в их синтетическом выражении, известны под именем биогенетического закона Геккеля (достаточно вспомнить попытку Мате разделить все конституции на „форму будущего" и „молодую форму"). Помимо этого, являясь понятием только биологическим, конституция не имеет непосредственного соприкосновения со всем многообразием социальных проявлений личности и, вообще, со всем многообразием социальной стороны жизни человечества.

Итак, характер, несомненно, есть величина и качественно и количественно динамичная, способная к образованию стойких и подвижно-изменяющихся особенностей и новых черт под влиянием самых разнообразных влияний. Характер, или тип проявлений личности, есть в полном смысле сложнейший продукт конвергенции внешних и внутренних стимулов и задатков ее индивидуального развития. Характер личности обусловлен сложившимся (и сравнительно стойким) отношением между внешними (социальными и биологическими) факторами и условиями окружающей ее среды и ее конституцией с теми внутренне-функциональными потенциями, которые скрыты в ней.

Таким образом, характер есть чрезвычайно сложная система социально-биологической жизнестойкости личности, способная к изменениям под влиянием окружающих ее условий („у него выправился характер", „у него испортился характер" и др. выражения, употребляющиеся в общежитии, уже давно подметили это). Поэтому, например, проблема классификации характеров до тех пор не будет разрешена, пока она не будет поставлена в отчетливую связь с той средой и ее социальными и биологическими особенностями, в которую мы должны предварительно поместить людей для того, чтобы сама однородность окружающей их социально-биологической среды могла бы нам дать саму принципиально-методологичскую возможность для такой классификации. Благодушный от'евшийся кулак и вечно хмурый загнанный батрак не могут сравниваться в отношении характеров, равно, как человек с высшим образованием, по существу, не должен был бы быть сравниваем с неграмотным крестьянином или ответственный работник центра - с опустившимся безработным малоквалифицированной категории.

Сравнение характеров двух или нескольких людей почти невозможно, если не поставить этих людей в сравнительно однородное социальное положение, в сравнительно однородную среду, а следова-

тельно и в сравнительно одинаковые условия. Понимая так характер и его социально-биологическое значение, мы избегаем в значительной мере тех методологических тупиков, в которые иногда попадает учение о характере Кречмера, который понимает под характером „сумму возможных реакций человека, в смысле проявления воли и аффекта, которые образовались в течение всей его жизни". И прав поэтому Б. Фридман, который, критикуя учение о характере Кречмера, говорит,—если с биологической точки зрения, по Кречмеру, характер есть лишь сумма психических аппаратов (психическая рефлекторная дуга-реакции), тогда остается невыясненным, как представить себе роль экзогенного фактора в характере, чуждого понятию конституции. Остается также невыясненным, как и в каком соотношении находятся между собой—эндогенные и экзогенные факторы.

Таким образом, наше понимание характера имеет ту особенность, что мы рассматриваем его, как индивидуально-своеобразный тип проявлений личности, своего рода сложную систему стойко подвижного взаимодействия личности с окружающими ее условиями жизни. Эта система (тип) жизнепроявлений обусловлена конституцией, задатками и влияниями окружающей среды. Он то и ставится нами в качестве четвертой задачи, стоящей перед наукой о личности. В этой задаче получили свое синтетико-аналитическое об'единение три предшествовавшие области научного исследовании личности.

Естественно, что проблема характера является чрезвычайно многогранной и актуальной. Здесь то и может найти свое наиболее интересное и жизненно ценное применение „структурно-синтетическая психология. К. Коффка".

Нигде и ни в одной области исследования нельзя с большей пользой применить метод целостного изучения проявлений личности, как при изучении его характера. На самом деле мысль Коффки о том, что целое имеет собственные законы бытия, которые определяют род этого целого, устойчивого или склонного к трансформации, как нельзя лучше обосновывает методологию самого принципиального подхода к изучению характера, как органически целостного монолитного типа проявлений личности. Монолитно целостный тип проявлений личности органически вырастает из взаимоотношения личности с окружающей средой.

Строение характера—органично, в нем сливаются конституция и внутренние задатки личности со средой, ее окружающей. И если конституция почти не изменяется под влиянием среды, то характер способен на довольно значительные изменения под влиянием социальных условий среды. *Характер—это сложная равнодействующая между средой и организмом.* Сюда могут быть включены и аналитическо-функциональные исследования характера. На самом деле проблемы наличия в характере тех или иных доминант, равно как и проблема бесхарактерности (как отсутствия известной индивидуальной системы в отношении к окружающему) и проблема связи характера с мировоззрением личности, все эти проблемы могут быть здесь анализируемы и функционально обуславливаемы.

Следующей V-ой задачей, которая стоит перед наукой о личности и ее проявлениях, является—*учение об основных физиологических механизмах нашей нервной системы*, обуславливающих собою все нервно-физиологические отправления организма, которое, поэтому, и лежит в основе физико-химической механики поведения организма. Правда, физиология, которая располагает методами лишь для изучения физиологической данности организма, не имеет возможности работать, напр.,

над вопросами наследственности в передаче некоторых систем поведения от одних особей к другим (это дело биологии и учения о задатках и др. внутренних факторах поведения), но физиология нервной системы и механизмов ее актов очень ценна тем для изучения поведения личности, чем ценна для нас анатомия при изучении физиологии и биологии, хотя мы все отлично знаем, что знание анатомии еще не гарантирует нам понимание физиологических и биологических отправлений организмов, равно как и учение о деятельности эндокринных желез, также обуславливающих собою ряд особенностей и типоорганических проявлений личности человека. Ясно, что изучение нервно-физиологических механизмов отправлений и элементарных проявлений организма является крайне важной и ценной областью общего учения о личности и ее проявлениях. Учение об условных рефлексах, так четко и широко разработанное акад. И. П. Павловым и примененное к человеку В. М. Бехтеровым, является здесь наиболее ценным вкладом в изучение данной области. Знание механизмов нервной системы является для нас очень ценным вспомогательным средством в нашем стремлении постичь целостно-своеобразную человеческую личность. Знание этой механики необходимо для одного того, чтобы устранить наивно-натуралистический взгляд на физиологические механизмы нервной системы, как на нечто такое, что всеоб'емлюще и всесторонне обуславливает собою все биологические, социальные, эстетические и моральные проявления личности. *Изучение этой механики показало бы нам, что физиологические механизмы рефлексов обуславливают собою лишь физиологические же проявления личности* (на что справедливо указывали еще Бухарин, В. Вагнер и Корнилов), *в этих механизмах нет места социальным проявлениям личности, классовой борьбе, интересам и запросам, комизму и трагизму, героизму и трусости.* Механизмы рефлексов ценны нам, как наглядные показатели того, что нервная система является носителем не только стереотипно несложных систем рефлексов, но и бесконечно более сложных механизмов и функций психической жизни и что психика, как проявление многообразно и сложно организованной материи (нервная система человека) является тем фокусом и интрепретатором, в котором находят свое выражение большинство актов физиологических механизмов нашей нервной системы. Изучение этой механики в ее наиболее тонких физиологических деталях необходимо уже для одного того, чтобы знать чем, какими инструментами и аппаратами физиологических проявлений располагает личность в своем поведении и при различных изменениях, которые личность иногда вносит в него. Внутренне личность нередко непосредственно сознает всю ту иерархию механизмов, которой она располагает и всегда более или менее совершенно пользуется этими механизмами для своих практических целей, например, при создании у себя целого ряда привычек (к вставанию в определенный час, к послеобеденному сну, к ежедневным занятиям гимнастикой или музыкой в определенные часы) или при сознательном стремлении разрушить свои привычки (отучить себя от курения, от чтения лежа и т. п.). Личность и индивидуальность сознательно и бессознательно управляет всеми механизмами своих проявлений и поэтому об'ективное анатомо-физиологическое знание является здесь крайне ценным дополнением и для понимания анатомо-физиологических элементов нашего поведения. Не менее важное значение имеет и знание деятельности желез внутренней секреции, тем более, что продукты, вырабатываемые ими (гормоны), поступая в кровь, весьма значительно меняют деятельность нашей нервной системы и обусловленных ею физиологических и психологических механизмов и

функций. Это особенно важно потому, что деятельность желез обусловлена общей конституцией организма и является фактором детерминирующим поведение личности. Кроме этого, знание деятельности условных рефлексов помогает нам разобраться во всей многообразной области образования привычек и традиций, а также помогает нам разобраться в том сложном автоматизме отчасти полезном и экономящем нашу работу, а отчасти косном и окаменелом, которым является вся система образования условных рефлексов, которые благодаря своей окаменелой стереотипности часто выходят из-под сознательного самостроительства личности (сознательного самовоздействия и самовоспитания) и начинают жить в организме самостоятельными группами (комплексо-рефлексами), влияющими на ее поведение.

VI-й задачей, стоящей перед наукой о личности,—является *изучение той сложной системы органических процессов нервной системы, которые представляют собою непосредственное самосознание организма* и позволяют ему воспринимать все окружающее и себя в форме самовосприятия и перевода на язык функционального самосознания большинства всех материальных процессов, происходящих в нем, т. е. иначе *учение о внутреннем содержании личности* или как ранее оно называлось учение о сознании и его процессах. Внутреннее содержание личности шире, чем понятие сознания, так как охватывает не только то, что сознательно совершается и протекает в организме, но и то, что является бессознательным (чисто физиологическим или биологическим процессом). Сюда войдут все вопросы, касающиеся всего многообразия социального содержания жизни и проявлений личности. Красота, классовость и политическая сознательность могут иметь место лишь в том случае, если внутреннее содержание личности является— реальной жизненной системой, если оно представляет собою интенциональное выражение всего сложного активно-биологического единства организма, если оно реальный центр всей системы органической жизнестойкости, которым является наше тело. *А если так, если оно есть реальный интенционально-биологический центр жизни организма, расшифровывающий ему значение перемен, происходящих как в самом организме, так и в окружающей его ереде, то, естественно, что изучение его является делом первостепенной важности.* Экспериментальные приемы исследования, введенные Штумпфом и Штерном и др., как нельзя лучше способствуют точному и четкому познанию этой крайне актуальной и многообразной области.

И, наконец, VII-й задачей, стоящей перед наукой о личности, является *учение об адекватности отображения в нашем знании и во внутреннем содержании личности фактов и закономерностей внешнего мира.* Иначе,—это учение о происхождении, составе и ценности нашего знания или как еще называют эту науку—„теория познания". Знать личность, но не знать об'ективную ценность и понимание личностью окружающего ее мира было бы, конечно, недостаточно. И здесь то и открывается простор для изучения так называемого „предметного сознания" и иных интенциональных положений и процессов человеческого сознания.

Выводы.

Итак мы имеем следующие 7 задач, стоящие перед наукой о личности и ее проявлениях, в которых могут, по нашему убеждению, быть применены все научные течения, изучающие личность, так как для

каждого найдется своя плоскость исследования внутренне об'единенная и методологически согласованная с другими областями исследования:

1. Учение о конституции и ее типах.
(биологическая типология)

2. Учение о внешних факторах и условиях, влияющих на поведение личности.
(факторология)

3. Учение о внутренних стимулах и задатках, обуславливающих развитие и поведение личности.
(потенциология)

4. Учение о характере, как типе проявлений (поведения) личности, обусловленных сложившимся взаимоотношением среды, конституции и наследованных задатков.
(характериология)

5. Учение о физиологических механизмах нервной системы и деятельности эндокринных желез.
(реактология и рефлексология)

6. Учение о внутреннем содержании личности, как реальной интенциональной системе социально-биологической жизнестойкости организма.
(психология)

7. Учение о природе знания личностью окружающей ее среды.
(гносеология и феноменология).

Здесь мы имеем ту же картину изучения различных областей, об'единенных единым, но многогранным об'ектом, как в физике, химии, медицине, педологии и целом ряде других научных дисциплин, которые также делят крайне сложные об'екты своего изучения на целый ряд вполне определенных конкретных задач и областей (как, напр., физика, являясь наукой о физических явлениях, имеет следующие отделы с различной и своеобразной методикой их исследования, как: учение о газах, об электричестве, о теплоте и т. д.). При этом говорить об эклектике здесь, конечно, совершенно невозможно, так как имеется налицо стройная система, об'единяющая между собою все эти отдельные задачи научного исследования [1]).

---

[1]) Интересное подтверждение целого ряда тех идей, которые развиваются в данной статье, можно найти в докладах т. Бухарина и т. Луначарского, сделанных ими на 1-м всесоюзном педологическом с'езде в январе 1928 г. в Москве.

В. К. Дыдырко.

Циркулярные кривые 3-го порядка.

Настоящая работа представляет собою попытку систематического изложения свойств циркулярных кривых 3-го порядка при помощи аналитического метода.

Работа состоит из пяти глав. В главе I рассматриваются способы приведения уравнения циркулярных кривых к канонической форме и разбираются главным образом при помощи метода сокращенных обозначений различные свойства этих кривых, относящиеся к их центру, вершинам и главной точке. В основу этих свойств кладется так называемая теорема Eckhardt'a.

Далее указываются различные способы построения циркулярных кривых при помощи проективных пучков прямых и окружностей, а также способы построения их касательных и нормалей. Здесь исследование ведется также с помощью теоремы Eckhardt'a.

В первой же главе рассматриваются двойные точки циркулярных кривых.

Второй основной теоремой общей теории циркулярных кривых является так называемая теорема Casey. На основании этой теоремы чисто аналитическим путем доказывается очень много общих свойств циркулярных кривых.

Глава 2-я посвящена инверсии и ее роли в общей теории циркулярных кривых. Здесь подробно излагается теория фокусов с теоремами Hart'a и теория аналлагматического преобразования.

Последняя теория, как мне кажется, изложена более подробно, чем это сделано у Техейра, Лориа и др. В работе введен термин аллагматического преобразования, при котором не изменяется только тип кривой, с целью указания роли модуля, ибо характер инверсионного преобразования зависит не только от выбора полюса инверсии, но и от модуля ее. Во второй же главе подробно излагаются свойства циркулярных кривых, связанные с автополярными треугольниками полюсов инверсии и с окружностью 9 точек Эйлера. В заключение главы указана теорема Casey и ее следствия применительно к циркулярным кривым. Некоторые из приведенных в конце главы доказательств, мне кажется, не были даны раньше.

В главе III излагаются проективные свойства циркулярных кривых и выясняется с точки зрения проективной геометрии их роль в общей теории кривых 3-го порядка.

Глава IV трактует о метрических свойствах циркулярных кривых.

Здесь выводятся 5 независимых ортогональных инвариантов циркулярных кривых и выясняются различные особенности циркулярных кривых путем исследования как этих инвариантов, так и получаемых из них производных инвариантов.

В главе V рассматриваются некоторые частные виды циркулярных кривых: косые циссоиды и строфоиды, циссоидалы и строфоидалы, фокалы Кэтлэ и Дандэлена, триссектрисса Маклорена и т. п.

Первой работой по теории циркулярных кривых является мемуар Bjerkness'a, помещенный в т. LV Journal de Crelle за 1858 г. Sur une certaine classe de courbes de 3 degré, rapportées á lignes droites, qui dependent de paramètres donnés.

Bjerkness дал способы построения этих кривых при помощи прямых и окружностей и указал некоторые их свойства. Мемуар Bjerkness впрочем читается не легко; геометрическая сторона вопроса в нем затемняется очень сложными преобразованиями уравнений кривых. Bjerkness заменяет ур ие циркулярной кривой пятью уравнениями, вводя четыре параметра.

Второй по времени появления служит работа Eckardt'a. Ueber die Curven 3. Ordnung welche durch die imagrinären Kreïspuncte hindurchgehen, помещенная в TX Zeitschrift der Mathematik und Physik за 1866 год. В этом труде автором разобраны при помощи самых элементарных соображений главнейшие свойства циркулярных кривых. Изложение очень сжатое и краткое. В начале настоящей работы мы воспользовались многими из предложений Eckardt'a, изменив и дополнив доказательства. Работа Casey „On Bicircular Quartics" появилась в Transactions of the Royal Irish Akademy Vol. 24 в 1871 году, и следовательно указание, сделанное F. Fricke в его диссертации (упомянутой в тексте), что работа Casey является первой аналитической работой по теории циркулярных кривых, неверно.

Вопросами, связанными с построениями циркулярных кривых, занимался Durège. Статья его помещена в Zeitschrift für Mathematik und Physik. T. XIV 1869 г. Тем же вопросом занимались Schröter u Peltz Sitzungberichte der Wiener Academie Bd. 64).

Hermes (Crelle's Journal Bd. 99) обобщил результаты Schröter'a u Peltza. Из работ, относящихся сюда, надо упомянуть работу Czuber'a (Zeitschrift f. Math u. Phys. Bd. 32). „Задача" Czuber'a — упомянута в тексте).

Свойствам циркулярных кривых посвящена также диссертация Fr. Fricke, Gotha 1898. Вопрос трактуется автором с точки зрения синтетической геометрии. Мы воспользовались некоторыми из выводов Fricke, изменив метод изложения на аналитический.

Из других работ, связанных более с метрическими свойствами циркулярных кривых, надо отметить работы: Disteli, Die Metrik der Circularcurven 3. Grades. Vierteljahrbericht der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich T. 35 1890, u Stnrnad'a Circularcurven 3. Grades.

К вопросам, связанным с аналлагматиками, относятся, кроме упомянутых в тексте, работы Mannheim'a Jonrnal de Math 2 serie T. VII. 1862 г. Ribauconu'a Nouvelle Correspondance Mathématique TV 1879 г. u Roberts'a Proceedings of the London Mathematical Society T II. Теория циркулярных кривых изложена и в томе I сочинения: Texeira: „Traite de courbes speciales". В этом труде содержится много ценных изложенных с чрезвычайной ясностью, предложений о циркулярных кривых. Автору, повидимому, были близки вопросы, связанные с этой теорией. Ему самому принадлежат несколько теорем о свойствах этих кривых. Трактат Texeira является единственной из работ по общей теории алгебраических кривых, где вопрос о свойствах циркулярных кривых разбирается настолько подробно.

Нам пришлось воспользоваться многим из материала, имеющегося в Трактате Texeira.

Ценный материал, относящийся к нашей теме, нам удалось найти также в книге A. B. Basset An Elementary Treatise on Cnbic and Quartic Curves, Cambridge 1901.

Детальные свойства отдельных кривых имеются в работе Дг. H. Wieleitner Speciele Ebene Kurven Leipzig 1908 Sammlung Schubert LVI.

В известном тракте Loria: „Algebraische Curven“ глава о циркулярных кривых изложена очень конспективно. Последний труд служил нам главным образом в качестве справочника и богатого указателя литературы вопроса.

В качестве указателя литературы мы пользовались также и геометрическими томами Математической Энциклопедии Из новейших работ, затрагивающих вопросы нашей темы, надо упомянуть труд Hilton Plane Algebraic Curves, Oxford 1920. Теории ортогональных инвариантов кривых 3-го порядка посвящен мемуар. проф. I. Thomae ortogonale Invarianten der Curven 3 Ordnung, помещенный в Leipziger Berichten за 1899 год. Ученик проф. Thomae R. Doelle написал диссертацию Orthogonale Invarianten der Circularcurven 3. Ordnung Iena 1905. Автор при помощи инвариантов разбирает в ней различные метрические свойства циркулярных кривых. Формулы, получаемые Doclle, однако чрезвычайно сложны и несимметричны. Остается открытым вопрос о том, как выбрать систему инвариантов для того, чтобы получить симметричные и удобные формулы.

Некоторое попытки разрешения этого вопроса имеются в настоящей работе.

Более подробный указатель литературы вопроса будет приложен в конце работы.

Циркулярные кривые 3-го порядка.

ГЛАВА I.

Общие свойства циркулярных кривых.

§ 1. Циркулярными кривыми наз. такие кривые, которые изображаются в прямоугольной Декартовой системе координат следующим уравнением:

$$(ax+by)\,(x^2+y^2)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad . \; . \; . \quad (1)$$

Нетрудно показать прежде всего, что все кривые, изображаемые ур-ием (1), проходят через так называемые круговые точки плоскости.

Еще Плюккер[1]) заметил, что все окружности, взятые на какой-нибудь плоскости, проходят через две мнимые точки, лежащие на пересечении так называемых изотропных прямых с бесконечно удаленной прямой. Это точки, которые называются круговыми или циклическими точками данной плоскости. Эти точки не только вносят надлежащую общность и стройность в теорию кривых 2-го порядка, но и вообще имеют большое значение в различных вопросах геометрии (мероопределение Кэли-Клейна).

Кроме окружности существует бесчисленное множество кривых высших порядков, проходящих через эти же точки. Такие кривые обладают многими интересными свойствами, аналогичными свойствам окружности в теории кривых 2-го порядка.

Предметом настоящей работы является систематическое изложение всех свойств кривых 3-го порядка, проходящих через эти точки.

Если написать уравнение (1) в однородных координатах, то оно получит вид:

$$(ax+by)\,(x^2+y^2)+Ax^2z+Bxyz+Cy^2z+Dxz^2+Eyz^2+Fz^3=0 \quad . \; . \quad (2)$$

Координаты круговых точек, как легко видеть, будут удовлетворять

$$\left.\begin{aligned} y &= +ix+lz \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}(\alpha) \qquad \left.\begin{aligned} y &= -ix+l_1z \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}(\beta)$$

системам (α) и (β). Первые из ур-ий систем (α) и (β) представляют изотропные прямые, вторые—бесконечно-удаленную прямую.

Простая подстановка выражений для y и z из систем (α) и (β) в ур-ие (2) показывает, что ур-ие (2) ими удовлетворяется, чем и доказывается высказанное предложение.

Можно было бы итти и обратным путем, предложив задачу: написать ур-ие кривой 3-го порядка, проходящей через круговые точки". В результате мы получим ур-ие типа (1).

Действительно, изотропные прямые можно назвать кру̀говыми ассимптотами. Наша задача сведется таким образом к разысканию кривой 3-го порядка с круговыми ассимптотами.

Так как у всякой кривой, ассимптоты которой параллельны двум данным прямым: $y-m_1x=0$ и $y-m_1x=0$, сумма старших членов

---

[1]) Понятие о циклических точках дано еще ранее Плюккера Poncelet в 1822 г. в его трудде: „Traitè da proprieles projectives des figures" T. I § 94. Paris 1865 г.

должна делиться на произведение $(y-m_1x)$ $(y-m_2x)$ и так как в данном случае $m_1=+i$, а $m_2=-i$, то сумма старших членов ур-ия кривой должна иметь множителя:

$$x^2+y^2,$$

другими словами, ур-ие искомой кривой 3-го порядка должно иметь вид (1). Последнее же уравнение сразу показывает, что кроме двух изотропных ассимптот кривая имеет и вещественную ассимптоту, которая будет параллельна прямой:

$$ax+by=0$$

§ 2. С целью упрощения ур-ия (1) найдем уравнения всех трех ассимптот кривой (1).

Из Аналит. геометрии известно, что для нахождения ассимптот не параллельных осям (ассимптот ‖ осям у нашей кривой быть не может, ибо коэффициенты при x^3 и y^3 постоянные числа) надо в уравнении кривой положить $y=tx$. Сделав такую подстановку, мы получим:

$$x^3(a+bt).(1+t^2)+Ax^2+Bx^2t+Cx^2t^2+Dx+Ext+F=0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Поделив все члены ур-ия (3) на x^3, находим:

$$(a+bt).(1+t^2)+A.\frac{1}{x}+B.\frac{t}{x}+C.\frac{t^2}{x}+D.\frac{1}{x^2}+E.\frac{t}{x^2}+F.\frac{1}{x^3}=0 \quad . \quad . \quad (4)$$

Положив в ур-ии (4) $x=\infty$, мы получим ур-ие:

$$(a+bt).(1+t^2)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

для нахождения угловых коэффициентов ассимптот.

Корнями ур-ия (5) будут $t_1=+i$; $t_2=-i$; $t_3=-\frac{a}{b}$,

что было впрочем известно и из приведенных в § 1 рассуждений.

Для нахождения свободного члена n в ур-ии ассимптоты $y=mx+n$, как известно, надо подставить в уравнение данной кривой вместо y его выражение $xm+z$ и, положив в результате подставки $x=\infty$, решить получившееся ур-ие относительно z.

Подстановка дает: $y=-\frac{a}{b}x+z$ (для вещественной ассимптоты).

Подставив последнее выражение y в ур-ие (1), находим:

$$bz\left\{x^2+\frac{a^2x^2}{b^2}-\frac{2axz}{b}+z^2\right\}+Ax^2-\frac{Bax^2}{b}+Bxz+C\frac{a^2x^2}{b^2}-\frac{2Cazx}{b}+Cz^2+$$

$$+Dx-\frac{Eax}{b}+F=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Поделив все члены ур-ия (6) на x^2, получим:

$$(7)\ bz\left\{1+\frac{a^2}{b^2}-\frac{2az}{b}\cdot\frac{1}{x}+z^2\cdot\frac{1}{x^2}\right\}+A-\frac{Ba}{b}+Bz\cdot\frac{1}{x}+\frac{Ca^2}{b^2}-\frac{2Caz}{b}\cdot\frac{1}{x}+$$

$$+Cz^2\cdot\frac{1}{x^2}+D\frac{1}{x}-\frac{Ea}{b}\frac{1}{x}+\frac{F}{x^2}=0$$

при $x=\infty$ ур-ие (7) получит вид:

$$bz\left\{1+\frac{a^2}{b^2}\right\}+A-\frac{Ba}{b}+\frac{Ca^2}{b^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

или $\frac{z(a^2+b^2)}{b}+\frac{Ab^2-Bab+Ca^2}{b^2}=0$ . . . . (9)

Из ур-ия (9) находим следующее значение для z.

$$z = -\frac{Ab^2 - Bab + Ca^2}{b(a^2+b^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Таким образом ур-ие вещественной ассимптоты будет:

$$ax + by + \frac{Ab^2 - Bab + Ca^2}{a^2+b^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Кроме двух мнимых круговых точек кривая (1) имеет еще одну действительную бесконечно удаленную точку, а именно беск. удаленную точку вещественной ассимптоты (11).

Найдем теперь точку пересечения двух мнимых ассимптот кривой (1). Так как изотропные ассимптоты сопряженны, то точка их пересечения—вещественна. Мы могли бы по предыдущему примеру написать уравнения обеих мнимых ассимптот и непосредственно найти точку их пересечения. Но так как этот способ потребовал бы довольно утомительных вычислений, то мы найдем точку пересечения мнимых ассимптот другим приемом.

Обозначим координаты искомой точки через α и β, тогда ур-ие мнимых ассимптот будет: $y - \beta = \pm i(x - \alpha)$ . . . . (12)

Если мы подставим в ур-ие (1) выражение y из (12), то если прямая (12) есть действительно ассимптота кривой (1), мы должны получить в результате подстановки уравнение относительно a, имеющее двухкратный корень, равный ∞. Другими словами в полученном уравнении должны исчезнуть члены, содержащие x^3 и x_2. Сделав такую подстановку, мы увидим, что член с x^3 действительно сократился сам собою. Приравняв же 0 коэффициент при x^2, мы найдем из этого условия два уравнения (коэффициент этот будет комплексный), из которых сможем найти α и β. Сделав эту подстановку в ур-ие (1) выражение y из (12), получим:

$$[ax + b\beta + ib(x-\alpha)]\,[x^2 + \beta^2 + 2i.\beta(x-\alpha) - x^2 + 2\alpha x - \alpha^2] + Ax^2 + Bx\beta + iBx(x-\alpha) + C\beta^2 + 2iC\beta(x-\alpha) - C(x-\alpha)^2 + Dx + E[\beta + i(x-\alpha)] + F = 0 \quad \ldots \quad (13)$$

Выпишем коэффициент при x^2:

$$\begin{aligned} 2a\alpha - 2b\beta + A - C &= 0 \\ 2b\alpha + 2a\beta + B &= 0 \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Из системы (14) получаем:

$$\alpha = -\frac{\begin{vmatrix} A-C, & -26 \\ B, & 2a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a, & -2b \\ 2b, & 2a \end{vmatrix}} = -\frac{2a(A-C)+2Bb}{4(a^2+b^2)} = \frac{a(C-A) - Bb}{2(a^2+b^2)} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

$$\beta = -\frac{\begin{vmatrix} 2a, & A-C \\ 2b, & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a, & -2b \\ 2b, & 2a \end{vmatrix}} = -\frac{2aB - 2b(A-C)}{4(a^2+b^2)} = \frac{-b(C-A) - aB}{2(a^2+b^2)} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Результат подстановки в ур-ие (1) выражения y из ур-ия $y - \beta = -i(x-\alpha)$ даст тот же результат, в чем нетрудно убедиться.

Точка, определяемая координатами α и β, вещественная точка пересечения мнимых ассимптот, наз. особенным фокусом (Laguerre) или центром циркулярной кривой.

§ 3. Ур-ие кривой (1) значительно упростится, если мы перенесем начало координат в центр кривой, оставив оси параллельными прежним.

Такое преобразование всегда возможно, если только α и β не равны ∞, другими словами, если $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Если $a = 0$ и $b = 0$ одновременно, то кривая (1) переходит в коническое сечение.

Из ур-ий (15) и (16) легко приходим к заключению, что если $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, то $A = C$ и $B = O$.

Действительно, a и b одновременно не могут равняться O. Значит: или 1) $a = o$, тогда $b \neq o$, в таком случае из (15) и (16) получим:

$bB = O$ и $b(C - M) = O$. Откуда $B = O$; $C = A$.

если 2) $b = o$, то $a \neq o$ и те же ур-ия дают $a\,(C - A) = O$, а $B = O$. Отсюда снова получаем то же самое.

После преобразования ур-ие циркулярной кривой в новых осях получит такой вид: $(ax^1 + by^1 + A_1)\,(x^{12} + y^{12}) + D_1 x^1 + E_1 y^1 + F_1 = O$ (17)

$ax^1 + by^1 + A = O$ есть ур-ие вещественной ассимптоты кривой в новых осях $(x^1 y^1)$.

§ 4. Если выполнить указанное преобразование, то нетрудно заметить здесь аналогию с преобразованием ур-ия кривой 2-го порядка к центру.

Возьмем ур-ие (1)

$$(ax + by)\;(x^2 + y^2) + Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = O$$

и преобразуем его к новым осям по формулам

$$x = x' + \alpha$$
$$y = y' + \beta.$$

где α и β координаты центра кривой (особенного фокуса).

$(ax^1 + by^1 + ax^1 + b\beta)\;(x^{12} + 2\alpha x^1 + \alpha^2 + y^{12} + 2\beta y^1 + \beta^2) + Ax^{12} + 2A\alpha x^1 +$
$+ A\alpha^2 + Bx'y' + B\beta x^1 + B\alpha y^1 + B\alpha\beta + Cy^{12} + 2C\beta y^1 + C\beta^2 + Dx^1 + D\alpha + Ey^1 + E\beta +$
$+ F = O$. . . . . (18)

Покажем, что в ур-ии (18) коэфф. при $x^1 y^1$ будет равен O.

Этот коэфф. будет:

$$2b\alpha + 2a\beta + B \qquad (19)$$

Выражение (19) действительно равно нулю с силу 2-го ур-ия (14)

Отберем коэфф. при x^{12} и y^{12} в ур-ии (18), эти коэффициенты будут:

$2a\alpha + b\beta + a\alpha + A$ и $2b\beta + a\alpha + b\beta + C$, но . . . . (19a)

$3a\alpha + b\beta + A = 3b\beta + a\alpha + C$ в силу уравнения 1-го системы (14).

Действительно последнее ур-ние будет:

$$2a\alpha - 2b\beta + A - C = O \quad . . . . (20)$$

Прибавив к обеим частям равенства (20) по равному выражению: $a\alpha + 3b\beta + C$, мы получим:

$$3a\alpha + b\beta + A = a\alpha + 3b\beta + C \quad . . . . (21)$$

Таким образом, сопоставляя (21) и (19a), мы заключаем, что коэффициенты при x^{12} и y^{12} в преобразованном ур-ии равны между собою.

Сравнив соотношение 19a с ур-нием (17), мы можем написать, что

$$3a\alpha + b\beta + A = a\alpha + 3b\beta + C = A_1 \quad . . . . . . (22)$$

Сравнивая коэфф. при x^1 и y^1 в ур-иях (17) и (18), мы получим, что

$$D_1 = a(\alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha\,(a\alpha + b\beta) + 2A\alpha + B\beta + A$$
$$E_1 = b\,(\alpha^2 + \beta^2) + 2\beta(a\alpha + b\beta) + 2C\beta + B\alpha + E$$
$$F_1 = (a\alpha + b\beta)\;(\alpha^2 + \beta^2) + A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F$$

Если мы обозначим левую часть ур-ия циркулярной кривой (1) через $\ddot{\varphi}(x_1y)$, так что

$$\ddot{\varphi}(x_1y)=(ax+by)(x^2+y^2)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=O,$$

то нетрудно видеть, что

$$A_1=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\ddot{\varphi}}{\partial x^2}\right\}_{\alpha,\beta}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\ddot{\varphi}}{\partial y^2}\right\}_{\alpha,\beta}=3a\alpha+b\beta+A=3b\beta+a\alpha+C$$

$$B_1=\left\{\frac{\partial^2\ddot{\varphi}}{\partial x\,\rho y}\right\}_{\alpha,\beta}=2b\alpha+2a\beta+B=O$$

$$D_1=\left\{\frac{\partial\ddot{\varphi}}{\partial x}\right\}_{\alpha\beta},\quad E_1=\left\{\frac{\partial\ddot{\varphi}}{\partial y}\right\}_{\alpha,\beta}=;\quad F_1=(\ddot{\omega})\,\alpha,\beta$$

Значки внизу скобок означают результат подстановки вместо x и y соответственно α и β в выражении, стоящем в скобках.

Таким образом, получаем теорему, аналогичную известной теореме из элементарной Аналитической геометрии: при преобразовании ур-ия циркулярной кривой к ее центру коэффициенты старших членов (3-го измер.) не изменяются, коэффициенты при x^{12} y^{12} равны соответственно $\frac{1}{2}$ вторых частных производных от левой части ур-ия кривой по x по y (причем выражения этих частных производных вместо текущих координат подставлены координаты центра) $\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\ddot{\varphi}}{\partial x\,\partial y}\right\}_{\alpha\beta}$ всегда равна O. а $\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\ddot{\varphi}}{\partial x^2}\right\}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\ddot{\varphi}}{\partial y^2}\right\}_{\alpha\beta}$, коэффициенты при x^1 и y^1 равны соответственно: $\left\{\frac{\partial\ddot{\varphi}}{\partial\alpha}\right\}_{\alpha\beta}$ и $\left\{\frac{\partial\ddot{\varphi}}{\partial y}\right\}_{\alpha\beta}$ и наконец свободный член F_1 равен результату подстановки в левую часть ур-ия кривой вместо x и y α и β.

Теорема справедлива вообще при параллельном перенесении осей в любую точку $(\alpha_1\,\beta_1)$ плоскости кривой. В этом случае коэффициенты при x^{12} и y^{12} не будут равны друг другу, а коэффициент при x^1y^1, равный $\left\{\frac{\partial^2\ddot{\varphi}}{\partial x\,\partial y}\right\}_{\alpha_1\beta_1}$, не будет равен O.

§ 5. Не изменяя начала координат, повернем координатные оси так, чтобы ось У стала параллельной вещественной ассимптоте кривой.

Угловой коэффициент вещественной ассимптоты, как видно из ее уравнения, будет $-\frac{a}{b}$ след. $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{a}{b}$, отсюда

$$\operatorname{sn}\varphi=\frac{+a}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \cos\varphi=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Формулы преобразования координат будут:

$$x=x^1\cos\varphi-y^1\operatorname{sn}\varphi=\frac{ax^1\quad by^1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$y=x^1\operatorname{sn}\varphi+y^1\operatorname{soc}\varphi=\frac{bx^1+ay^1}{\sqrt{a^2\ b^2}}$$

В общих формулах надо вместо φ взять $\varphi - 90^0$, ибо угол φ тупой, и поворот оси у до совпадения с ассимптотой должен быть сделан на $\varphi - 90$.

Подставив вместо x и y их выражения в ур-ие (17), мы получим:

$$\left\{\frac{a^2x^1 - aby^1 + b^2x^1 + aby^1}{\sqrt{a^2+b^2}} + A_1\right\}\left\{\frac{a^2x^{12} - 2abx^1y^1 + b^2y^{12} + b^2x^{12} + 2ab\,x^1y^1 + a^2y^{12}}{a^2+b^2}\right\} + \frac{D_1ax^1 - Dby^1 + E_1bx^1 + E_1ay^1}{\sqrt{a^2+b^2}} + F_1 = O. \quad (23)$$

Произведя приведение подобных членов, мы получим:

$$(\sqrt{a^2+b^2}.x^1 + A_1)\,(x^{12}+y^{12}) + \frac{D_1a + E_1b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x_1 + \frac{E_1a - D_1b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,y_1 + F_1 = O. \quad (24)$$

Разделив все члены последнего ур-ия на $\sqrt{a^2+b^2}$, получим:

$$\left\{x^1 + \frac{A_1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}(x^{12}+y^{12}) + \frac{D_1a + E_1b}{a^2+b^2}\,x^1 + \frac{E_1a - D_1b}{a^2+b^2}\,y^1 + \frac{F_1}{\sqrt{a^2+b^2}} = O. \quad (25)$$

Введя новые обозначения коэффициентов, дадим ур-ию следующий вид:

$$(x^1 + A_2)\,(x^{12}+y^{12}) + D_2x^1 + E_2y^1 + F_2 \quad O. \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

Значение коэфф. A_2 D_2 E_2 и F_2 легко находятся из сравнения ур-ий (26) и (25).

Ур-ие (26) есть простейшее ур-ие циркулярной кривой. Начало координат в центре кривой, ось Y^1 параллельна вещественной ассимптоте кривой.

§ 6. Всякая прямая пересекает кривую 3-го порядка, вообще говоря, в трех точках.

Вещественная ассимптота, касаясь кривой на ∞, должна иметь с ней еще одну общую точку. Найдем координаты этой точки.

Возьмем ур-ие кривой в форме

$$(x + A_2)\,(x^2 + y^2) + D_2x + E_2y + F_2 = O. \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

Ур-ие вещественной ассимптоты будет:

$$x + A_2 \quad O. \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

Эта прямая имеет с кривой (27) две общие точки на ∞.

Найдем точки пересечения прямой (28) с кривой (27). Решая совместно эти ур-ния, мы получим для опред. ординаты третьей точки пересечения ур-ие: $-D_2A_2 + E_2y + F_2 = O$ . . . . (29)

Членов, содержащих y^3 и y^2, не будет, как и должно быть в этом случае ($y_1 = \infty$ $y_2 = \infty$).

Из ур-ия (20) $y_3 = \frac{D_2A_2 - F_2}{E_2}$, а ур-ие (28) дает $x_3 = -A_2$. . (30)

Таким образом, вещественная ассимптота пересекает кривую в точке на конечном расстоянии от начала координат. Эта точка наз. главной точкой циркулярной кривой. Ее координаты даются ур-ием (30).

Средней линией (Mittelinie) или (Orthische Gerade по Thomae) называется линия, проходящая параллельно вещественной ассимптоте через точку М, лежащую посредине отрезка, соединяющего особый фокус с главной точкой.

Ур-ие средней линии циркулярной кривой будет:

$$x + \frac{A_2}{2} = O. \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

§ 7. Пользуясь формулами, выведенными в предыдущем §, мы можем найти некоторые интересные свойства циркулярных кривых. Для этого надо только дать этим формулам геометрическую интерпретацию.

Возьмем ур-ие (1): $(ax+by)(x^2+y^2)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx$ . . . . $+Ey+F=0$

и представим левую часть этого ур-ия в сокращенной форме.

Обозначим буквою S левую часть уравнения окружности:

$S=x^2+y^2-2Ax-2By-C$, а буквами α β и γ левые части ур-ний прямых в нормальной форме, пусть

$$\alpha=x\cos\alpha+y\sin\alpha-p$$
$$\beta=x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1$$
$$\gamma=x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2$$

Тогда ур-ие (1) можно переписать следующим образом:

$(x^2+y^2-2Ax-2By-C).\ (ax+by+\kappa)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+$
$+Ey+F+(2Ax+2By+C)(ax+by+\kappa)-\kappa(x^2+y^2)=0$ . . . (32)

или $\alpha S+\kappa_1\beta\gamma=0$ . . . . (33)

Многочлен второй степени, состоящий из второго и остальных членов левой части ур-ия (32), всегда можно разложить на линейные множители, пользуясь произвольностью коэффициентов A, B, C и к. Нормирующие множители включены в κ_1.

Разложение левой части ур-ия (1) можно очевидно осуществить бесчисленным множеством способов.

Мы знаем из аналитической геометрии, что S выражает квадрат длины касательной, проведенной из точки (xy) к окружности $S=0$, а α—расстояние той же точки от прямой $\alpha=0$.

Отсюда непосредственно вытекает следующее предложение:

Геометрическое место точек, для которых произведение квадрата длины, проведенной из каждой из них касательной к постоянной окружности ($S=0$) на расстояние их (точек) от постоянной прямой ($\alpha=0$), находится в постоянном отношении ($-\kappa_1$) к произведению расстояний их (точек) от двух других определенные прямых ($\beta=0$ и $\gamma=0$)—есть циркулярная кривая 3-го порядка.

Ур-ие $\alpha S+\kappa_1\beta.\gamma+0$ указывает, что изображаемая им циркулярная кривая проходит:

1) через точки пересечения окружности $S=0$ с прямыми $\beta=0$ и $\gamma=0$;

2) через точки пересечения прямой $\alpha=0$ с $\beta=0$; и $\alpha=0$ с $\gamma=0$.

§ 8. Если через две к.-ниб. точки A и B циркулярной кривой провести пучек окружностей, то каждая из них пересечет данную циркулярную кривую еще в двух точках C и D; C' и D'; C'' и D'' и т. д. Прямые, соединяющие эти точки, пересекаются все в одной постоянной для данного пучка точке E, лежащей также на циркулярной кривой. Если через точку E проведем прямую EG, параллельно вещественной ассимптоте кривой KL, то эта прямая встретит данную циркулярную кривую в точке F, в которой пересекается с циркулярной кривой прямая, проходящая через две точки A и B.

Для доказательства этой теоремы докажем следующее свойство кривых 3-го порядка.

Рассмотрим две кривые 3-го порядка U=O; V=O, каждая из которых проходит через 8 данных точек. Ур-ие

U—к V=O. . . . . (34)

будет уравнением пучка кривых 3-го порядка, проходящих через те же 8 точек.

Так как ур-ие (34) заключает произвольный параметр к, то последний может быть определен таким образом, чтобы кривая (34) прошла еще через какую-нибудь 9-ю точку.

Для этого достаточно взять, очевидно, $к=\frac{U_1}{V_1}$, где U_1 и V_1 суть результаты подстановки координат девятой точки в уравнения U=O и V=O.

Для к мы получим вообще определенное значение, за исключением того случая, когда 9-я точка лежит одновременно и на кривой U=O и на кривой V=O. В последнем случае к принимает значение $\frac{O}{O}$, Действительно две кривые 3-го порядка пересекаются вообще в 9 точках (33) След. U=O и V=O, проходя через 8 данных точек, должны еще пересечься и в некоторой 9-й точке. Координаты этой точки обращают к в $\frac{O}{O}$. Последнее обусловлено тем, что любая кривая, изображаемая ур-ем U—к V=O, должна пройти чере все девять точек пересечения кривых U=O и V=O. Отсюда и получаем предложение: все кривые 3-го порядка, которые проходят через 8 данных точек, проходят еще и через девятую постоянную точку.

Таким образом девять точек не всегда определяют собою кривую 3-го порядка (парадокс Крамера).

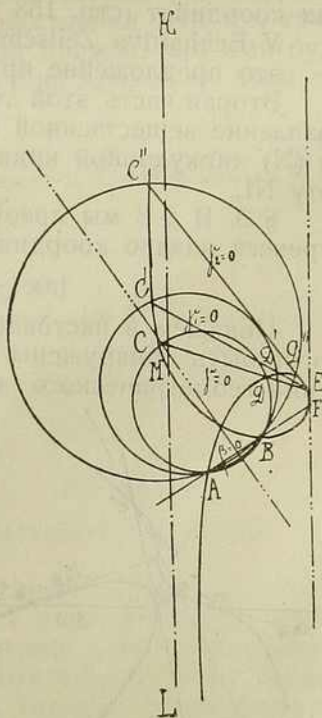
При помощи этой леммы нетрудно доказать высказанное раньше предложение: проводим через две точки A и B данной циркулярной кривой пучек окружностей, каждая из них пересечет нашу кривую еще в двух точках напр. C и D [кривая 3-го порядка с кривой 2-го порядка должна пересечься в 3.2 = 6 точках, но в данном случае пятой и шестой точками, общими окружности и циркулярной кривой, будут круговые точки плоскости J и j.

Прямая, проведенная через точки C и D, пересечет циркулярную кривую еще в третьей точке E, одинаковой для всех окружностей пучка, проходящих через A и B.

Для доказательства возьмем какие-нибудь две окружности S=O и S^1=O.

Каждая из этих оружностей пересечет кривую еще в двух точках, лежащих на прямых γ=o и γ_1=o (чертеж I).

γ_1. S=o и γ. S_1=o будут ур-ями циркулярных кривых 3-го порядка, проходящих через одни и те же восемь точек (две точки на прямой γ=o; две точки на прямой γ_1=o и точки A, B, J и j). Данная циркулярная кривая проходит также через эти 8 точек.



Чертеж 1

Значит, на основании предыдущей леммы все эти три кривые должны пройти через одну и ту же девятую постоянную точку. Это будет точка пересечения прамой γ_1=o с данной циркулярной кривой. S=O не может иметь еще одной общей точки с данной циркулярной кривой, кроме точек A, B, C, D, J j, но кривая γ_1. S O имеет общую девятую точку с данной циркулярной кривой, след. γ_1 = o и данная циркулярная кривая имеют эту общую точку

По той же причине эта точка должна лежать на пересечении прямой $\gamma=0$ с данной циркулярной кривой.

Отсюда и вытекает, что прямые $\gamma=0$ и $\gamma_1=0$ пересекаются в точке, лежащей на данной циркулярной кривой.

Ввиду того, что мы взяли две произвольные окружности пучка, теорема справедлива и для всех окружностей пучка.

Для доказательства второй части предложения достаточно обратиться к уравнению кривой

$$\alpha S+\text{к.}\ \beta\gamma=0. \qquad (35)$$

Из него видно, что точки пересечения прямых:

$$\left.\begin{matrix}\alpha=0\\ \beta=0\end{matrix}\right\} \text{ и } \left.\begin{matrix}\alpha=0\\ \gamma=0\end{matrix}\right\}$$

лежат на данной циркулярной кривой (ибо координаты их удовлетворяют ее уравнению), а так как прямая $\alpha=0$ параллельна вещественной ассимптоте, то теорему можно считать доказанной. Эта теорема доказана у Texeira аналитическим путем без применения метода сокращенных обозначений.
(см. Texeira Courbes planes T. I page 81, § 96).

У Basset это же предложение доказано при помощи трилинейных координат (стр. 153 § 224).

У Eckhardt'a Zeitschrift für Mathematik und Physik T. X. 1865 г. это предложение приведено без доказательства [1]).

Вторая часть этой теоремы дает возможность легко получить направление вещественной ассимптоты, а, зная координаты главной точки (N) циркулярной кривой, построить и самую вещественную ассимптоту NL.

§ 9. В § 3 мы преобразовали общее ур-ие циркулярной кривой, перенеся начало координат в ее центр, к—виду:

$$(ax+by+A_1).(x^2+y^2)+D_1x+E_1y+F_1=0 \quad . \quad . \quad . (36)$$

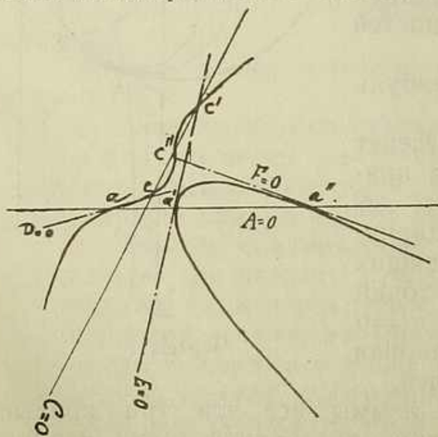
Покажем в настоящем §, какие свойства циркулярных кривых могут быть обнаружены при рассмотрении этого уравнения и выяснении геометрического значения его коэффициентов. Как было показано выше, ур-ие

$$ax+by+A_1=0 \quad . \quad . \quad . (37)$$

изображает вещественную ассимптоту нашей кривой. Ур-ие:

$$D_1x+E_1y+F_1=0,$$

как сейчас покажем, выражает прямую, на которой лежат три точки пересечения нашей кривой с ее ассимптотами. Эта прямая называется **спутником** бесконечно-удаленной прямой.



Чертеж 2

Предположим, что прямая линия $A=0$ (черт. 2) пересекает кривую 3-го порядка в трех точках a a^1 и a^{11}.

Проведем в этих точках касательные к кривой. Эти касательные, уравнения которых пусть будут $D=0$; $E=0$; $F=0$, пересекут нашу

[1]) Так как предложение это впервые высказано Eckhardt'ом, то его и назовем теоремой Eckhardt'a.

кривую в трех точках c c^1 и c^{11}. Требуется показать, что точки c c^1 и c^{11} лежат на одной прямой. Заметим, что точка c, в которой касательная к кривой в точке a пересекает кривую наз. тангенциальной точкой a. Прямая $C=O$, на которой лежат три тангенциальные точки, соответствующие точкам a a^1 и a^{11}, называется спутником прямой A.

Для доказательства того, что три тангенциальные точки лежат на одной прямой, рассуждаем следующим образом: уравнение $D.E.F=O$ есть уравнение кривой третьего порядка, проходящей через девять точек (точки касания считаются за две точки каждая: a a^1 a^{11}; c, c^1 c^{11}). Прямые $A=O$; $A=O$ и $C=O$ (под C подразумеваем пока прямую, проходящую через две точки, напр. c и c^1) образуют вторую кривую 3-го порядка, проходящую через 8 из этих девяти точек (a, a^1, a^{11}; c и c^1). Уравнение такой кривой будет

$$A^2.C=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

Следовательно эта кривая должна, на основании предыдущей леммы, пройти и через девятую точку c^{11}. А так как точка c^{11} не может лежать на прямой A, которая уже имеет три общих точки с кривой 3-го порядка, то след. точка c^{11} должна лежать на прямой $C=O$.

Предположим теперь, что прямая $A=O$ будет бесконечно удаленной, тогда касательные D, E и F в точках, где $A=O$ встречает кривую, будут ассимптотами кривой. Каждая ассимптота встречает кривую в единственной точке на конечном расстоянии. Эти три точки, как показано выше, должны лежать на одной прямой, которая будет спутником бесконечно удаленной прямой. Ур-ие кривой в этом случае можно написать в форме

$$D.E.F-\kappa C=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

$D.E.F.$—произведение трех ассимптот, $\kappa=-1$, $C=D_1x+E_1y+F$, что вполне соответствует ур-ию (36).

Если ур-ие (36) переписать в виде:

$$(x+y^2).\left|\frac{ax+by+A_1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|+\frac{\sqrt{D^2{,}+E^2}}{\sqrt{a+b^2}}\quad\frac{D_1x+E_1+F_1}{\sqrt{D_1^2+E_1}}\quad=O \quad . \; . \; . \; . \quad (40)$$

или

$$(x^2+y^2).\frac{ax+by+A^1}{\sqrt{a+b}}=\kappa.\;\frac{D_1x+E_1y+F_1}{\sqrt{D_1^2+E_1^2}},\text{ где } \kappa=-\frac{\sqrt{D_1^2+E_1^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad . \; . \; . \; . \quad (41)$$

то на основании ур-ий (41) и (44) можно высказать следующие предложения:

1) геометрическое место точек, для которых квадрат их расстояния от постоянной точки, умноженный на их расстояние от постоянной прямой, находится в постоянном отношении к их расстоянию от другой постоянной прямой, есть циркулярная кривая 3-го порядка, имеющая постоянную точку своим центром, первую постоянную прямую своей вещественной ассимптотой, а вторую прямую—спутником бесконечно удаленной прямой,

2) Если из центра циркулярной кривой опишем каким-нибудь радиусом окружность, то она пересечет кривую в двух точках; прямая, проходящая через эти точки, пересекается с вещественной ассимптотой кривой на самой кривой, другими словами проходит через главную точку циркулярной кривой.

Пусть у-ие этой окружности будет:

$$S=x^2+y^2-r^2=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

Ур-ию циркулярной кривой (36) можно дать такую форму:

$$(x^2+y^2-r^2)\ (ax+by+A_1)+(D_1+r^2a)x+(E_1+r^2b)y+F_1+r^2A_1=O \quad . \quad . \quad (43)$$

или в сокращенном обозначении:

$$\alpha S+\kappa\beta=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

где $\alpha=O$ есть ур-ие вещ. ассимптоты цир. кривой, $S=O$ есть ур-ие, проведенной через центр кривой окружности.

Урие (44) показывает, что циркулярная кривая проходит через точки пересечения:

$$\left.\begin{matrix}S=O\\ \beta=O\end{matrix}\right\} \text{ и } \left.\begin{matrix}\beta=O\\ \alpha=O\end{matrix}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

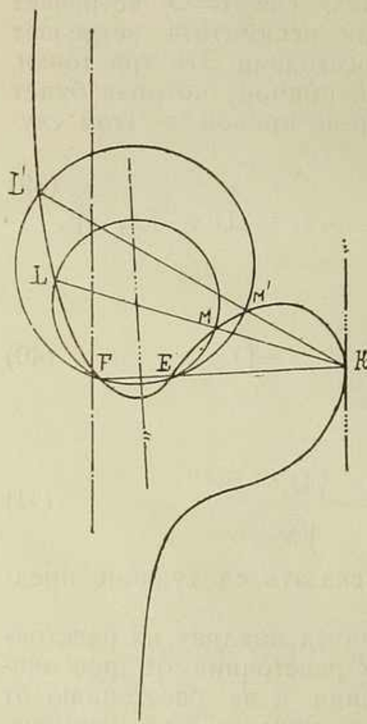
Последние два из ур-ий (45) показывают, что точки пересечения прямой $\beta=O$, с вещ. ассимптотой лежит на цир. кривой. Но $\beta=o$ и есть ни что иное, как прямая, соединяющая точки пересечения окружности (42) с циркулярной кривой (43).

Последнее предложение можно получить и как частный случай теоремы Eckhardt'a, изложенной в § 8.

Если за точки A и B (черт. I) примем круговые точки J и j, то прямая $\beta=O$ будет бесконечно удаленной, след. левая часть ее уравнения, т. е. выражение β будет constans. Ур-ие циркулярной кривой (35) примет тогда такой вид:

$$\alpha_1 S+k_1\gamma=,\ \text{где}\ k_1=k\beta=\text{постоянному},$$

т. е. форму соответствующую вполне виду (44).



Чертеж 3

§ 10. Назовем точку K циркулярной кривой (чер. 3), в которой касательная к кривой параллельна вещественной ассимптоте—вершиной кривой.

Если через к.-ниб. вершину циркулярной кривой K проведем произвольную прямую KF, то эта прямая пересечет кривую еще в двух точках E и F.

Если через точки E и F проведем пучек окружностей, то, на основании теоремы § 8, каждая из окружностей пучка пересечет кривую еще в двух точках ML M^1L^1 и т. д.

Прямые, соединяющие эти точки, снова пройдут через вершину циркулярной кривой K.

По теореме Eckhardt'a прямые LM L^1M^1 и т. д. должны пройти через постоянную точку на кривой. С другой стороны прямая FE должна пересечь кривую в точке встречи ее с прямой, параллельной вещественной ассимптоте.

Но прямая параллельная вещественной ассимптоте KR имеет с кривой две общих точки, совпадающих в K. (точка касания), значит обе названные выше точки должны совпасть с точкой K, что и доказывает теорему настоящего §.

Нетрудно вывести еще и такое предложение, относящееся к прямым, проходящим через вершину циркулярной прямой.

Так как произведение секущей на ее внешнюю часть есть число постоянное для всех секущих, проведенных из какой-нибудь точки вне окружности к этой последней, то мы можем написать:

$$KL.\ KM = KE.\ KF$$

и $KL^1.\ KM^1 = KE.\ KF$, откуда следует, что

$$KL.\ KM = KL^1.\ KM_1 = constans$$

для всего пучка окружностей, проходящих через точки E и F.

Таким образом:

Если через вершину циркулярной кривой провести прямые линии, то произведение отрезков, которые кривая отсекает на каждой из них—постоянно.

Последнее свойство будет рассмотрено с другой точки зрения во 2-й главе, которая будет трактовать об инверсионном преобразовании.

§ 11. *Укажем в настоящем § свойства циркулярных кривых в связи с главной точкой кривой.*

Ур-ие циркул. кривой, отнесенное к центру, причем ось У параллельна вещественной ассимптоте (§ 5):

$$(x+A_2)\ (x^2+y^2)+D_2x+E_2y+F_2=0 \quad . \quad . \quad . (46)$$

Перенесем оси параллельно прежним так, чтобы начало координат совпало с главной точкой кривой. Координаты главной точки по отношению к системе координат с началом в центре будет:

$$x = -A_2 = +a_1$$

$$y = \frac{D_2A_2 - F_2}{E_2} = +b_1$$

Формулы преобразования будут: $x = x^1+a_1 = x^1-A_2;\ x+A_2 = x^1$. (47)

$$y = y^1+b_1$$

После подстановки в ур-ие (46) выражений x и y из уравнений (47) оно примет такой вид:

$$[(x^1-a_1)^2+(y^1-b_1)^2].x^1+\alpha_1.x^1+\beta_1y^1=O \quad . \quad . \quad . (48)$$

Свободного члена в ур-ии (48) быть не должно, ибо начало координат лежит на кривой. Коэффициенты α_1 и β_1 можно было бы вычислить по формулам § 6, но это не представляется нужным для дальнейшего изложения.

Ур-ию (48) можно придать далее следующую форму:

$$(x^1-a_1)^2+(y^1-b_1)^2 = -\alpha_1-\beta_1\frac{y^1}{x^1} \quad . \quad . \quad . \quad . (49)$$

Для двух точек M_1 и M_2 прямой, проходящей через начало координат, отношение $\frac{y^1}{x^1}$ одно и то же, следовательно на основании уравнения (49) для таких точек будет постоянным и выражение

$$\sqrt{(x^1-a_1)^2+(y^1-b_1)^2}$$

Последнее соотношение легко интерпретировать геометрически, и мы получим тогда такие теоремы:

1) Всякая прямая линия, проходящая через главную точку циркулярной кривой, пересечет кривую еще в двух точках, равноотстоящая от центра циркулярной кривой.

2) Если в середине отрезков, которая данная циркулярная кривая отсекает на лучах, выходящих из ее главной точки, восставим к ним перпендикуляры, то все они сойдутся в центре кривой.

Это очевидное следствие того свойства равнобедренных треугольников, что перпендикуляр, восстановленный в середине основания к нему, проходит через вершину треугольника.

3) Геометрическое место средин отрезков, какие циркулярная кривая отсекает на лучах, проходящих через ее главную точку, есть окружность, проходящая через главную точку и через центр кривой.

Для доказательства последнего предложения возьмем ур-ие циркулярной кривой (начало координат в главной точке):

$$x'[(x'-a_1)^2+(y'-b_1)^2]+\alpha x'+\beta y'=0 \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

и проведем через главную точку (начало координат) какой-нибудь луч. Его уравнение будет:

$$y'=k'x' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Найдем точки пересечения его с циркулярной кривой. Подставив выражение y из (51) в (50), получим:

$$x'[(x'-a_1)^2+(k'x'-b_1)^2]+\alpha x'+\beta k'x'=0 \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Из (52) находим:

$$x_*'=0;\ x'^2-2a_1x'+a_1^2+k'^2x'^2-2k'b_1x'+b_1^2+\alpha+\beta k'=0$$

$$\text{или}\quad (1+k')x'^2-2(a_1+k'b_1)x'+a_1^2+b_1^2+\alpha+\beta k'=0 \quad \text{или}$$

$$x'^2-\frac{2(a_1+k'b_1)}{1+k'b^2}x'+\frac{a_1^2+b_1^2+\alpha+\beta k'}{1+k'}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Из ур-ия (55) найдутся две остальные точки пересечения K и L. Обозначим координаты середины отрезка KL через ξ и η (это и будут координаты искомого геометрического места точек).

В таком случае можно написать:

$$\xi=\frac{x_1'+x_2'}{2}=\frac{a+k'b_1}{1+k'^2};\ \eta=k'\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Для получения ур-ия искомого геометрического места достаточно исключить параметр k' из двух последних уравнений (54). Тогда мы получим:

$$\xi=\frac{a_1+b_1\frac{\eta}{\xi}}{1+\frac{\eta^2}{\xi^2}};\ \xi=\frac{(a_1\xi+b_1\eta)\xi}{\xi^2+\eta^2} \quad \text{или окончательно}$$

$$\xi^2+\eta^2-a_1\xi-b_1\eta=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Последнее ур-ие (55) очевидно представляет окружность, проходящую через точки (0,0) и (a_1 b_1), чем вполне доказывается предложение 3.

Если главные точки кривой на ∽ (кривая в таком случае имеет так называемую Unflexions assymptote — ассимптоту в точке перегиба — об этом будет сказано ниже), то все лучи, проходящие через главную точку, параллельны, а окружность (55) обратится в прямую, и последняя теорема может быть тогда формулирована в следующей редакции: У циркулярной кривой 3-го порядка с вещественной ассимптотой в точке перегиба, перпендикуляр, опущенный из центра на эту ассимптоту, делит пополам все хорды кривой, параллельные этой ассимптоте.

4) Если главная точка является тангенциальной точкой какой-нибудь касательной к циркулярной кривой, то нормаль к циркулярной кривой в точке касания проходит через центр (особенный фокус) циркулярной кривой.

Ур-ие цир. кривой, отнесенное к центру ее, будет

$$(x+A_2)(x^2+y^2)+D_2x+E_2y+F_2=0 \quad \ldots\ldots \quad (56)$$

Перенеся начало координат в точку

$$-A_2=a \qquad \frac{D_2A_2-F_2}{E_2}=b$$

главную точку по формулам $x=x^1-A_2$

$$y=y^1+b$$

мы приведем ур-ие (56) к виду:

$$x'.[(x^1-A_2)^2+(y^1+b)^2]+D_2x^1+E_2y^1=0 \quad \ldots \quad (57)$$

Значки у х у А D и Е в дальнейшем мы опустим для упрощения.

Напишем ур-ие касательной к кривой (57) в какой-ниб. точке х у ее. Текущие координаты касательной обозначим ξ и η.

$$\eta-y=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}(\xi-x) \quad \ldots\ldots \quad (58)$$

где $f(x_1y)=0$ ур-ие кривой.

Произведя выкладки применительно к ур-ию (57), получим:

$$\eta-y=-\frac{(x-A)^2+(y+b)^2+2x(x-A)+D}{2x(y+b)+E}.(\xi-x) \quad \ldots \quad (59)$$

Если касательная (59) проходит через главную точку (начало координат), то мы имеем такое условие:

$$-y=\frac{(x-A)^2+(y+b)^2+2x(x-A)+D}{2x(y+b)+E}.x \quad \ldots\ldots \quad (60)$$

так как из ур-ия кривой $(x-A)^2x+(y+b)^2x=-Dx-Ey$, то (60) можно переписать следующим образом:

$$y=\frac{Dx+Ey-2x^2(x-A)-Dx}{2x(y+b)+E} \quad \text{или}$$

$$2xy(y+b)+Ey=-2x^2(x-A)+Ey \quad \ldots\ldots \quad (61)$$

В окончательной форме условие (61), чтобы касательная в точке ху циркулярной кривой прошла через ее главную точку, может быть переписано таким образом: $y(y+b)=-x(x-A)$ . . . . (62)

Ур-ие нормали к кривой (57) как известно будет:

$$\eta-y=\frac{2x(y+b)+E}{(x-A)^2+(y+b)^2+2x(x-A)+D}(\xi-x) \quad (63)$$

Заменив здесь попрежнему сумму двух первых членов знаменателя из ур-ия кривой через

$$-D-\frac{Ey}{x}, \qquad (63)$$

мы получим:

$$\eta-y=\frac{2x\,(y+b)+E}{\dfrac{-D-Ey+2x\,(x-A)+D}{x}}\,(\xi-x)$$

или по упрощении:

$$\eta-y=\frac{2x\,(y+b)+E}{2x^2(x-A)-Ey}\,.\,x\,.\,(\xi-x) \qquad (64)$$

Если нормаль (64) проходит через центр цирк. кривой, то координаты центра (по отношению к новой системе осей, проходящих через главную точку) должны удовлетворять уравнению (64).

Если координаты главной точки А по отношению к осям ХОУ с началом в центре кривой были А и $+b$, то координаты центра 0 по отношению к осям $x'AУ'$ будут $+A$ и $-b$.

Подставив последние выражения вместо текущих координат в уравнение нормали (64), мы получим:

$$-b-y=\frac{2x(y+b)+E}{-2xy\,(y+b)-Ey}\,.\,x\,(A-x) \qquad (65)$$

$2x^2(x-A)=-2xy(y+b)$ из уравнения (62).

После несложных преобразований ур-ия (65) мы получим:

$$y+b=-\frac{2x(y+b)+E}{y\,[2x\,(y+b)+E]}\,.\,x\,(x-A)$$

или по сокращении:

$$y.(y+b)=-x\,(x-A) \qquad (66)$$

(66) Удовлетворяется тождественно в силу (62).

Таким образом нормаль к циркулярной кривой, изображаемая уравнением (64), действительно проходит через центр кривой.

Ур-ие (56) дает возможность получить так называемую задачу Czuber'a. Действительно, ур-ие (56) может быть переписано в следующем виде:

$$(x+A_2)\,(x^2+y^2)+D_2x+E_2y+F_2=0.$$

Это уравнение, как нетрудно видеть, может быть получено путем исключения R из системы уравнений:

$$x^2+y^2=R^2 \text{ и } (x+A_2)\,(R^2+D_2)+E_2\left\{y-\frac{D_2A_2-F_2}{E_2}\right\}=0 \qquad (67)$$

Первое из ур-ий (67) (при переменном R) дает пучек концентрических окружностей с центром в особенном фокусе кривой, а второе — пучек прямых, проходящих через главную точку кривой.

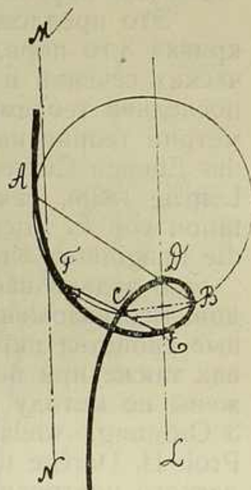
Отсюда и получается теорема Czuber'a:

Всякая циркулярная кривая 3-го порядка может быть образована при помощи пучка прямых и проективного к нему пучка концентрических окружностей. Центром пучка прямых служит главная точка, общим центром всех окружностей служит особенный фокус или центр циркулярной кривой.

Отсюда же непосредственно может быть получена, как следствие теорема I § 11 (теорема Eckhardt'a).

§ 12. Теорема о пучке окружностей, проходящих через две точки циркулярной кривой, может служить для решения задачи о построении касательной к циркулярной кривой в данной на ней точке. Для решения поставленной задачи рассмотрим предварительно такую вспомогательную задачу:

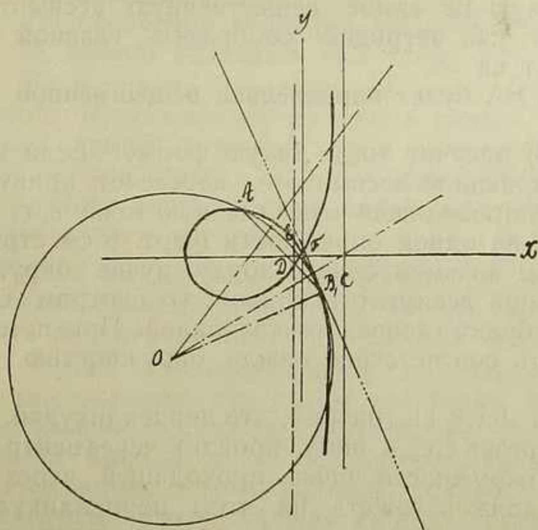
Даны три точки A, B и C на циркул. кривой. Найти четвертую точку F, в которой окружность, проходящая через точки A, B и C, пересечет циркулярную кривую, не проводя самой окружность.



Чертеж 4

Для построения искомой точки F проведем прямую AB (черт. 4) и через точку D ее пересечения с циркулярной кривой проведем прямую DL, параллельную вещественной ассимптоте кривой MN. Точку E пересечения этой прямой с кривой соединяем с третьей точкой C прямой и продолжаем отрезок EC до пересечения с циркулярной кривой. Точка пересечения и будет искомой точкой F. Действительно, на основании теоремы § 8, окружность, проведенная через точки A и Б кривой, пересечет кривую еще в двух точках C и F, соединяющая эти точки прямая должна пересечь кривую в постоянной для всех окружностей пучка AB точке (E); прямая, проведенная через последнюю точку, параллельно вещественной ассимптоте кривой, должна пересечь кривую в точке, лежащей на прямой (AB) (или ее продолжений) в точке D.

Предположим, что через точку A (черт. 5) циркулярной кривой нужно провести окружность, которая бы коснулась ее в некоторой заданной наперед точке B. Эта задача может быть легко сведена к предыдущей. Будем искать точку F, в которой искомая окружность еще раз пересечет кривую. Будем считать точку C совпадающей с точкой B.



Чертеж 5

Соединяем попрежнему точку A с B; через точку D пересечения AB с кривой проводим параллельно вещественной ассимптоте кривой прямую, а точку E пересечения этой прямой с кривой соединяем снова с точкой B.

Точка F пересечения EB с кривой и будет искомой. Остается только провести через точки A F, B окружность. Эта окружность и будет касаться кривой в точке B, т. е будет иметь с кривой в точке B общую касательную.

Если теперь восставить в точке B перпендикуляр к радиусу OB, то полученная таким образом кривая и будет касательной к циркулярной кривой в данной точке B.

§ 13. Теорема, изложенная в начале § 8, есть основная теорема теории циркулярных кривых. Из нее непосредственно вытекает, что циркул. кривая 2-го порядка может быть образована при помощи пучка окружностей и проективного к нему пучка прямых на той же плоскости.

Образуемая таким образом кривая проходит через центры A и B пучка окружностей (см. черт. № 8) через центр E пучка прямых и через две круговых точки плоскости.

Это предложение есть частный случай предложения, что всякая кривая 3-го порядка может быть образована при помощи пучка конических сечений и проективного к нему пучка прямых. При помощи последней теоремы может быть построена методами проективной геометрии теория как кривых 3-го порядка вообще (Schröter Die Theorie der Ebenen Curven dritter Ordnung auf synthetisch-geometrischem Wege Leipzig 1888), так и в частности теория циркулярных кривых (Dissertation von F. Fricke: Ueber ebene Curven dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispuncte gehen. Gotha 1898).

В задачи настоящей работы не входит развитие указанных методов. Все изложение в ней ведется аналитическим методом. Проективные свойства циркулярных кривых будут изложены в следующих главах также при помощи аналитического метода. В этом § будут изложены по методу prof. Durège Über eine leichte Construction der Kurven 3 Ordnung, wielche durch die imaginären Kreispuncte hindurchgehen. Prof. H. Durège in Prag, Zeitschr. Math. u. Phys. XIV 1869), способы легкого построения циркулярных кривых.

Это построение также основано на теории § 8, которую для настоящего случая удобнее редактировать следующим образом: если из точек E и F (см. черт. § 8), в которых циркулярная кривая пересекается с прямой параллельной вещ. ассимптоте, проведены две прямые, напр. FA и EC, то они пересекут кривую каждая еще в двух точках A и B, D и C. Все эти четыре точки всегда лежат на одной и той же окружности. Если возьмем за прямую EF самое вещественную ассимптоту, тогда одна из точек E будет, как нетрудно сообразить, главной точкой кривой, а точка F уйдет на ∞.

В таком случае прямая FA будет параллельна вещественной ассимптоте.

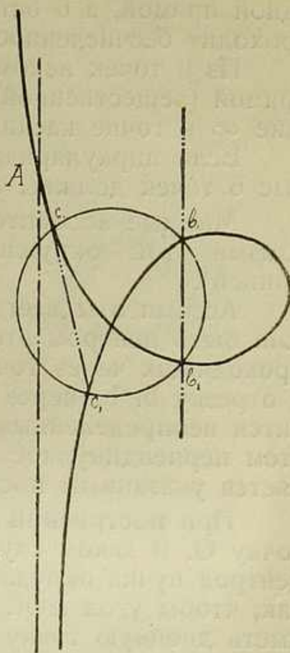
Теорема Eckhardt'a (§ 8) получит тогда такую форму: Если одна прямая, параллельная вещественной ассимптоте, пересечет кривую в точках $b_1 b_2$, а другая прямая, проходящая через главную точку в, c_1 и c_2, то точки b_1, b_2, c_1, c_2 лежат на одной окружности (черт. 6 см. стр. 65).

Таким образом, если мы возьмем общую хорду пучка окружностей параллельно вещественной ассимптоте кривой, то центром соответственного пучка прямых будет главная точка кривой. При помощи теорем § 11 легко установить соответствие между окружностью 1-го пучка и прямой 2-го пучка.

Действительно, теорема 2-я § 11 говорит, что перпендикуляр, восстановленный в середине отрезка $c_1 c_2$ к нему, пройдет через центр циркулярной кривой. Центр M окружности пучка, проходящей через четыре точки $b_1 b_2 c_1 c_2$, также должен лежать на этом перпендикуляре. Отсюда непосредственно вытекает, что линия Ac_1, проходящая через главную точку, перпендикулярно к линии MC, соединяющей центр кривой с центром окружности пучка, пересечет эту окружность в точках c_1 и c_2, лежащих на циркулярной кривой. Таким образом, вопрос об определении луча, соответствующего данной окружности пучка, разрешается вполне.

Самое построение кривой выполняется следующим образом: выбирают две произвольные точки b_1 и b_2. Также произвольно выбирается главная точка A кривой и ее центр C. Точками b_1 и b_2 определяются концы общей хорды пучка окружностей и направление вещественной ассимптоты кривой,

Проводим затем через точки b_1 и b_2 произвольную окружность, соединим ее центр M с центром кривой C и из главной точки кривой A опускаем на MC перпендикуляр, последний пересечет окружность в двух точках, лежащих на циркулярной кривой. Такое построение может быть повторено для каждой из окружностей пучка и, следовательно, мы можем построить таким способом, сколько угодно точек кривой.



Чертеж 6

Точки b_1 и b_2 совершенно произвольны. Точка A подчинена только одному условию: она не должна лежать на прямой, проходящей через b_1 b_2. [Если бы сама прямая b_1 b_2 была вещественной ассимптотой, то точки b_1 и b_2 должны были бы уйти на ∞].

Точка C подчинена одному условию: она не должна лежать на линии центров пучка окружностей. Если точка C лежит на этой линии, то MC сохраняет постоянное направление—линии центров пучка окружностей, и предыдущее построение не дает определенных точек кривой, ибо все точки пересечения луча с окружностями пучка лежат на одной и той же прямой b_1b_2.

Примечание к § 13.

На основании редакции 1-й и 2-й теоремы Eckhardt'a, приведенных в § 13, можно высказать еще такие 2 предложения:

Если прямая, параллельная вещественной ассимптоте, циркулярной кривой, пересекает эту кривую в точках a и c и если касательные к цирк. кривой в точках a и c пересекут кривую в точках A и C, то 1) четыре точки a, c A и C лежат на одной окружности, 2) прямая AC пройдет через главную точку циркулярной кривой. Доказательство предоставляем читателю.

§ 14. Посмотрим, определенно-ли указанное в § 13 построение циркулярной кривой вообще, т. е. при выборе точек b_1 b_2 A и C получается ли единственная циркулярная кривая.

Решим сначала вопрос о том, сколько точек кривой задается таким построением. Мы имеем две точки b_1 и b_2. Точкой A задается вещественная ассимптота кривой, на которой лежат еще две точки искомой кривой на ∞ (ассимптота касается кривой на ∞). Таким образом имеем 5 точек кривой. Точкой C определяются две мнимых ассимптоты кривой, каждая из них содержит по две точки кривой, совпадающих в круговых точках J и j. Таким образом искомая кривая задается 9-ю ее точками.

Но через 9 точек при особом их расположении на плоскости может проходить пучек кривых 3-го порядка (Лемма § 8).

Является теперь вопрос, не представляют ли эти 9 точек такого исключительного расположения?

Известно, что если 9 точек образованы пересечением двух циркулярных кривых 3-го порядка и три из них лежат на одной прямой, то остальные 6 должны лежать на одной окружности. (Лемма § 8 примечание).

И обратно, если из 9 точек циркулярной кривой три лежат на одной прямой, а 6 остальных на окружности, то через эти 9 точек проходит бесчисленное множество циркулярных кривых.

Из 9 точек искомой циркулярной кривой три лежат на одной прямой (вещественной ассимптоте), именно точка A и две совпадающие $\backsim$ в точке касания ее с кривой.

Если циркулярная кривая не однозначно определяется, то остальные 6 точек должны по предыдущему лежать на одной окружности.

Мнимые ассимптоты искомой кривой должны быть также ассимптомами этой окружности (в точках j и J совпадают по две точки кривой).

Ассимптоты всегда пересекаются в центре. Значит точка C должна быть центром этой окружности. Но центры всех окружностей, проходящих через точки b_1 b_2, лежат на перпендикуляре, проведенном к отрезку b_1 b_2 через его средину. Таким образом построение становится неопределенным тогда и только тогда, когда центр C лежит на этом перпендикуляре. За исключением этого случая кривая определяется указанным построением однозначно.

При построении кривой можно точки b_1 и b_2 совместить в одну точку O. В таком случае остается произвольным направление линии центров пучка окружностей. Если, кроме того, выбрать точки A и C так, чтобы угол AOC был прямым, то построенная кривая будет иметь двойную точку b O. [Это свойство является непосредственным следствием теоремы 2 § 11. В двойной точке длина отрезка становится равной O, и перпендикуляр из его средины к нему и будет перпендикуляром к прямой, соединяющей главную точку кривой и ее двойную точку в последней точке].

Это свойство кривых с двойной точкой будет указано ниже.

Примечание к § 14.

Кривая может быть задана или достаточным числом ее точек или другими условиями, эквивалентными такому числу ее точек. Напр., окружность однозначно задается тремя ее точками, не лежащими на одной прямой.

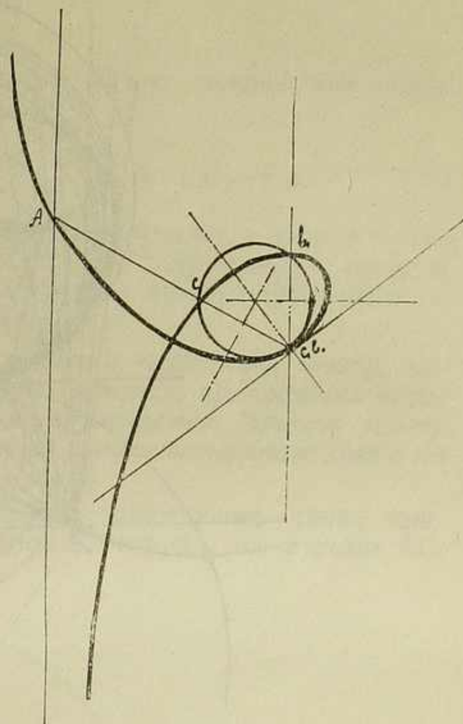
Эти три точки вместе с двумя круговыми точками j и J дают 5 точек, какими вообще задается кривая 2-го порядка. Но окружность можно также однозначно задать по ее центру и одной какой-либо точке, лежащей на ней. Легко показать, что такое задание сводится также к заданию 5 точек окружности. Действительно, заданием центра окружности вполне определяются ее две мнимых ассимптоты (изворотные прямые). На каждой из этих прямых лежит по две совпадающих точки окружности (ассимптота касается кривой на $\backsim$). Таким образом мы имеем 4 точки кривой, а вместе с отдельно заданной — пять точек. Аналогичный прием задания циркулярной кривой применен в § 14 при задании циркулярной кривой по точкам. Ур-ие циркулярной кривой содерж. 8 коэффициентов, следовательно она зависит от 7 параметров. Так как координаты центра выражаются через коэффициенты общего уравнения (формулы § 2), то заданием координат центра мы уменьшаем число независимых коэффициентов до 6.

Задание координат главной точки уменьшает это число до 4.

Два центра пучка (они лежат на кривой) сводят это число до 2.

Задание направления вещественной ассимптоты позволяет написать ее уравнение (главная точка дана выше). Условия двойного бесконечного корня для уравнений вещественной ассимптоты и кривой дают возможность определить два последних коэффициента уравнения кривой.

§ 15. Теоремой Eckhardt'а во второй редакции ее § 13 можно также воспользоваться для более простого построения касательной к циркулярной кривой в данной точке; если главная точка кривой не лежит на ∽, для этого достаточно (черт. 7) совместить точку c_1 с точкой b_2, тогда проведенная окружность коснется кривой в этой точке.



Чертеж 7

Отсюда вытекает следующее построение касательной к циркулярной кривой в данной точке: соединяют данную точку ($c_1 b_2$) с главной точкой кривой и проводят через эту же данную точку прямую параллельную вещественной ассимптоте. Первая прямая пересечет кривую еще в точке c_2, вторая в точке b_1. Из средины отрезков ($c_1 b_2$) c_2 и ($c_1 b_2$) b_2 восставляют к ним перпендикуляры. Точка их пересечения очевидно будет центром окружности, касающемся кривой в данной точке. Соединив этот центр с данной точкой на кривой, найдем нормаль в данной точке. Построение касательной сведется к проведению прямой, перпендикулярной к нормали.

Чертежи 8—14 изображают циркулярные кривые при различных положениях центров пучка.

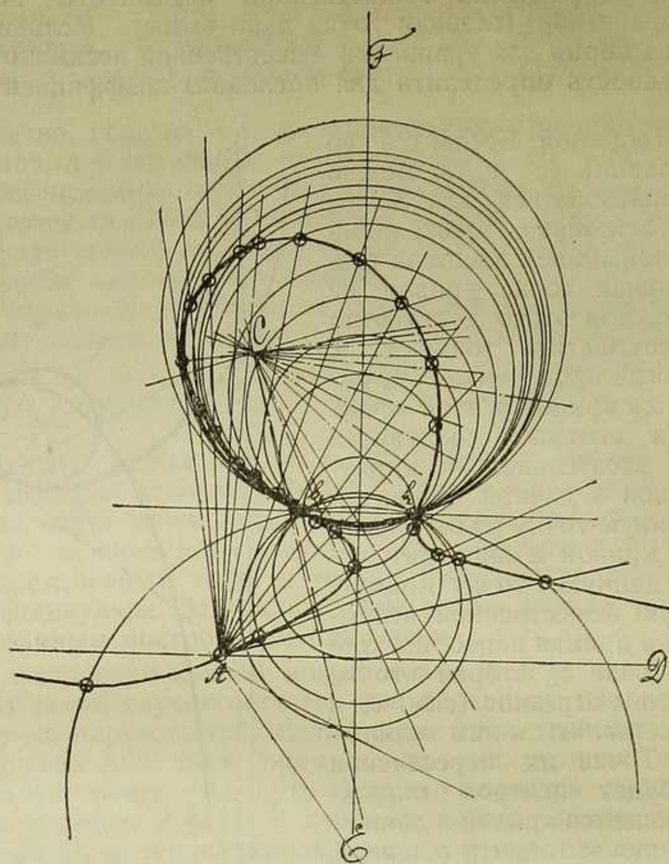
Чертеж 8 соответствует общему случаю, когда центры пучка различны. Полученная циркулярная кривая состоит из одной ветви. EF—линия центров пучка окружностей. C—центр кривой; A—главная точка; b_1 и b_2—центры пучка окружностей; AD вещественная ассимптота.

Черт. 9 изображает циркулярную кривую, состоящую из двух ветвей: бесконечной ветви и замкнутого овала.

EF линия центров пучка. A главная точка. C центр циркулярной кривой. AD вещественная ассимптота. Центры пучка окружностей совпадают в одной точке. Все окружности пучка касательны в точке $b_{1,2}$.

Черт. 10 изображает циркулярную кривую, состоящую из одной ветви, и имеющую двойную узловую точку в центре пучка окружностей. Центры пучка окружностей совпадают в точке $b_{1,2}$. Главная точка кривой A и ее центр C взяты так, чтобы $\angle A b_{12} C$ был прямым. EF—линия центров пучка окружностей. AD вещественная ассимптота.

Таким образом циркулярная кривая: 1) состоит из одной ветви, если пучек окружностей имеет два центра (черт. 8);



Чертеж 8

2) состоит из двух отдельных ветвей незамкнутой и эллиптического овала, если пучек окружностей имеет один центр, но прямые, соединяющие этот центр с главной точкой и центром кривой, не взаимно перпендикулярны (черт. 9);

3) состоит из одной ветви с двойной точкой, если окружности пучка имеют один центр и, кроме того, прямые, соединяющие его с главной точкой и центром кривой, взаимно перпендикулярны (черт. 10).

§ 16. Такие точки кривой, касательные в которых пересекаются на самой кривой, наз. сопряженными точками.

Если точка пересечения мнимых ассимптот (касательных к кривой на ∞)—центр кривой лежит на самой циркулярной кривой, то точки J и j будут сопряженными точками на ней. Свойства таких циркулярных кривых будут указаны ниже в главе о фокальных кривых. Такие кривые называются иногда Kreispunctkurven (Müller, Zeitshr. für Math. LX 1895). Здесь укажем лишь их общие свойства в связи с их построением. Если уравнение такой кривой привести к виду 18 § 5, то она примет форму

$$(x+A_2)\,(x^2+y^2)+D_2+E_2y=O, \qquad (68)$$

свободный F_2 должен обратиться в нуль, так как начало координат лежит на кривой. Координаты главной точки будут:

$$x = -A_2;\ y = \frac{D_2 A_2}{E_2} \tag{69}$$

а уравнение средней линии:

$$x = -\frac{A_2}{2}$$

Ур-ие кривой может быть получено путем исключения параметра k из системы уравнений:

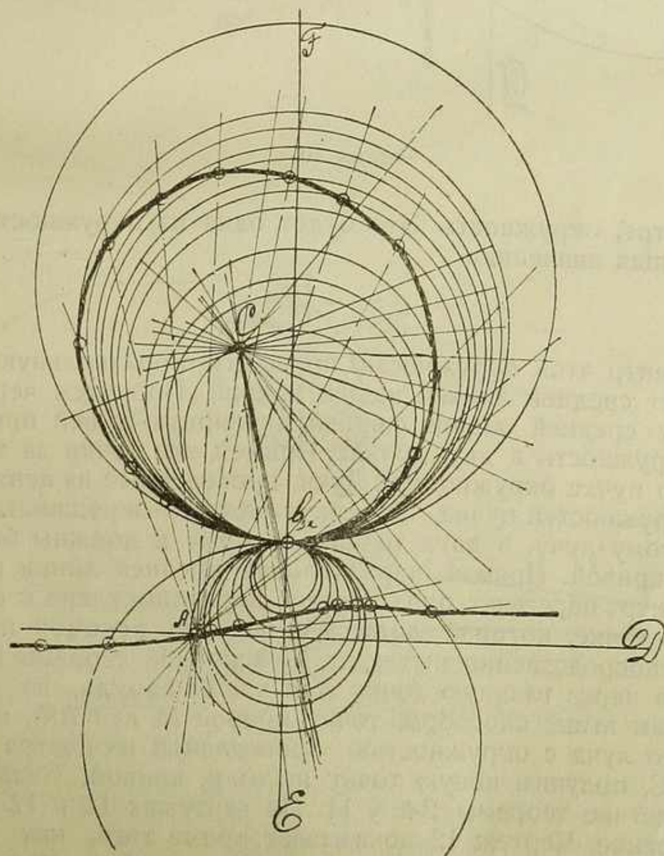
$$y = kx;\ \left(x + \frac{A_2}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{kA_2}{2}\right)^2 = \frac{1+k^2}{4}A_2^2 - D_2 - E_2k \tag{70}$$

Первое из ур-ий (70) представляет пучек прямых, а второе пучек окружностей, которых центры лежат в точках пересечения средней линии циркулярной кривой с соответственными лучами пучка прямых.

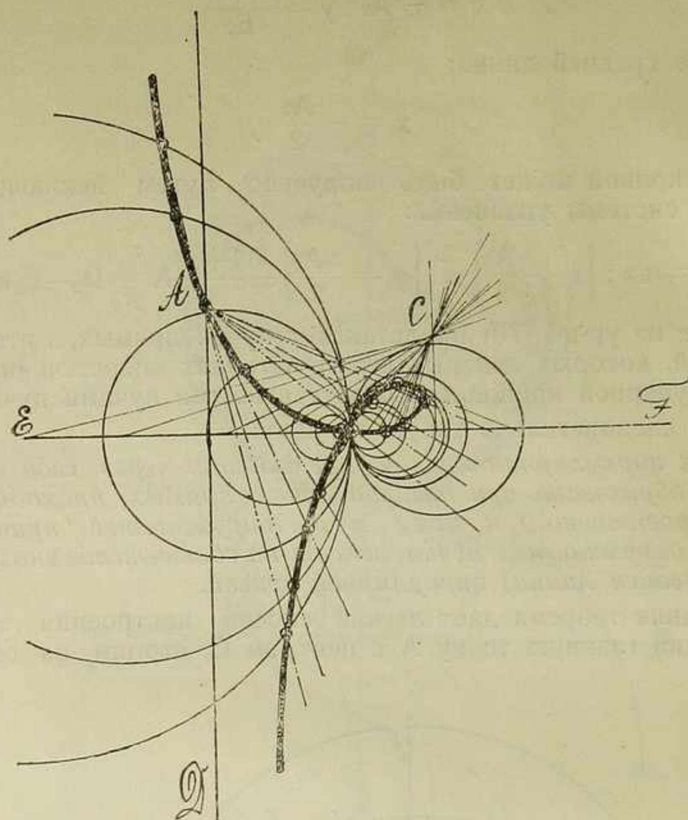
Имеем следовательно такую теорему:

Всякая циркулярная кривая, проходящая через свой центр, может быть образована при помощи пучка прямых, проходящих через центр и проективного к нему пучка оиружностей, причем центр каждой из окружностей пучка лежит на соответственном луче и на медиане (средней линии) циркулярной кривой.

Последняя теорема дает легкий способ построения таких кривых: соединив главную точку А с центром С, строим на отрезке АС,



Чертеж 9



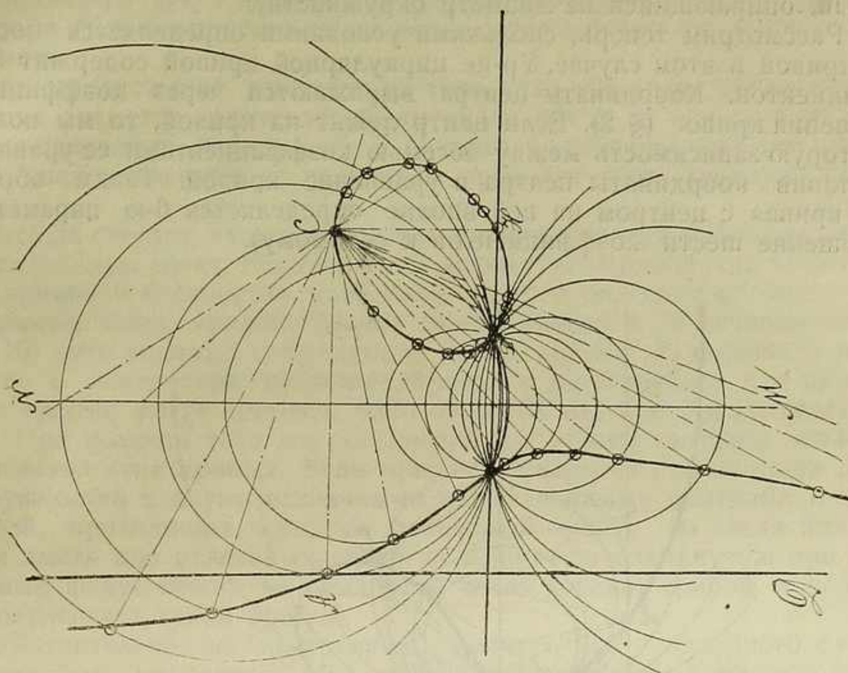
Чертеж 10

как на диаметре, окружность. Это будет одна из окружностей пучка, соответствующая значению.

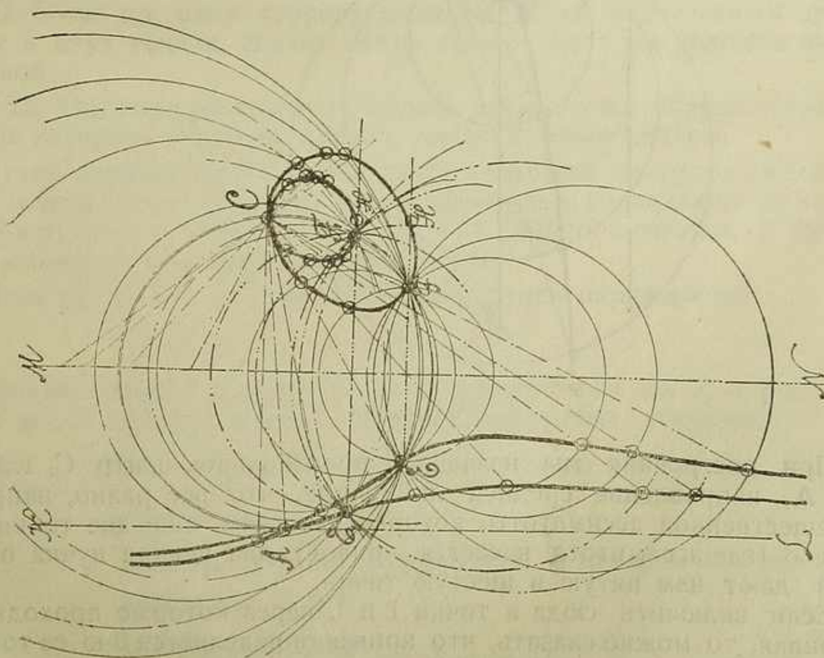
$$к = -\frac{D_2}{E_2}$$

Через центр этой окружности проводим произвольную прямую, которая будет средней линией нашей кривой. Проведем через какую-нибудь точку средней линии перпендикулярную к ней прямую. Она пересечет окружность в двух точках. Примем эти точки за точки кривой и центры пучка окружностей. Лучи, проведенные из центра кривой в центры окружностей пучка, пересекут каждую окружность, соответствующую этому лучу, в двух точках, которые и должны быть точками искомой кривой. Прямая, параллельная средней линии и проходящая через центр, пересечет продолжение перпендикуляра к средней линии также в точке, которая должна лежать на искомой кривой. Все сказанное непосредственно вытекает из основной теоремы § 8.

Проведя через главную точку A и какую-нибудь, из определенных указанным выше способом, точку кривой M луч AM, мы на пересечении этого луча с окружностью проведенной из центра кривой C, радиусом MC, получим новую точку искомой кривой. Сказанное есть простое следствие теоремы 2-й § 11. На чертежах 11 и 12 выполнено такое построение. Чертеж 12 показывает кроме того, как изменяется кривая при изменении центров пучка окружностей при прочих равных условиях.



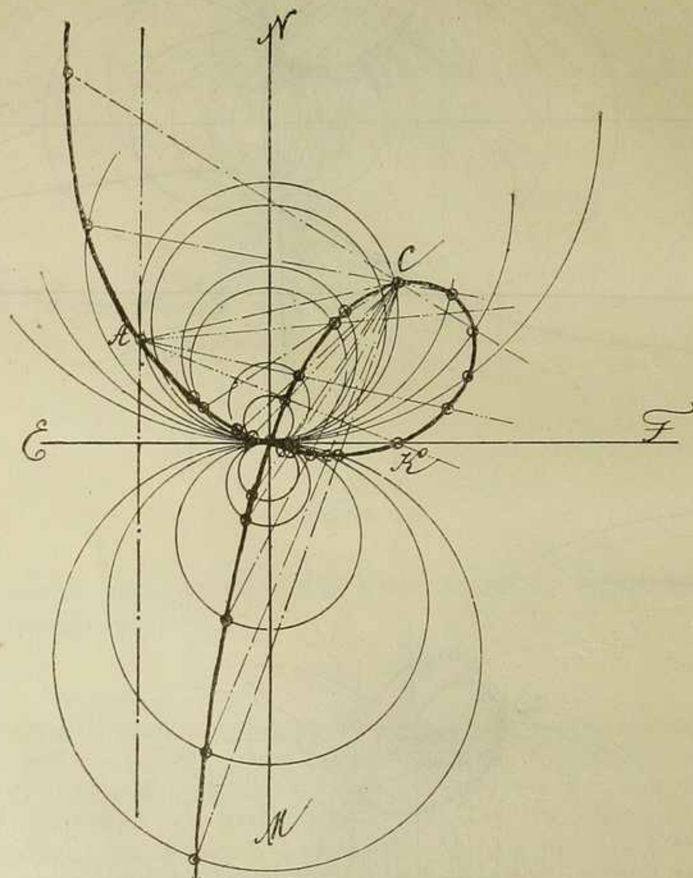
Чертеж 11



Чертеж 12

Чертеж (13) изображает кривую, получившуюся при совмещении центров пучка окружностей в одну точку. Кривая получилась с двойной точкой, как и следовало ожидать, ибо угол АОС—прямой (вписанный, опирающийся на диаметр окружности).

Рассмотрим теперь, сколькими условиями определяется построение кривой в этом случае. Ур-ие циркулярной кривой содержит 8 коэффициентов. Координаты центра выражаются через коэффициенты уравнения кривой (§ 2). Если центр лежит на кривой, то мы получим некоторую зависимость между восемью коэффициентами ее уравнения, подставив координаты центра в уравнение кривой. Таким образом, цир. кривая с центром на ней вполне определяется 6-ю параметрами (отношение шести коэффициентов к седьмому).



Чертеж 13

При построении мы назначаем произвольно: центр С, главную точку А, направление средней линии или, что все равно, направление вещественной ассимптоты, которая дает нам еще две точки кривой на ∞ (где ассимптота касается кривой), два центра пучка окружностей дают нам пятую и шестую точки.

Если включить сюда и точки I и Ī, через которые проходит наша кривая, то можно сказать, что кривая определяется 8-ю ее точками вместо 9 у циркулярных кривых общего вида. Число точек уменьшается на одну вследствие добавочного условия относительно нахождения центра на самой кривой.

§ 17. Относительно кривых последнего рода в связи с указанным построением их можно высказать следующую теорему: *если через центр циркулярной кривой, имеющей свой особый фокус на ней самой, провести луч, встречающий кривую еще в двух точках, то обе эти точки будут находиться на равном расстоянии от средней линии кривой.*

Это предложение вытекает из того, что обе такие точки лежат на концах диаметра окружностей, имеющих центр на средней линии.

На основании теоремы 2 § 11 прямая, соединяющая две точки кривой, равноудаленные от ее центра, проходит через главную точку кривой.

Отсюда следует, что касательная к кривой в центре ее должна пройти через главную точку. Вещественная ассимптота кривой есть касательная к кривой в бесконечно удаленной точке, и она тоже проходит через главную точку кривой. Значит центр кривой и ее главная точка (см. § 16) суть взаимно сопряженные точки кривой. Указанное в предыдущем § построение позволяет притти к заключению, что циркулярные кривые могут состоять либо из одной либо из двух отдельных ветвей. При помощи того же построения мы можем заметить некоторые свойства этих кривых. Если кривая образована при помощи пучка окружностей с двумя различными вещественными центрами и пучка лучей, проходящих через ее особенный фокус, то такая кривая должна иметь две отдельных ветви: незамкнутую и замкнутую, при чем особенный фокус лежит на замкнутой ветви (овале) кривой, а медиана не пересекает такой кривой.

Действительно, из построения вытекает, что у линейного пучка не может быть ни одного луча, который пересек бы кривую в двух совпадающих точках. Значит всякая прямая, проходящая через центр кривой, пересекает ее еще в двух различных точках, равноудаленных от медианы кривой. Следовательно центр и одна из таких точек должны быть по одну сторону медианы. Овал пересекается прямой вообще в двух точках, значит центр должен быть расположен на овале кривой.

§ 18. Остается рассмотреть случай, когда пучек окружностей, при помощи которого строится кривая, имеет мнимые центры.

Пучек окружностей с двумя вещественными центрами называется иногда *гиперболическим*, пучек с двумя центрами, совпадающими в одной точке (окружности пучка касаются) наз. *параболическим*, а пучек с двумя мнимыми центрами *эллиптическим*.

Итак пусть нам дан эллиптический пучек окружностей:

$$U+\kappa U_1=0. \qquad (71)$$

Возьмем линию центров окружностей пучка за ось X, а радикальную за ось У прямоугольной системы Декартовых координат.

Возьмем за U_1 самое радикальную ось (окруж. радиуса, равной ∞), а

за U какую-ниб. окружность с центром на оси X. Ее уравнение будет:

$$x^2+y^2+Ax+C=0 \qquad (72)$$

где A и C некоторые постоянные. Уравнение пучка напишется тогда в такой форме:

$$x^2+y^2+Ax+C+kx=0 \quad \ldots \quad (73)$$

ибо уравнение рад. оси в нашем случае будет $x=0$.

Ур-ие пучка может быть переписано таким образом:

$$x^2+y^2-2\alpha x+m^2=0 \quad \ldots \quad (74)$$

где $2\alpha=-(A+k)$, $m^2=C$.

Геометрическое значение m есть длина касательной, проведенной из начала координат к любой из окружностей пучка. Действительно,

$OM=\sqrt{ON^2-MN^2}$ но $ON=\alpha$; $MN^2=\alpha^2-C=\alpha^2-m^2$, $OM=\sqrt{\alpha^2-\alpha^2+m^2}=m$

(черт. 15.) число m постоянно для всех окружностей пучка. Оно вещественно, если $\alpha^2>r^2$, ибо $MN=r$—радиусу окружности пучка, и мнимо в случае $\alpha^2<r^2$.

Таким образом, уравнение (74) зависит от одного только параметра α и выражает все окружности пучка с линией центров на оси x. Если положим в уравнении (74) $\alpha=\mp m$, то мы получим:

$$(x\mp m)^2+y^2=0 \quad \ldots \quad (75)$$

Ур-ие (75) выражают две окружности нулевого радиуса с координатами центров $(+m, o)$ и $(-m, o)$ Следовательно, если мы имеем эллиптический пучек окружностей (не пересекающихся с радикальной осью), то на линии центров их существуют две действительные точки, находящиеся от радикальной оси в расстояниях $+m$ и $-m$. Их можно считать за две бесконечно малые окружности пучка. Эти точки называются *предельными* точками эллиптического пучка (*Poncelet*).

Найдем ур-ие пучка ортогонального данному эллиптическому пучку. Для этого напишем общее уравнение окружностей в нормальной форме:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0. \quad \ldots \quad (76)$$

и подберем его коэффициенты так, чтобы окружности, изображаемые уравнением (76), были ортогональны к окружностям пучка, изображаемого уравнением (74) при всяком α. Как известно, условие ортогональности двух окружностей $(r_1^2+r^2=d^2)$ в данном случае будет:

$$-2a\alpha+b.0=2(m^2+c) \quad \ldots \quad (77)$$

Так как условие (77) должно выполняться при всяком α, то мы должны иметь:

$$a=o\ ;\ m^2+c=0. \quad \ldots \quad (78)$$

Значит уравнение (76) может быть на основании (78) переписано так:

$$x^2+y^2+by-m^2=0. \quad \ldots \quad (79)$$

Обозначив для симметрии b через -2β, перепишем ур-ие (79) в следующей форме:

$$x^2+y^2-2\beta y-m^2=0 \quad \ldots \quad (80)$$

Ур-ие (80) также зависит от одного параметра β и след. выражает пучек окружностей с линией центров на оси $У$ и с радикальной осью на оси X. Сравнив уравнения (74) и (80)

$$x^2+y^2-2\alpha x+m^2=0 \text{ и} \qquad (81)$$
$$x^2+y^2-2\beta y-m^2=0 \qquad (82)$$

мы видим, что (81) дает пучек окружностей *с мнимыми центрами*, ибо для координат точек пересечения с осью x получаем ур-ие:

$$y^2+m^2=0$$

из которого координаты центров пучка (81) будут $(0, +mi)$ и $(0, -mi)$ —мнимые.

Окружности же второго пучка (82) имеют вещественные центры $(+m, 0)$ и $(-m, 0)$. При $m=o$ центры обоих ортогональных пучков совпадают в начале координат.

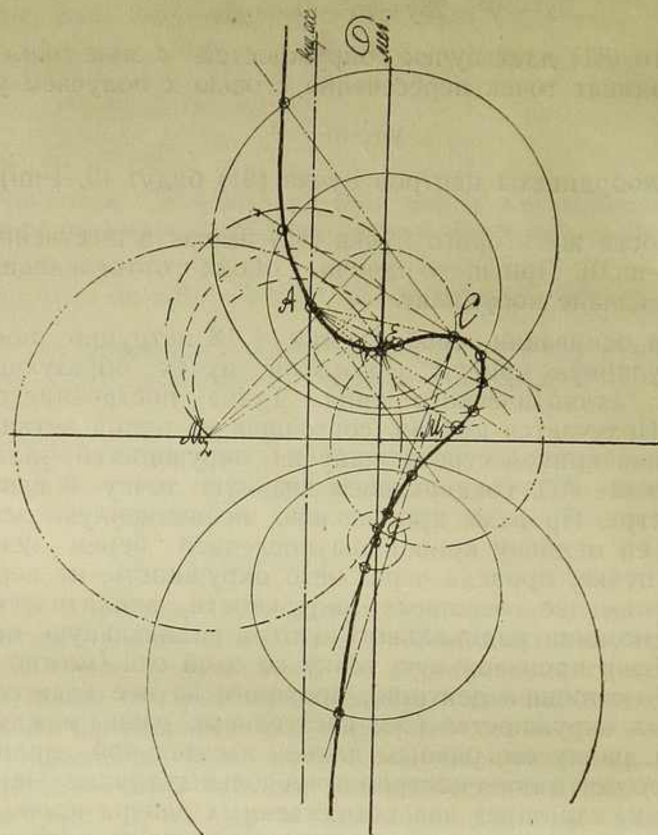
§ 19. На основании соображений § 18 нетрудно построить по точкам циркулярную кривую, у которой пучек образующих окружностей будет эллиптического типа. Такое построение сделано на чертеже 14. Получается кривая, состоящая из одной ветви (*unzügige*). Для построения кривой строим одну из окружностей эллиптического пучка на отрезке АС, соединяющем главную точку и центр кривой, как на диаметре. Проведя произвольно вещественную ассимптоту и параллельно ей медиану кривой, на последней берем центр второй окружности пучка, проведя через него окружность, не пересекающую первой, получим две основных окружности эллиптического пучка. Строим при помощи радикального центра радикальную ось этих окружностей. Взяв произвольную точку на этой оси (можно взять точку пересечения α с линией центров), проводим из нее касательную к одной из данных окружностей (обе касательные равны между собою). Из взятой точки, радиусом, равным длине касательной, проводим дугу, которая пересечет линию центров в предельных точках. Через эти предельные точки, как через два вещественных центра проводим две окружности. Все окружности эллиптического пучка получим, если будем проводить из различных точек линии центров (средней линии кривой) касательные к одной из окружностей гиперболического ортогонального пучка, и описывать около взятой точки окружности радиусами, равными длине проведенной касательной.

В остальном построение точек искомой кривой делается попрежнему: через особый фокус и центр окружности пучка проводят луч и отмечают точки его пересечения со взятой окружностью пучка.

Любое число окружностей эллиптического пучка можно получить из соображений § 18 относительно геометрического значения коэффициента c в уравнениях ортогональных пучков.

Для этого достаточно из точки пересечения средней линии и радикальной оси провести касательную к одной из окружностей пучка. Описав радиусом, равным длине этой касательной, окружность (она даст в пересечении с медианой кривой предельные точки), будем проводить по различным направлениям радиусы этой окружности, а в концах их, лежащей на ней, восстановим перпендикуляры к ним. Точки пересечения последних с медианой определят центры соответствующих окружностей эллиптического пучка, а длины перпендикуляров дадут радиусы этих окружностей.

При вычерчивании точек кривой при помощи циркуля и двух наугольников последний способ значительно проще. Если оба центра совпадают, то этот случай принадлежит к предельным, и мы будем иметь два ортогональных пучка окружностей, касающихся в общей точке. Кривая в этом случае, как показано на черт. 13, имеет двойную точку.



Чертеж 14

§ 20. Кривая с центром на ней самой может быть рассматриваема как геометрическое место точек прикосновения касательных, проведенных из ее центра, к каждой из окружностей гиперболического пучка, причем радикальною осью этого пучка будет медиана кривой, а линией центров перпендикуляр к последней в точке, делящей пополам расстояние между вещественными центрами гиперболического пучка.

Действительно, возьмем гипербол. пучок окружностей

$$x^2+y^2-2\alpha x-m^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

Проведем из центра кривой $C(a,b)$ касательные к какой-нибудь из окружностей пучка (83). Пусть координаты точки касания M будут $(x_1\, y_1)$. Тогда уравнение касательной к одной из окружностей (83) в точке M будет:

$$xx_1+yy_1-\alpha(x+x_1)-m^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

Так как касательная должна пройти через центр кривой, то мы должны иметь условие:

$$ax_1+by_1-\alpha(a+x_1)-m^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

Кроме того, точка $x_1\, y_1$ лежит на окружности пучка следовательно:

$$x_1^2+y_1^2-2\alpha x_1-m^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

Исключив из уравнений (86) и (85) параметр α и рассматривая x_1 y_1 как текущие координаты, получим уравнение искомого геометрического места точек прикосновения касательных из точки C(a,b) ко всевозможным окружностям пучка. Из (86)

$$\alpha = \frac{x_1^2 + y_1^2 - m^2}{2x_1}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (87)$$

Подставив выражение α из (87) в (85), мы найдем

$$ax_1 + by_1 - \frac{x_1^2 + y_1^2 - m^2}{2x_1}(a + x_1) - m^2 = 0 \quad . \ . \ (88)$$

После упрощения (88) легко находим

$$(a + x_1)(x_1^2 + y_1^2) - 2ax_1^2 - 2bx_1y_1 + m^2x_1 - m^2a = 0 \quad . \ . \ . \ . \ (89)$$

Ур-ие (89) показывает, что искомое геометрическое место есть *циркулярная кривая 3-го порядка.* Точка C (a,b) лежит на искомой кривой (89), ибо после подстановки в уравнении (89) a и b вместо текущих координат мы получим тождество:

$$a^2 + b^2 - a^2 - b^2 = 0.$$

Перенеся начало координат в точку $C(a,_1b)$ по формулам

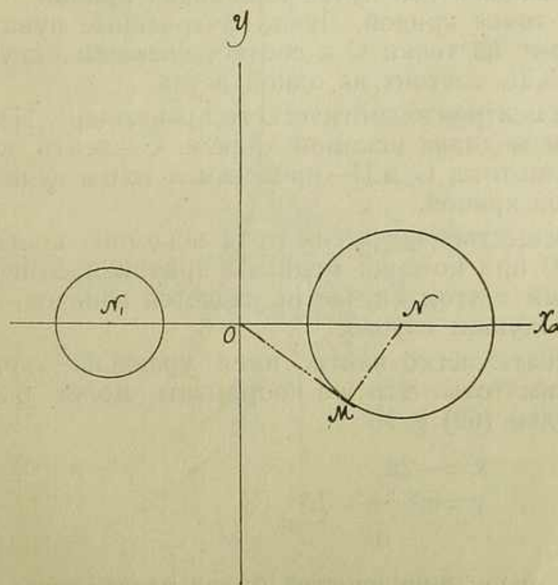
$$a_1 = x^1 + a$$
$$y_1 = y^1 + b,$$

мы получим после некоторых упрощений:

$$(x^1 + 2a)(x^{12} + y^{12}) + (m^2 - b^2 - a^2)x^1 + 2aby^1 = 0, \quad . \ . \ . \ . \ . \ (90)$$

т. е. уравнение вида (68) § 16.

Итак, в случае гиперболического пучка получается кривая, состоящая из одной ветви (черт. 16).



Чертеж 15

В случае эллиптического пучка получается кривая, состоящая из двух ветвей черт. 17. (Обратно построениям, сделанным в § 19).

Таким образом, изложенные только что способы построения позволяют высказать следующее предложение: Всякая циркулярная кривая с особенным фокусом на ней самой может быть получена, как геометрическое место точек прикосновения касательных, проведенных из некоторой точки (центра кривой) к пучку окружностей с вещественными или мнимыми центрами. Если пучек гиперболический, то кривая состоит из одной ветви. В случае эллиптического пучка получается кривая, состоящая из двух ветвей.

Сопоставив эту теорему с теоремой предыдущего §, можно сказать, *что одна и та же циркулярная* кривая с центром на ней самой может быть образована либо при помощи пучка окружностей и проективного к нему пучка лучей-диаметральных соответственным окружностям пучка, либо при помощи ортогонального к первому пучка окружностей и пучка лучей, касательных к этому ортогональному пучку, проведенных из того же центра.

§ 21. Рассмотрим, сколько точек искомой кривой задается при ее построении по способу § 20. Заданием центра кривой (одна точка) вполне определяются обе изотропные прямые—мнимые ассимптоты искомой кривой; на каждой из этих ассимптот находятся по две точки искомой кривой (на ∞) [итого с прежней имеем 5 точек].

Два центра окружностей пучка задают 6-ю и 7-ю точки. Заданием радикальной оси пучка—медианы искомой кривой—при заданном центре вполне определяется вещественная ассимптота кривой, на ней лежат 8-я и 9-я точки искомой кривой (в точке пересечения вещественной ассимптоты с бесконечно-удаленной прямой).

На ассимптоте совпадают две точки кривой. Итого имеем 9 точек, как и в предыдущем построении.

Чертеж 16. C центр кривой. E и E_1 центры гиперболического пучка окружностей [1])
MN вещественная ассимптота
EE_1—радикальная ось пучка и медиана кривой
A главная точка кривой. Лучи, начерченные пунктиром—суть касательные из точки C к соответственным окружностям пучка.
Кривая $AECE_1$ состоит из одной ветви.

KL—линия центров эллиптического пучка. (черт. 17) MN—радикальная ось пучка и медиана искомой кривой. C—центр кривой. EF—вещественная ассимптота. G и H—предельные точки пучка. G—совпадает с главной точкой кривой.

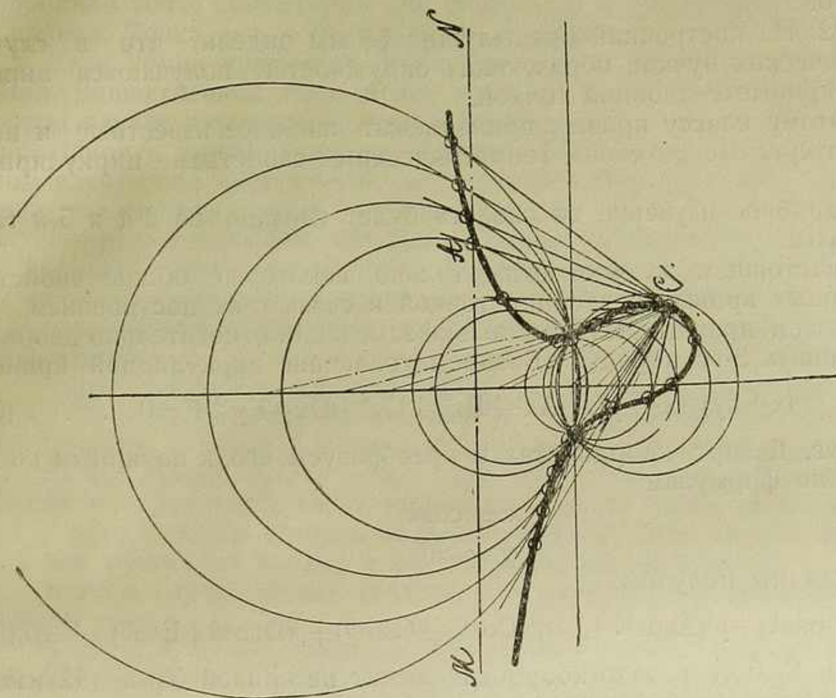
Так как вещественная ассимптота искомой кривой задается в построении § 20 при помощи медианы кривой и ее центра, то главная точка кривой в этом случае не задается наперед, как это было сделано в предыдущем случае.

Ее координаты легко найти, имея уравнение кривой и ее вещественной ассимптоты. Эти же координаты могут быть сразу написаны по формулам (69) § 16

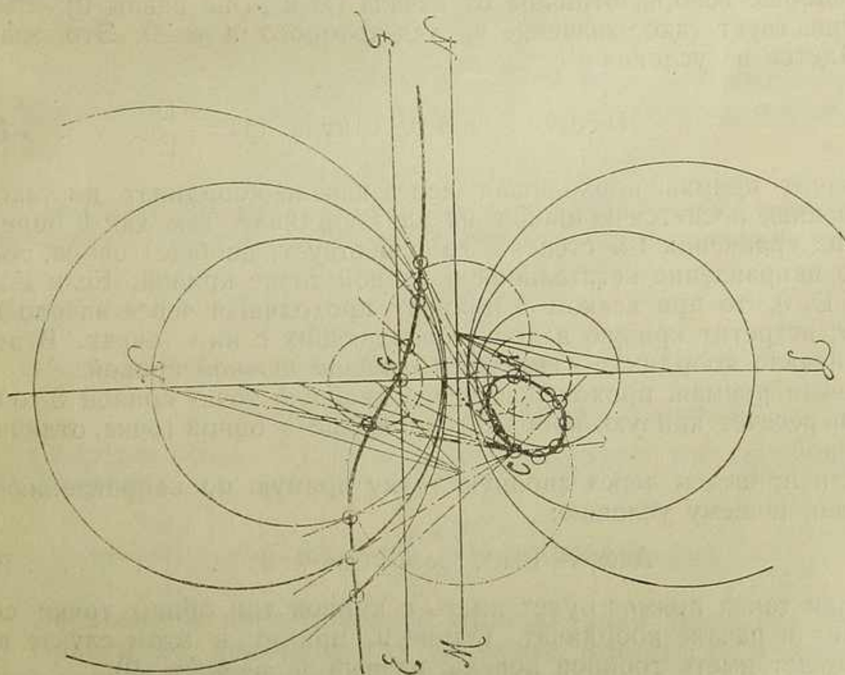
$$x = -2a$$
$$y = \frac{m^2 + a^2 - b^2}{b}$$

При m=o пучек окружностей будет параболическим. Кривая в этом случае, как и раньше, будет иметь двойную точку в пересечении

[1]) Буквы E и E_1 на чертеже не поставлены.



Чертеж 16



Чертеж 17

медианы с линией центров. Координаты этой точки $(-a,-b)$ по отношению к осям x^1Cy^1 удовлетворяют ур-ию кривой: $a(a^2+b^2)-a^3+ab^2-2ab^2=0$.

§ 22. Из построений предыдущих §§ мы видели, что в случае параболических пучков образующих окружностей получаются циркулярные кривые с двойной точкой.

К этому классу кривых принадлежат наиболее известные и наиболее интересные по своим геометрическим свойствам циркулярные кривые.

Подробное изучение их свойств будет сделано во 2-й и 5-й главах работы.

В настоящем же § отметим только некоторые общие свойства циркулярных кривых с двойной точкой в связи с их построением.

Сделаем прежде всего несколько замечаний относительно двойных точек кривых 3-го порядка. Возьмем уравнение циркулярной кривой:

$$(ax+by)(x^2+y^2)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

в прямоуг. Декарт. координатах и преобразуем его к полярным координатам по формулам

$$x=\rho.\cos\theta$$
$$y=\rho.\text{sn}\theta$$

Тогда мы получим:

$$\rho^3(a\cos\theta+b\,\text{sn}\theta)+\rho^2(A\cos^2\theta+B\,\text{sn}\theta.\text{Cos}\theta+C\,\text{sn}^2\theta)+\rho(D\cos\theta+E\,\text{sn}\theta)+F=0.(92)$$

Если $F=0$, то начало координат лежит на кривой. Ур-ие (92) имеет в таком случае один корень $\rho_1=0$ при всяком θ.

Всякая прямая, проходящая через начало координат, встречает кривую в одной точке (в начале же). Две другие точки пересечения будут, вообще говоря, отличны от начала (ρ_2 и ρ_3 не равны 0).

Существует такое значение θ, для которого и $\rho_2=0$. Это значение найдется из условия

$$D.\cos\theta+E.\text{sn}\theta=0, \text{ откуда } \text{tg}\theta=-\frac{D}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

Значит прямая, проходящая через начало координат по такому направлению, коснется кривой в начале координат. Так как θ определяется из уравнения 1-й степени, то существует. вообще говоря, только одно направление касательной в данной точке кривой. Если $F=O$; $D=O$ и $E=0$, то при всяком θ прямая, проходящая через начало координат, встретит кривую в двух совпадающих с ним точках. В этом случае начало координат называется *двойной точкой* кривой.

Всякая прямая, проходящая через двойную точку кривой 3-го порядка, пересечет кривую, вообще говоря, еще в одной точке, отличной от двойной.

Если проведем через двойную точку прямую по направлению θ, удовлетворяющему условию:

$$A\cos^2\theta+B\,\text{sn}\theta.\ \text{Cos}\theta+C\,\text{sn}^2\theta=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

то каждая такая прямая будет иметь с кривой три общих точки, совпадающих в начале координат. (Ур-ие 92 примет в этом случае вид $\rho_3=0$ и будет иметь тройной корень, равный 0; $\rho_1=\rho_2=\rho_3=0$).

Такие прямые называются касательными в двойной точке кривой.

Угол θ определяется из квадратного уравнения (94). Отсюда заключаем, что касательных в двойной точке будет две. Корни послед-

него уравнения могут быть вещественны и различны. В таком случае в двойной точке существуют две различных вещественных касательных к кривой. Точка наз. в этом случае *узловой*.

Если корни уравнения (94) мнимы, то и касательные будут мнимыми. Вещественной лишь будет точка их пересечения. Двойная точка в этом случае называется *изолированной*.

Наконец корни уравнения могут быть равны между собою, в этом случае обе касательные в двойной точке совпадают в одну, и точка наз. в этом случае точкой *возврата*.

Нетрудно показать, что всякая нераспадающаяся кривая 3 порядка не может иметь более одной двойной точки. Это предложение легко доказать способом от противного. В начале этой главы было указано, что прямая может пересечь кривую 3 порядка не более, чем в трех точках.

Допустив, что некоторая циркулярная кривая имеет две двойных точки M_1 и M_2 и соединив их прямой, мы получили бы, что прямая $M_1 M_2$ имеет с кривой четыре общих точки, что невозможно.

Если данная циркулярная кривая состоит из пересекающихся прямой и окружности, тогда можно каждую из точек пересечения прямой с окружностью считать за двойную точку, ибо прямая, соединяющая эти точки, вся входит в состав циркулярной кривой.

В этом случае можно сказать, что циркулярная кривая имеет две двойных точки.

§ 23. В § 22 мы показали, что условие, чтобы двойная точка кривой была началом координат, выражается тремя уравнениями:

$$D=0;\ E=0;\ F=0.$$

Следовательно, если мы перенесем начало координат в двойную точку, то ур-ие (91) § 22 примет вид:

$$(ax+by)(x^2+y^2)+A_1x^2+B_1xy+C_1y^2=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (95)$$

Если кроме того направим оси так, чтобы ось У была параллельна вещественной ассимптоте кривой, то ее уравнение примет такую форму:

$$x(x^2+y^2)+\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (96)$$

Для того, чтобы указать легкий способ построения таких кривых, преобразуем уравнение (96) к полярной системе координат по формулам

$$x=\rho\cos\theta$$
$$y=\rho\mathrm{sn}\theta$$

После этого преобразования получим:

$$\rho^3\cos\theta+\alpha\rho^2\cos^2\theta+\beta\rho^2\mathrm{sn}\theta.\cos\theta+\gamma\rho^2\mathrm{sn}^2\theta=0 \quad . \ . \ . \ . \ (97)$$

Сократив ур-ие (97) на ρ^2 (ρ не равно нулю для всех точек кривой), получим

$$\rho=-\left\{\alpha.\cos\theta+\beta\sin\theta+\gamma\frac{\mathrm{sn}^2\theta}{\cos\theta}\right\}=(\gamma-\alpha).\cos\theta-\beta\mathrm{sn}\theta-\frac{\gamma}{\cos\theta} \quad . \ (98)$$

Обратимся к геометрической интерпретации уравнения (98).

Примем во внимание, что уравнение вещественной ассимптоты нашей кривой по формуле (8) § 2 будет

$$x+\gamma=0.$$

или, в полярной системе координат,

$$\rho=-\frac{\gamma}{\cos\theta} \quad . \ (99)$$

Ур-ие (98) может быть переписано следующим образом:

$$\rho=\left[-\frac{\gamma}{\cos\theta}\right]-\left[(\alpha-\gamma)\cos\theta+\beta\sin\theta\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (100)$$

или

$$\rho=OM-ON, \text{ где } OM=\rho_1=-\frac{\gamma}{\cos\theta} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (101)$$

$$ON=\rho_2=[(\alpha-\gamma)\cos\theta+\beta\sin\theta] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (102)$$

Очевидно, что $\rho_1=OM$ есть радиус вектор вещественной ассимптоты кривой, а $ON=\rho_2$ есть радиус вектор некоторой окружности, проходящей через двойную точку (начало координат), причем ее диаметр составляет некоторый угол φ с осью OX (полярной осью).

В таком случае уравнение окружности в полярных координатах будет:

$$\rho=2r\cos(\theta-\varphi)=2r\cos\varphi\cos\theta+2r\sin\varphi\sin\theta$$

где r—радиус окружности; в данном случае

$$\begin{aligned} 2r\cos\varphi&=\alpha-\gamma \\ 2r\sin\varphi&=\beta \end{aligned} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (103)$$

Следовательно радиус окружности r из системы (103) определится следующим образом:

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (104)$$

Уравнение

$$\rho=\rho_1-\rho_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (105)$$

показывает, что для любой амплитуды радиус—вектор циркулярной кривой с двойной точкой равен разности между радиусом вектором ее вещественной ассимптоты и радиусом вектором окружности (102).

При построении циркулярных кривых с двойной точкой получаются кривые трех видов в зависимости от того, пересекает ли вещественная ассимптота окружность (102), касается ли ее, или лежит вне этой окружности. В первом случае получается *узловая точка кривой*, во втором—*точка возврата*, в третьем—*изолированная точка*.

O двойная точка. K—центр окружности (102) OE и OF касательные к кривой в двойной точке. Кривая черт. 18 имеет узловую точку в начале координат.

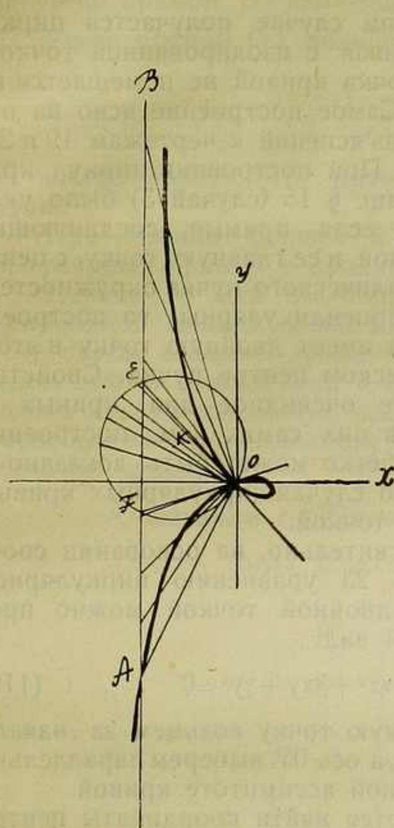
Для построения искомой кривой надо согласно уравнению (105) из конца радиуса вектора ассимптоты отложить радиус вектор окружности, соответствующий тоже амплитуде или, что одно и то же, отложить от двойной точки разность этих отрезков.

Луч OA, перпендикулярный к диаметру образующей окружности, дает в пересечении с вещественной ассимптотой главную точку кривой. Лучи, соединяющие точку O с точками ниже A (не помещены на чертеже), пересекут окружности по другую сторону от точки O, такие отрезки надо считать отрицательными и прибавлять к радиусу вектору вещественной ассимптоты.

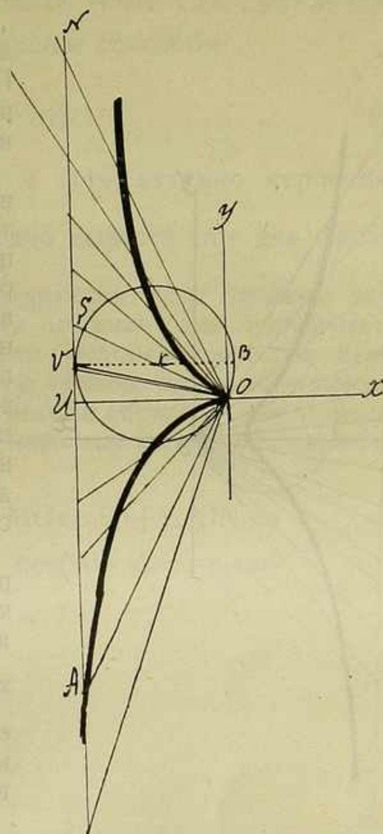
Тогда получатся точки кривой по другую сторону ассимптоты.

Нетрудно сообразить, что лучи, соединяющие двойную точку с точками E и F пересечения вещественной ассимптоты и образующей окружности, будут касательными в двойной точке кривой. Если ве-

щественная ассимптота будет диаметром образующей окружности, то угол EOF будет прямым, и кривая следовательно будет иметь в двойной точке две взаимно перпендикулярные касательные.



Чертеж 18



Чертеж 19

На черт. 19 вещ. ассимптота касается образующей окружности, и построенная кривая имеет точку *возврата*.

Из черт. 19 видно, что ($\alpha-\gamma$, β) суть координаты точки S^1—конца диаметра образующей окружности, проходящей через точку 0. В случае кривой с точкой возврата

$$OU=\gamma=VK+KB=r+r\cos\varphi=2r\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

но так как $2r\cos\varphi=\alpha-\gamma$; $2r\sin\varphi=\beta$, **то** . . . . . (106)

$$\gamma=\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2}\,.\,\text{Cos}^2\frac{\varphi}{2} \quad . . . . (107)$$

Если φ—0 **то из** (106)

$$\beta=0\,;\,2r=\alpha-\gamma$$

а из (107) $\gamma=\alpha-\gamma$ **или** $2\gamma=\alpha$ . . . . . . (108)

Подставив выражение α **из** (108) **в уравнение циркулярной кривой, мы получим:**

$$(x+2\gamma)(x^2+y^2)-\gamma y^2=0 \quad . . . . (109)$$

Это уравнение, как увидим ниже, есть уравнение цирк. кривой называемой *циссоидой Диоклеса.*

На черт. 20 вещественная ассимптота не пересекает образующей окружности.

В этом случае получается циркулярная кривая с изолированной точкой. Главная точка кривой не помещается на чертеже. Самое построение ясно на основании раз'яснений к чертежам 19 и 20.

§ 24. При построении циркул. кривой в конце § 15 (случай 3) было указано, что если прямые, соединяющие центр кривой и ее главную точку с центром параболического пучка окружностей, взаимно перпендикулярны, то построенная кривая имеет двойную точку в этом параболическом центре пучка. Свойство это вполне очевидное для кривых с центром на них самих (см. построение на черт.) легко может быть доказано и для общего случая циркулярных кривых с двойной точкой.

Действительно, на основании соображений § 23 уравнению циркулярной кривой с двойной точкой можно придать такой вид:

$$x(x^2+y^2)+\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2=0 \quad . \; . \; . \; (110)$$

если двойную точку возьмем за начало координат, а ось 0У выберем параллельно вещественной ассимптоте кривой.

Остается найти координаты центра кривой и ее главной точки.

Чертеж 20

Координаты центра на основании общих формул § 2 будут

$$X_c=\frac{a(C-A)-Bb}{2(a^2+b^2)}=\frac{\gamma-\alpha}{2}, \text{ ибо } \begin{array}{c} a=1\ b=0;\ C=\gamma;\ A=\alpha \\ B=\beta \end{array} \quad . \; . \; (111)$$

$$У_c=\frac{-b\,(C-A)-a\,B}{2\,(a^2+b^2)}=-\frac{\beta}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (112)$$

Координаты главной точки мы также могли бы найти по общим формулам § 5, но в данном случае проще получить их как координаты точки пересечения кривой (110) с вещественной ассимптотой, уравнение которой также найдено в § 23.

$$x+\gamma=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (111)$$

Решив совместно уравнения (110) и (111), мы и получим искомые координаты главной точки кривой А.

$$x=-\gamma$$

$$y=\frac{\gamma(\alpha-\gamma)}{\beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (112)$$

Ур-ие прямой OC будет:

$$y+\frac{\beta}{2}=\frac{\beta}{\alpha-\gamma}\left(x-\frac{\gamma-\alpha}{2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (113)$$

как ур-ие прямой, соединяющей две данные точки $C(x_c\,,\,y_c)$ и $O(0,0)$.

Ур-ие прямой OA получим аналогичным способом:

$$y-\frac{\gamma(\alpha-\gamma)}{\beta}=-\frac{\alpha-\gamma}{\beta}\,(x+\gamma) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (114)$$

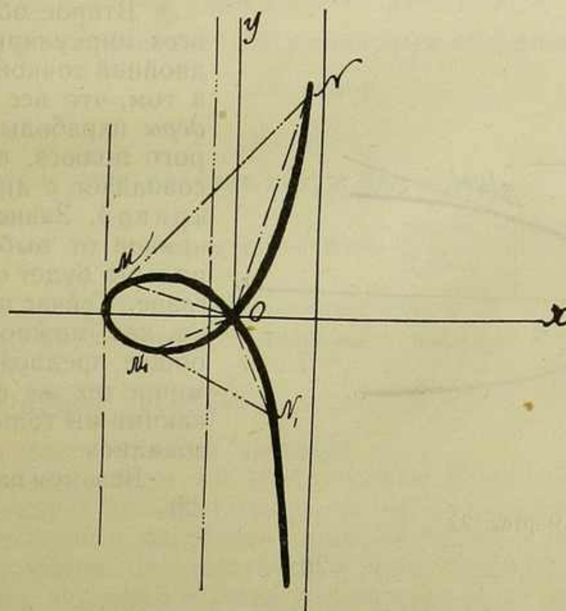
Легко видеть, что прямые (113) и (114) взаимно перпендикулярны.

При помощи формул § 23 не трудно вывести еще два свойства циркулярных кривых с двойной точкой.

Первое из них заключается в следующем: *если двойную точку циркулярной кривой примем за вершину прямого угла треугольника, а две другие вершины этого треугольника возьмем в точках пересечения сторон этого угла с циркулярной кривой, то геометрическим местом средин гипотенуз, получаемых таким образом треугольников, будет прямая, параллельная вещественной ассимптоте данной циркулярной кривой.*

Обозначим $<NOx$ через φ; $<MOx=90+\varphi$; $ON=\rho$

$OM=\rho_1$ тогда $x=\rho.\cos\varphi$; $x_1=\rho_1\cos(90+\varphi)=-\rho_1 \mathrm{sn}\varphi$



Чертеж 21

Полярное уравнение циркулярной кривой с двойной точкой на основании соображений § 23 будет:

$$\rho=(\gamma-\alpha)\cos\varphi-\beta \mathrm{sn}\varphi-\frac{\gamma}{\cos\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (115)$$

или

$$\rho\cos\varphi=(\gamma-\alpha).\ \cos^2\varphi-\beta\sin\varphi\ \cos\varphi-\gamma \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (116)$$

Подставив в уравнение (116) выражения $\rho\cos\varphi$ из 114а, находим

$$x=(\gamma-\alpha)\cos^2\varphi-\beta\sin\varphi\ \cos\varphi-\gamma \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (117)$$

или

$$x=\ -\alpha\cos^2\varphi-\beta\sin\varphi\ \cos\varphi-\gamma\sin^2\varphi \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (118)$$

из 114а имеем $x_1=-\rho_1\ \sin\varphi$, но из ур-ия кривой (115)

$$\rho_1=\ -(\gamma-\alpha)\ \sin\varphi-\beta\cos\varphi+\frac{\gamma}{\sin\varphi}$$

и следовательно

$$x_1=(\gamma-\alpha)\sin^2\varphi+\beta\sin\varphi\ \cos\varphi-\gamma=-\alpha\sin^2\varphi+\beta\sin\varphi\cos\varphi-\gamma\cos^2\varphi\ .\ (119)$$

Сложив почленно (118) и (119), получим:

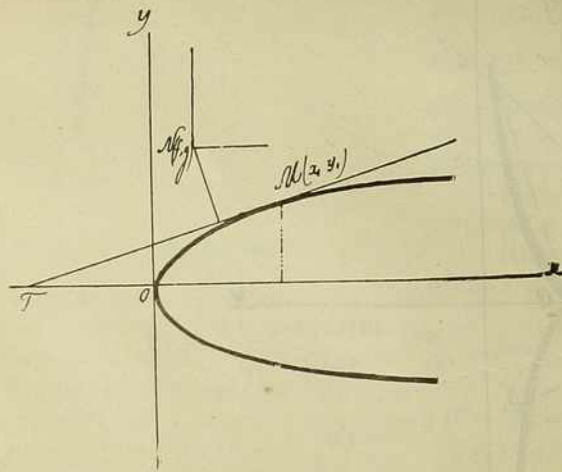
$$x_1+x=-(\alpha+\gamma)=constans. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (120)$$

т. е. абсцисса средины гипотенузы таких треугольников

$$\left(\frac{x+x_1}{2}=-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

не зависит от угла φ, чем и доказывается требуемое предложение.

Второе общее свойство всех циркулярных кривых с двойной точкой заключается в том, что все они суть *подеры* параболы для некоторого полюса, причем полюс совпадает с двойной точкой кривой. Зависимость вида кривой от выбора полюса подэры будет отмечена во 2 главе. Сейчас покажем только, как можно доказать это общее предложение при помощи тех же формул § 23, какими мы только что пользовались.



Чертеж 22

Возьмем параболу (черт. 22)

$$y^2=2px \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (121)$$

Ур-ие касательной к этой параболе в точке $M(x_1y_1)$ будет:

$$yy_1=p(x+x_1) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (122)$$

Нормаль к этой касательной, проходящая через полюс N(f,g), будет иметь своим уравнением:

$$y-g=-\frac{y_1}{p}(x-f) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (123)$$

Так как точка x_1y_1 лежит на параболе, то

$$y_1^2 = 2px_1 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (124)$$

Для получения уравнения подеры данной параболы относительно полюса N(f,g) надо исключить x_1 и y_1 из уравнений (122), (123), (124).

Из (125) находим:

$$y_1 = -\frac{p(y-g)}{x-f} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (125)$$

Подставив это выражение y_1 в (124), найдем:

$$x_1 = \frac{p(y-g)^2}{y(x-f)^2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (126)$$

Подставив же найденные x_1 и y_1 из (126) и (125) в (122), получим после некоторых упрощений:

$$-2y(y-g)(x-f) = 2x(x-f)^2 + p(y-g)^2 \quad \dots\dots \quad (127)$$

Сохраняя прежнее направление осей, перенесем начало координат в точку N(f,g) по формулам:

$$x = x^1 + f$$

$$y = y^1 + g$$

тогда уравнение (127) примет такой вид:

$$-2(y^1+g)x^1y^1 = 2(x^1+f)x^{12} + py^{12} \quad \dots\dots \quad (128)$$

Преобразуем уравнение (128) к полярным координатам по формулам

$$x^1 = \rho\cos\varphi$$

$$y^1 = \rho\,\mathrm{sn}\,\varphi$$

Тогда ур-ие (128) получит такую формулу:

$$\rho = -g\,\mathrm{sn}\,\varphi - f\cos\varphi - \frac{p}{2}\,\frac{\mathrm{sn}^2\varphi}{\cos\varphi} \quad \dots\dots\dots \quad (129)$$

Сравнив ур-ие (129) с уравнением (98) § 23, мы приходим к заключению, что уравнение (129) выражает циркулярную кривую с двойной точкой в начале координат. В этом случае $\alpha = f$ $\beta = g$; $\gamma = \frac{p}{2}$.

Теорема таким образом доказана.

Справедливо и обратное предложение: Если циркулярная кривая 3-го порядка имеет двойную точку, то ее отрицательная первая подера по отношению к последней (двойной точке) есть парабола.

(Roberts, Journal de Liouville X и Hirst, Quarterly Journal II). К этому вопросу мы вернемся в главе об инверзионных преобразованиях.

§ 25. Покажем еще одно общее свойство циркулярных кривых в заключение I-й главы.

Всякая циркулярная кривая есть огибающая системы окружностей, имеющих с ней двойное касание, причем центры этих окружностей находятся на некоторой параболе.

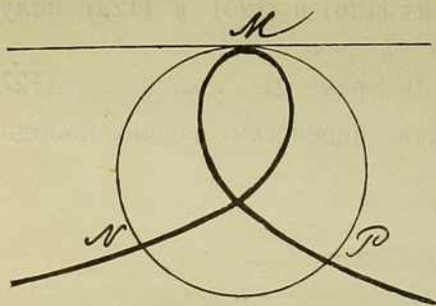
Эта теорема является второй основной теоремой циркулярных кривых. Из нее, как и из теоремы Eckhardt'a, может быть получен целый ряд важных свойств циркулярных кривых. Это предложение дол-

жно быть названо теоремой *Casey*, ибо *Casey* пришел к нему впервые в 1867 году, рассматривая свойства бициркулярных кривых 4-го порядка. [On Bicircular Quartics, Transactions of. the Roy. I r. Academy, Vol 24].

Докажем это предложение аналитическим путем, следуя изложению H. Texeira в его труде: Traite' des courbes spéciales remarquables, Coïmbra 1908, § 76, page 64.

Texeira воспользовался методом, предложенным G. Darboux, при помощи которого знаменитый геометр трактует вопрос „Sur les sphères doublement tangentes“ в своем труде „Sur une classe remarquable de courbes et de Surfaces algébriques“. Paris 1894, pages 113—117.

В настоящем § сделаны некоторые упрощения в зависимости от выбора системы координат. К геометрическим соображениям Casey мы вернемся в конце главы 2-й.



Чертеж 23

Сделаем одно предварительное замечание относительно двойного касания кривых. Окружность с циркулярной кривой 3-го порядка пересекается вообще в 4 точках кроме, конечно, круговых точек на ∞.

Если две из точек пересечения совпадают, то соединяющая их хорда обращается в общую касательную. Две другие точки N и P (черт. 23) вообще не совпадают. Если же N и P, не совпадая с точкой M, совпадут друг с другом, то окружность и кривая будут касаться друг друга в двух точках или будут, как говорят, иметь двойное касание или соприкосновение.

Итак, возьмем окружность:

$$x^2+y^2=2(\alpha x+\beta y+\gamma) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (130)$$

и циркулярную кривую, отнесенную к осям с началом координат в ее центре и осью ОУ, параллельной ее вещественной ассимптоте.

(Форма ур-ия гл. I § 5)

$$x(x^2+y^2)+Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (131)$$

и найдем условия их двойного соприкосновения.

Нетрудно видеть, что точки пересечения окружности (130) и циркулярной кривой (131) совпадают с точками пересечения той же окружности с кривой 2-го порядка:

$$2x(\alpha x+\beta y+\gamma)+Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0 \quad . \; . \; . \; . \quad (132)$$

ибо системы уравнений (130) и (131) и (130) и (132)—эквивалентны.

Таким образом, условие двойного соприкосновения кривых (130) и (131) можно заменить условием двойного соприкосновения кривых (130) и (132).

Возьмем уравнение:

$$2x(\alpha x+\beta y+\gamma)+Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F+k(x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma)=0 \; (133)$$

Ур-ие (133), как нетрудно видеть, представляет пучек кривых 2-го порядка, проходящих через точки пересечения кривых (130) и (132).

Для того, чтобы последние кривые имели двойное соприкосновение, надо, чтобы кривая (133) превратилась в пару совпадающих прямых.

Выразим аналитически последнее условие. Ур-ие (133) после группировки членов его получает такой вид:

$$(2\alpha+A+k)x^2+2\beta xy+(A+k)y^2+(2\gamma+D-2\alpha k)x+(E-2\beta k)y+F-2k\gamma=0 \quad (134)$$

Для того, чтобы уравнение (134) выражало две совпадающие прямые, как известно из элементов Аналитической геометрии необходимы и достаточны следующие три условия:

$$1)\ \beta^2-(A+k)(2\alpha+A+k)=0 \qquad (B^2-4AC=0) \quad . \ (135)$$

$$2)\ \beta(E-2\beta k)-(A+k)(2\gamma+D-2ak)=0 \qquad (BE-2CD=0) \quad . \ (136)$$

$$3)\ (E-2\beta k)^2-4(A+k)(F-2k\gamma)=0 \qquad (E^2-4CF=0) \quad . \ (137)$$

Из (135) находим выражение α:

$$\alpha=-\frac{1}{2}\left\{A+k\right\}+\frac{\beta^2}{2(A+k)} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (138)$$

Из (137) определяем γ:

$$\gamma=\frac{1}{2k}\left[F-\frac{(E-2\beta k)^2}{4(A+k)}\right], \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (139)$$

а подставив найденные выражения α и γ в ур-ие (136), придадим последнему такой вид, после некоторых упрощений:

$$(A+k).^2k^2+(A+k).F+kD(A+k)-\frac{E^2}{4}=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (140)$$

Ур-ие (140) дает, вообще говоря, четыре значения для k, а уравнения (139) и (138) дают соответственные значения α и γ, при которых окружность (130) будет иметь двойное соприкосновение с циркулярной кривой (131).

Что касается параметра β, входящего в эти уравнения, то он остается неопределенным.

Сказанное позволяет заключить, что, вообще говоря, существуют четыре серии окружностей, имеющих двойное соприкосновение с рассматриваемой циркулярной кривой.

Так как эти окружности и циркулярная кривая имеют в общих точках общие касательные, то рассматриваемая циркулярная кривая есть огибающая каждой системы окружностей.

Заметив, что α и β выражают координаты центра окружностей, заданных уравнением (130) и приняв во внимание уравнение (138), связывающее α и β, мы можем сказать, что центры окружностей каждой серии лежат на одной и той же параболе, ибо уравнение (138) и есть уравнение этой кривой.

Подставив в уравнение окружности (130) вместо γ его выражение из (139), найдем уравнение окружностей, имеющих двойное касание с рассматриваемой циркулярной кривой в такой форме:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2.\ \beta y-\frac{1}{k}\left[F-\frac{(E-2\beta k)^2}{4(A+k)}\right]=0 \quad . \ . \ . \ . \ (141)$$

После несложных преобразований, имеем в виду, что из уравнения (135)

$$\frac{\beta^2}{A+k}=(2\alpha+A+k)$$

мы можем переписать уравнение (141) в такой форме:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-\frac{F}{k}-\frac{E\beta}{A+k}+\frac{E^2}{4k(A+k)}+k(2\alpha+A+k)=0 \quad . (142)$$

Здесь α и β должны удовлетворять уравнению (138), а k должно быть одним из корней уравнения (140).

Если мы в уравнении (142) заменим α и β через x и y, то оно примет следующий вид:

$$x^2+y^2+\frac{F}{k}+\frac{Ey}{A+k}-\frac{E^2}{4k(A+k)}-2kx-k(A+k)=0 \quad . \quad . (143)$$

Далее, уравнение (143) может быть преобразовано в следующей форме:

$$(x-k)^2+\left\{y+\frac{E}{2(A+k)}\right\}^2=k^2+\frac{E^2}{4(A+k)^2}+\frac{E^2}{4k(A+k)}-\frac{F}{k}+k(A+k) \quad (144)$$

Третий и четвертый члены 2-й части уравнения (144) преобразуем при помощи формул (135), (136) и (137).

Если мы подставим в уравнение (136) выражения α и γ из (138) и (139), то мы получим:

$$\beta(E-2\beta k)-(A+k)\left[\frac{F}{k}-\frac{(E-2\beta k)^2}{4k(A+k)}\right]-(A+k)D-k(A+k)^2+k\beta^2=0 \quad (145)$$

Из последнего уравнения находим:

$$\frac{(E-2\beta k)^2}{4k(A+k)}-\frac{F}{k}=D+k(A+k)+\frac{\beta^2 k-\beta E.}{A+k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (146)$$

или

$$\frac{E^2}{4k(A+k)}-\frac{F}{k}=D+Ak+k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (147)$$

Подставив полученное в левой части ур-ия (147) выражение в уравнение (144), найдем:

$$(x-k)^2+\left\{y+\frac{E}{2(A+k)}\right\}^2=3k^2+2Ak+\frac{E^2}{4(A+k)^2}+D \quad . (148)$$

Уравнение (148) представляет окружность, постоянную для всех двояко касательных окружностей одной из 4-х серий (при данном значении k).

Эта окружность называется *направляющей окружностью* (*cercle directeur*) двояко касательных окружностей данной серии.

Нетрудно показать, что все окружности, соответствующие одному и тому же отличному от 0 и от —A корню уравнения (140), пересекают ортогонально соответствующую им направляющую окружность

Действительно, координаты центра и радиус какой-нибудь из окружностей, имеющих двойное касание с циркулярной кривой, на основании уравнения (141) будут иметь следующие выражения:

$$\alpha, \beta, r^2=\alpha^2+\beta^2+\frac{F}{k}-\frac{(E-2\beta k)^2}{4k(A+k)}$$

Точно также из уравнения (143) можем написать координаты центра и квадрат радиуса r_1 направляющей окружности:

$$k,\ -\frac{E}{2(A+k)}\ ;\ r_1^2 = k^2 + \frac{E^2}{4(A+k)^2} + \frac{E^2}{4k(A+k)} - \frac{F}{k} + k(A+k)$$

Условие ортогональности двух окружностей будет:

$r^2 + r_1^2 = d^2$, где d расстояние центров данных окружностей, а r и r_1 их радиусы.

В нашем случае

$$d^2 = (\alpha - k)^2 + \left(\beta + \frac{E}{2(A+k)}\right)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha k + k^2 + \frac{\beta E}{A+k} + \frac{E^2}{4(A+k)^2}$$

Подставив выражения d^2 r^2 и r^2 в уравнение:

$$r_1^2 + r^2 = d^2$$

мы найдем:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \frac{F}{k} - \frac{E^2}{4k(A+k)} + \frac{\beta E}{A+k} - \frac{\beta^2 k}{A+k} + k^2 + \frac{E^2}{4(A+k)^2} + \frac{E^2}{4k(A+k)}$$

$$- \frac{F}{k} + k(A+k) = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha k + k^2 + \frac{\beta E}{A+k} + \frac{E^2}{4(A+k)^2} \quad \ldots \quad (149)$$

По приведении подобных членов уравнение (149) принимает вид:

$$-\frac{\beta^2 k}{A+k} + k(A+k) = -2\alpha k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (150)$$

по сокращении на k ($k \neq o$) мы приведем ур-ие (150) к форме:

$$\beta^2 - (A+k)(2\alpha + A + k) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (151)$$

Но ур-ие (151) есть ни что иное, как полученное раньше уравнение (135). Таким образом, условие ортогональности окружностей можно считать доказанным.

§ 26. Рассмотрим некоторые частные случаи изложенной теоремы.

Если один из корней уравнения (140) будет равен 0, что возможно при условии:

$$E^2 - 4AF = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (152)$$

то уравнения (135), (136) и (137) получают такую форму:

$$\beta^2 - A(2\alpha + A) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (153)$$

$$\beta E - A(2\gamma + D) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (154)$$

$$E^2 - 4AF = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (155)$$

Из последних уравнений мы находим:

$$\alpha = -\frac{A}{2} + \frac{\beta^2}{2A} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (156)$$

$$\gamma = \frac{\beta E - AD}{2A} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (157)$$

Ур-ие направляющей окружности, соответствующей значению k=o, очевидно будет:

$$x^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = D + \frac{E^2}{4A^2} \quad \ldots\ldots \quad (158)$$

Если один из корней ур-ия (140) будет $-A$, т. е. если $A+k=0$, то предыдущие рассуждения должны быть изменены. Ур-ие (135) дает в этом случае $\beta=0$, что указывает на то обстоятельство, что центры двояко касательных окружностей, соответствующих взятому значению k, находятся на оси абсцисс. Уравнения же (136) и (137) обращаются в тождества и не дают возможности определить соответствующее значение γ.

Для разрешения вопроса в этом частном случае поступают следующим образом. Заметим прежде всего, что из уравнения (140) при условии $A+k=0$ мы найдем, что $E=0$. Обратимся к уравнению (134), но при $E=0$ $A+k=0$ и $\beta=0$ оно получает такой вид:

$$2\alpha x^2+(2\gamma+D-2\alpha k)x+F-2k\gamma=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (159)$$

Так как уравнение (159) в случае двойного соприкосновения циркулярной кривой с окружностью должно представлять пару совпадающих прямых, то следовательно мы имеем условие:

$$(2\gamma+D-2ak)^2-4.2\alpha(F\quad 2k\gamma)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (160)$$

Уравнение (160) и дает нам значение параметра γ, соответствующее серии двояко касательных окружностей для $k=-A$.

В случае $k=o$ уравнение (142), дающее уравнения двояко касательных окружностей, принимает неопределенный вид.

Уравнение таких окружностей можно найти, однако, непосредственно из уравнения (130)

$$x^2+y^2=2\alpha x+2\beta y+2\gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (161)$$

подставив в него вместо γ его выражение из уравнения (157), тогда уравнение (161) принимает такую форму:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=\frac{\beta E-AD}{A} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (162)$$

Аналогичным путем находится и уравнение двояко касательных окружностей в случае $k=-A$.

Если рассматриваемая циркулярная кривая имеет двойную точку, то в таком случае одна из четырех серий двояко касательных окружностей сводится к окружностям просто касательным к кривой в двойной точке, так как каждая из таких окружностей может быть рассматриваема, как встречающая кривую в двух парах совпадающих точек.

§ 27. Возьмем пример для иллюстрации изложенного.

Рассмотрим циркулярную кривую

$$(x+2)(x^2+y^2)+x+6y+1=0$$

Составим прежде всего уравнение для определения параметра k. Оно будет иметь такой вид:

$$(2+k)^2k^2-(2+k)+k(2+k)-9=0$$

или

$$k^4+4k^3+5k^2+k-11=0.$$

Один из его корней $k_1=1$.

Напишем уравнение серии двояко касательных окружностей, соответствующих $k_1=1$:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+1-2\beta+3+2\alpha+3=0$$

или

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-7+2\beta-2\alpha$$

Уравнение (135) в этом случае будет:

$$\alpha=-\frac{3}{2}+\frac{\beta^2}{6} \text{ или } \alpha=\frac{\beta^2-9}{6}$$

Подставив это выражение α в предыдущее уравнение, найдем

$$\left(x-\frac{\beta^2-9}{6}\right)^2+(y-\beta)^2=\frac{\beta^4+6\beta^2+72\beta-63}{36}$$

Давая различные значения параметру β, получим сколько угодно двояко касательных окружностей.

Найдем уравнение направляющей окружности, соответствующей корню $k_1=1$. Это уравнение будет:

$$x^2+y^2-2x+2y-7=0 \text{ или}$$

$$(x-1)^2+(y+1)^2=3^2.$$

Уравнение двояко касательных окружностей:

$$\text{при } \beta=0: \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=-\frac{63}{36} \text{ (мнимая)}$$

$$\text{при } \beta=2 \left(x+\frac{5}{6}\right)+(y-2)^2=\frac{121}{36}=\left(\frac{11}{6}\right)^2; \quad R=1\tfrac{5}{6}$$

$$\text{при } \beta=3 \; x^2+(y-3)^2=\frac{288}{36}=\left(\frac{17}{6}\right)^2; \quad R=2\tfrac{5}{6}$$

$$\text{при } \beta=-5: \left(x-\frac{8}{3}\right)^2+(y+5)^2=\frac{352}{36}=(3{,}13)^2; \quad R=3{,}13^{1)}.$$

Построение кривой:

при $x=o$ $2y^2+6y-1=0$; $y=-\frac{3\mp\sqrt{11}}{2}$; $y_1=0{,}15$; $y_2=$ $3{,}15$

при $x=-1$ $y=-3\pm\sqrt{10}$ $y_1=0{,}2$; $y_2=-6{,}2$

при $x=+1$ $(y+1)^2=0$ $y_1=y_2=-1$.

Уравнение вещественной ассимптоты будет: $x+2=0$.

Координаты главной точки кривой A; $x=-2$; $y=\frac{1}{2}$

Кривая, начерченная на чертеже (24), есть огибающая серии окружностей, начерченных сплошными линиями.

Центры этих окружностей лежат на параболе, начерченной пунктирной линией. Направляющая окружность начерчена пунктиром с тире.

Окружности, начерченные сплошной линией, ортогональны к направляющей. Пунктиром с двумя точками начерчены две касательные к двум окружностям.

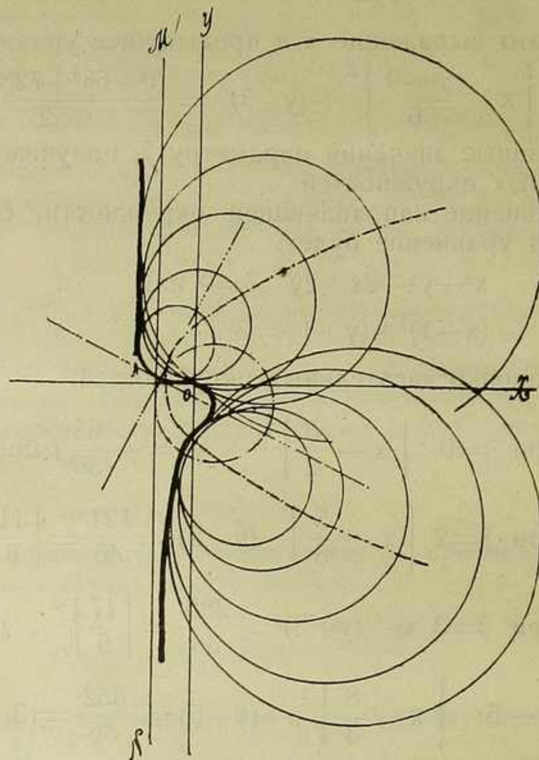
Эти касательные взаимно перпендикулярны.

---

1) Значения R вычислены приближенно.

Окружности, центры которых расположены на части параболы в третьем из координатных углов,--мнимы как показывает вычисление. Кривая не проходит через начало координат, ибо при $x=o$ $y_1=+0,16$; $y_2=-3,16$.

§ 28. Теорема, указанная в начале § 25, есть, как уже было замечено, вторая основная теорема общей теории циркулярных кривых.



Чертеж 24

Из нее можно получить, между прочим, аналитический признак существования двойной точки у циркулярной кривой.

Это нетрудно сделать на основании соображений §§ 26 и 27.

Перенесем начало координат в центр одной из направляющих окружностей, оставляя оси параллельными прежним. Формулы преобразования в силу уравнения § 25 будут

$$x=x^1+k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (163)$$

$$y=y^1-\frac{E}{2(A+k)}$$

Уравнение (131) § 25 после преобразования по формулам (163) получит вид:

$$(x^1+k)\left[x^{12}+2kx^1+k^2+y^{12}-\frac{Ey^1}{A+k}+\frac{E^2}{4(A+k)^2}\right]+A(x^{12}+2kx^1+k^2)+$$

$$+A\left\{y^{12}-\frac{Ey^1}{A+k}+\frac{E^2}{4(A+k)^2}\right\}+Dx^1+Dk+Ey^1-\frac{E^2}{2(A+k)}+F=0. \quad . \quad (164)$$

Исключив из (164) F при помощи уравнения (147) § 25, мы получим:

$$(x'+k)(x'^2+y'^2)+2kx'^2+2k^2x'+k^3-\underline{\frac{Ex'y'}{A+k}}+\frac{Eky'}{A+k}+\frac{E^2x'}{4(A+k)^2}+\underline{\frac{E^2k}{4(A+k)^2}}+$$

$$Ax'^2+2Akx'+Ak^2+Ay'^2-\underline{\frac{AEy'}{A+k}}+\underline{\frac{AE^2}{4(A+k)^2}}+Dx'+Dk+E'y'$$

$$\underline{\frac{E^2}{2(A+k)}}+\underline{\frac{E^2}{4(A+k)}}-Dk-Ak^2-k^3=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (165)$$

или

$$x'(x'^2+y'^2)+(A+3k)x'^2-\frac{Ex'y'}{A+k}+(A+k)\ y'^2+x'\left[3k^2+2Ak+D+\frac{E^2}{4(A+k)^2}\right]=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (166)$$

Члены, подчеркнутые ~~~~~~, равны в сумме 0.

Ур-ию (166) при помощи формулы (148) § 25 может быть придан следующий вид:

$$x'(x'^2+y'^2)+(A+3k)x'^2+(A+k)y'^2-\frac{E}{A+k}\,x'y'+r.^2x'=0\,, \quad . \ . \quad (167)$$

где r — радиус направляющей окружности.

Выражение, стоящее в квадратных скобках левой части уравнения (166), есть ничто иное, как квадрат радиуса направляющей окружности.

Таким образом, уравнение (166) после всех преобразований примет вид уравнения (110) § 24, т. е.

$$x'(x'^2+y'^2)+Mx'^2+Nx'y'+Py'^2=0\ , \text{ если } r=0.$$

Отсюда приходим к заключению, что если радиус направляющей окружности равен 0, то циркулярная кривая имеет двойную точку, совпадающую с центром этой направляющей окружности.

Таким образом, если для какого-нибудь значения k, определяемого уравнением (140) § 25:

$$3k^2+2Ak+D+\frac{E^2}{4(A+k)^2}=0$$

то координаты этой двойной точки кривой находятся по формулам

$$x=k$$
$$y=-\frac{E}{2(A+k)}$$

§ 29. Уравнение (134) пучка кривых 2-го порядка, проходящих через точки пересечения циркулярной кривой с окружностью (1) § 25, может быть представлено следующим образом:

$$(A+k)^2y^2+(E-2\beta k+2\beta x).(A+k).y+(A+k)\,[(2\alpha+A+k)x^2+(2\gamma+D-2\alpha k)\,x+F-2k\gamma]=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (168)$$

или

$$\left[(A+k)y+\frac{E-2\beta k+2\beta x}{2}\right]^2=\frac{(E-2\beta k+2\beta x)^2}{4}-(A+k)\,[(2\alpha+A+k)\,x^2+(2\gamma+D-2\alpha k)x+F-2k\gamma] \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (169)$$

Разрешив уравнение (169) относительно у, мы получим:

$$(A+\kappa)y=-\beta(x-\kappa)-\frac{E}{2}\pm\sqrt{\frac{(E-2\beta\kappa+2\beta x)^2}{4}-(A+\kappa)[2\alpha+A+\kappa)x^2+(2\gamma+D-2\alpha\kappa)x+F-2\kappa\gamma} \quad \ldots \quad (170)$$

$$\text{Прямая } (A+\kappa)y=-\beta(x-\kappa)-\frac{E}{2} \quad \ldots \quad (171)$$

проходит через точки касания циркулярной кривой с двояко касательной окружностью, соответствующей тому же значению k и β.

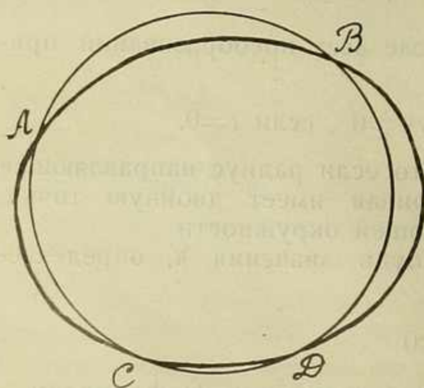
Эта прямая называется *хордой соприкосновения или касания.*

Уравнение (171) показывает, что хорда касания проходит также и через точку $\kappa, -\frac{E}{(2A+\kappa)}$, т. е. через центр направляющей окружности.

Отсюда имеем предложение: *все хорды касания, которые принадлежат одной и той же серии двояко касательных к данной циркулярной кривой окружностей, пересекаются в центре соответствующей этой серии направляющей окружности.*

§ 30. Окружность с кривой 2 порядка, а также и с циркулярной кривой вообще пересекается в 4 точках A, B, C, *D.* Если A и B совпадают, то окружность называется касательной к кривой в точке A.

Если и третья точка пересечения C совпадает с A и B, то говорят, что окружность и кривая имеют в точке A касание 2-го порядка. Если все четыре точки совпадают в точке A, то говорят, что окружность в точке A имеет с кривой касание 3-го порядка.



Чертеж 25

Покажем теперь, что в точках пересечения направляющей окружности с циркулярной кривой, огибаемые циркулярной кривой двояко касательные окружности имеют с циркулярной кривой касание 3-го порядка.

Действительно, для того, чтобы четыре общих точки двояко касательной окружности и кривой совпали, надо, чтобы хорда соприкосновения обратилась в общую касательную к окружности и циркулярной кривой в одной и той же точке. Эта же точка должна лежать на окружности, направляющего круга, ввиду того, что последний должен оригинально пересекать каждую из двояко касательных окружностей серии.

Центр же направляющей окружности должен лежать на этой касательной в силу той же ортогональности. Таким образом точка, в которой совмещаются четыре общих точки двояко касательной окружности и циркулярной кривой, должна лежать на окружности направляющего круга.

Последние строки предыдущей теоремы (центр направляющей окружности...) позволяют непосредственно высказать следующее предложение:

Всякая, направляющая окружность проходит через точки касания касательных к циркулярной кривой, проведенных из центра этой окружности.

Если E=O, то циркулярная кривая симметрична относительно оси OX. Если эту ось симметрии примем за направляющую окружность бесконечно большого радиуса (с центром на ∞), то теорема будет справедлива и для этого частого случая.

§ 31. Уравнение циркулярной кривой

$$(x+A)(x^2+y^2)+Dx+Ey+F=0 \tag{171a}$$

можно написать в форме:

$$(x+A)^2y^2=+(x+A)^2x^2-(x+A)(Dx+Ey+F) \tag{172}$$

или

$$(x+A)^2y^2+E(x+A)y+\frac{E^2}{4}=\frac{E^2}{4}+E(x+A)y-(x+A).(x^3+Ax^2+$$
$$+Dx+Ey+F) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{173}$$

Уравнение же (173) после несложных преобразований принимает вид:

$$\left[(x+A)y+\frac{E}{2}\right]^2=\frac{E^2}{4}-(x+A)\left[x^3+Ax^2+Dx+F\right] \tag{174}$$

Извлекши квадратный корень из обеих частей равенства, (174) мы получим:

$$(x+A)y=-\frac{E}{2}\pm\sqrt{\frac{E^2}{4}-(x+A)\left[x^3+Ax^2+Dx+F\right]} \tag{175}$$

Уравнение:

$$(x+A)y=-\frac{E}{2} \tag{176}$$

представляет *гиперболу*, проходящую через средины хорд циркулярной кривой (171-а), параллельных их общей ассимптоте. (вещественная ассимптота цир. кривой 171а совпадает с одной из ассимптот гиперболы (176).

При помощи гиперболы (176) можно найти некоторые свойства циркулярных кривых. Таким методом пользовался уже Bjerkness в своем мемуаре „Sur une classe de courbes de 3 degrée", rapportées á lignes droites, qui dependent de paramétres donnés", помещенном в Journal de Crelle за 1858 г. TLV, Работа *Bjerkness* является первой работой о циркулярных кривых 3-го порядка.

Настоящий § изложен по *Texeira*, которому принадлежат некоторые теоремы о свойствах этой гиперболы, помещенные в *Annali de Matematica (TXI Sertie 3), а также в его Traitè de courbes speciales*, стр. 69, *TI*.

Координаты точек пересечения гиперболы (176) *с циркулярной кривой* (171a) даются уравнениями:

$$y(x+A)=-\frac{E}{2} \quad \text{и} \tag{177}$$

$$(x+A)(x^3+Ax^2+Dx+F)-\frac{E^2}{4}=0, \tag{178}$$

ибо значения *x* и *y*, удовлетворяющие системе уравнений (177) и (178) удовлетворяют также системе (175) и (176).

Исключив k из уравнения (140) § 25

$$(A+k)^2 . k^2 + (A+k)F + kD(A+k) - \frac{E^2}{4} = 0,$$

и уравнений, определяющих координаты центра направляющей окружности:

$$x = k$$

$$y = -\frac{E}{2(A+k)}$$

мы получим, как нетрудно видеть, в результате систему (175) и (176). Следовательно: *центры направляющих окружностей совпадают с точками пересечения циркулярной кривой с гиперболой, проходящей через средины хорд кривой, параллельных ее вещественной ассимптоте.*

Из свойств гиперболы (176) проходить через средины хорд циркулярной кривой параллельных вещественной ее ассимптоте непосредственно вытекает, что эта гипербола проходит через вершины циркулярной кривой (точки, в которых касательные к кривой параллельны вещественной ассимптоте ее) и что она проходит через двойную точку циркулярной кривой, если только таковая имеется у кривой.

Далее, гипербола (176) вообще пересекается с циркулярной кривой в четырех точках. Если цир. кривая имеет двойную точку, то в ней совпадают две из точек пересечения, а если двойная точка будет точкой возврата, то в ней совпадают три точки перечисления. (гипербола и циркулярная кривая касаются в точке возврата).

В общем случае центры направляющих окружностей все различны, во втором или третьем случаях два или три из них совпадают в двойной точке, которая служит тогда центром двух или трех направляющих окружностей нулевого радиуса (§ 28).

§ 32. Теорема § 8 также может быть применена к двояко касательным окружностям. В этом случае получится такое предложение: *касательные к циркулярной кривой в точках касания двояко касательных окружностей пересекают кривую в двух точках, лежащих на прямой, параллельной вещественной ассимптоте ее.*

Для доказательства этого предложения достаточно (см. черт. 1, § 8-го) только совместить между собою точки C и D, равно, как и точки A и B. В таком случае и получится окружность, имеющая двойное касание с данной циркулярной кривой. CE и AF будут общими касательными к последней окружности и циркулярной кривой, а точки E и F пересечения этих касательных с циркулярной кривой будут лежать на прямой, параллельной вещественной ассимптоте кривой, чем и доказывается теорема.

§ 33. Отметим теперь некоторые свойства циркулярных кривых, связанные с характером корней уравнения (140) § 25. Корни этого уравнения 4 степени относительно k связаны с коэффициентами кривой. Геометрическое значение каждого корня—абсцисса центра направляющей окружности, соответствующей серии двояко касательных к данной циркулярной кривой окружностей. Значения k зависят, таким образом, от выбора координатных осей.

Можно выбрать эти оси так, чтобы один (или несколько в случае кратности их) из корней уравнения (140) обратился в нуль.

Мы знаем, что если кривая имеет двойную точку, то радиус направляющей окружности обращается в нуль, а сама окружность совпадает со своим центром—двойной точкой.

Определив абсциссу центра соответствующей направляющей окружности по уравнению (140), мы можем перенести начало координат, оставив оси параллельными, в точку с такой абсциссой (ордината может быть произвольна) и тогда соответствующий корень k уравнения (140), составленного для новых осей, обратится в нуль.

Если уравнения (140) имеет кратный корень, то кривая имеет двойную точку.

Действительно, уравнение (140) по разделении всех его членов на $(A+k)$ получит такой вид:

$$f(k)=k^3+Ak^2+F+Dk-\frac{E^2}{4(A+k)}=0. \qquad \textbf{(179)}$$

Условие кратности его корней будет, как известно,

$$f^1(k)=3k^2+2Ak+D+\frac{E^2}{4(A+k)^2}=0. \qquad (180)$$

Левая часть уравнения (180) представляет собою ни что иное, как квадрат радиуса направляющей окружности. В § 28 было показано, что при r=o циркулярная кривая имеет двойную точку в начале координат—центре направляющей окружности нулевого радиуса. Таким образом оба эти условия равносильны.

Справедливо и обратное предложение: *если циркулярная кривая имеет двойную точку (узловую или изолированную), то уравнение (140) имеет корень двойной кратности, а если двойная точка кривой есть точка возврата, то уравнение (140) будет иметь корень третьей кратности.*

Для доказательства возьмем уравнение циркулярной кривой с двойной точкой в форме (96) § 23.

$$x(x^2+y^2)+\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2=0. \qquad (181)$$

Для уничтожения в уравнении (181) члена с произведением xy перенесем начало координат, оставляя оси параллельными прежним в точку

$$\left(0,-\frac{1}{2}\beta\right)$$

В таком случае абсцисса не изменится. Старое начало координат в двойной точке кривой, следовательно и в новых осях абсцисса центра направляющей окружности равна 0, т. е. уравнение (140) будет иметь нулевой корень.

Выполним указанное преобразование: формулы преобразования будут:

$$x=x^1 \quad y=y^1-\frac{\beta}{2}.$$

Уравнение циркулярной кривой после преобразования получит такой вид:

$$x^1(x^{12}+y^{12})-\beta x^1y^1+\frac{\beta^2}{4}x^1+\alpha x^{12}+\beta x^1y^1-\frac{\beta^2x^1}{2}+\gamma y^{12}-\beta\gamma y^1+\gamma\frac{\beta^2}{4}=0.$$

или

$$x^1(x^{12}+y^{12})+\alpha x^{12}+y\gamma^{12}-\frac{\beta^2}{4}x^1-\beta\gamma y^1+\gamma\frac{\beta^2}{4}=0. \qquad (182)$$

В уравнении (182) коэффиценты при x^{12} и y^{12} не равны. В таком случае уравнение (140) примет несколько иной вид, его нетрудно по-

лучить, заменив в уравнении (131) § 25 коэффициент у y^2 буквою A_1, тогда вместо уравнения (140) § 25, мы получим следующее уравнение:

$$(A+k)(A_1+k)k^2+(A_1+k)F+kD(A_1+k)-\frac{E^2}{4}=0. \qquad (183)$$

Подставив в уравнение (183) коэффициенты уравнения (182), мы найдем

$$(\alpha+k)(\gamma+k).k^2+(\gamma+k)\frac{\beta^2\gamma}{4}-\frac{k\beta^2}{4}(\gamma+k)-\frac{\gamma^2\beta^2}{4}=0. \qquad (184)$$

или

$$\alpha\gamma k^2+k^3(\gamma+\alpha)+k^4+\frac{\gamma.^2\beta^2}{4}+\frac{k\beta^2\gamma}{4}-\frac{k\beta^2\gamma}{4}-\frac{k.^2\beta^2}{4}-\frac{\gamma^2\beta^2}{4}=0. \qquad (185)$$

Упростив уравнение (185), найдем окончательно:

$$k^4+(\alpha+\gamma)k^3+(\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}), k^2=0. \qquad (186)$$

Уравнение (186) имеет двукратный корень $k=o$, если

$$\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}\neq 0.$$

Если же

$$\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}=0,$$

то уравнение (186) будет иметь нулевой корень тройной кратности. Приняв во внимание, сказанное в § 22 относительно видов двойной точки циркулярных кривых, видим, что обратная теорема также справедлива.

Таким образом, в общем случае, когда все корни уравнения (140) различны, циркулярная кривая есть огибающая четырех серий двояко касательных окружностей. Если циркулярная кривая имеет двойную точку (узловую или изолированную), то она есть огибающая двух серий окружностей, а в случае точки возврата—циркулярная кривая есть огибающая одной серии двояко касательных окружностей. В двух последних случаях кривая есть также и огибающая серии окружностей, просто касательных к ней (проходящих через двойную точку кривой). Последняя серия окружностей соответствует четвертому простому корню уравнения (140).

§ 34. Для иллюстрации изложенного возьмем пример. Рассмотрим циркулярную кривую, изображенную на чертеже 26. Ее ур-ие:

$$x(x^2+y)^2+x^2+4xy+4y^2=0.$$

Она есть огибающая двух серий окружностей.

Первая серия сплошные окружности—суть окружности просто касательные к кривой (все они проходят через двойную точку—точку возврата нашей кривой). Вторая серия окружностей, начерченных пунктирными линиями, есть серия двояко касательных k кривой окружностей. Все это подтверждает соображения § 33.

Если перенести начало координат в центр кривой, то ее уравнение получит вид:

$$x_1(x_1^2+y_1^2)+\frac{11}{2}x_1^2+\frac{11}{2}y_1^2+\frac{23}{4}x_1-16y_1+\frac{125}{8}=0.$$

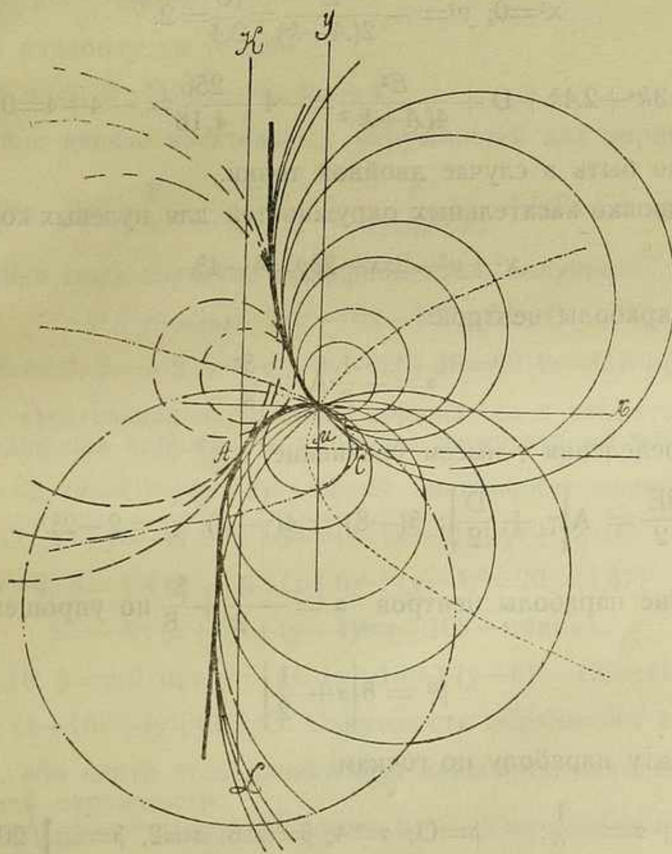
Ур-ие (140) в нашем случае будет:

$$k^4+11k^3+36k^2+\frac{189}{4}\,k+\frac{351}{16}=0.$$

Ур-ие (140) значительно упростится, если мы перенесем начало координат в точку $M(0,2)$. Формулы этого преобразования будут:

$$x=x^1$$

$$y=y^1-2.$$



Чертеж 26

Кривая в новых осях выразится следующим уравнением:

$$x^1(x^{12}+y^{12})+x^{12}+4y^{12}-4x^1-16y^1+16=0.$$

Уравнение (140):

$$(A+k)\,(A_1+k\;k^2+(A_1+k).F+kD(A_1+k)-\frac{E^2}{4}=0$$

принимает следующий вид

$$(1+k)\,(4+k)k^2+(4+k)16-4k(4+k)-64=0$$

или по раскрытии скобок:

$$k^4+5k^3+4k^2+64+16k-16k-4k^2-64=0.$$

По приведении подобных членов, находим, что

$$k^4+5k^3=0.$$

Полученный результат вполне согласуется с теорией § 33. Корни последнего уравнения:

$$k_1=k_2=k_3=0;\ k_4=-5.$$

Координаты центра направляющей окружности нулевых корней будут

$$x^1=0;\ y^1=-\frac{E}{2(A+k)}=\frac{16}{2.4}=2.$$

$$R^2=3k^4+2Ak+D+\frac{E^2}{4(A+k)^2}=-4+\frac{256}{4.16}=-4+4=0,$$

как и должно быть в случае двойной точки.

Ур-ие двояко касательных окружностей для нулевых корней:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=4-4\beta.$$

Ур-ие параболы центров:

$$\alpha=-\frac{1}{2}A+\frac{\beta^2}{8}$$

Для определения γ имеем уравнение:

$$\frac{\beta E}{2}=A\left(\gamma+\frac{D}{2}\right);\ \beta(-8)=4(\gamma-2);\ \gamma=2-2\beta.$$

Уравнение параболы центров $\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\beta^2}{8}$ по упрощении будет

$$\beta^2=8\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)$$

Строим эту параболу по точкам:

$\alpha=0;\ \beta=\pm2;\ \alpha=-\frac{1}{2};\ \ \beta=0;\ \alpha=4;\ \beta=\mp6;\ \alpha=2,\ \beta=\mp\sqrt{20}=\pm4{,}47$

$\alpha=8\ \beta=\pm\sqrt{68}=\mp8{,}24.$ Парабола центров начерчена пунктиром.

Строим двояко касательные окружности:

$\alpha=0;\ \beta=\mp2;\ \beta=+2;\ x^2+y^2-4y=4-8=-4;\ (x-0)^2+(y-2)^2=0$

Двояко касательная окружность обращается в точку, совпадающую с точкой возврата кривой.

При $\beta=-2$ получим $(x-0)^2+(y+2)^2=16;\ R=4.$

$\alpha=4.\ \beta=\mp6;$ при $\beta=+6\ \ (x-4)^2+(y-6)^2=32=(4\sqrt{2})^2=(5{,}64)^2$

$\beta=-6:(x-4)^2+(y+6)^2=80=(4\sqrt{5})^2=(8.94)^2$

Направляющая окружность для корня $k_4=-5$. Координаты ее центра:

$$x^1=-5;\quad y^1=-\frac{E}{2(4-5)}=\frac{E}{2}=-8.\quad R^2=3k^2+2k-4+\frac{256}{4(4-5)^2}=$$

$$=3.25-10+60=125;$$

$R=11{,}2$. Парабола центров: $\alpha=\frac{1}{2}(a+k)+\frac{\beta^2}{A^1+k}$; $\alpha=2-\frac{\beta^2}{2}$

$-2\alpha=-4+\beta^2$; $\beta^2=-2(\alpha-2)$.

Строим параболу по точкам:

$\alpha=0$ $\beta=\pm2$; $\alpha=2$; $\beta=0$; $\alpha=-6$; $\beta=\pm4$.

Уравнение двояко касательных окружностей для корня $k_4=-5$:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-\frac{F}{k}-\frac{E\beta}{A^1+k}+\frac{E^2}{4k(A_1+k)}+k(2\alpha+A+k)=0$$

Подставив сюда значение коэффициентов, получим:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-10x-16\beta+36=0$$

при $\alpha=0$; $\beta=\pm2$; $\beta=+2: x^2+y^2-4y-32+36=0$; $(x-0)^2+(y-2)^2=0$

Двояко касательная окружность обращается в двойную точку. Направляющая окружность проходит через эту же точку.

$\beta=-2$; $(x-0)^2+(y+2)^2+64=0$ окружность мнимая.

$\alpha=2$. $\beta=0: x^2+y^2-4x-20+36=0: (x-2)^2+y^2+12=0$ – мнимая.

$\alpha-6$; $\beta=\pm4$ $\beta=+4: (x+6)^2+(y-4)^2=20=(4{,}47)^2$

$\beta=-4: (x+6)^2+(y+4)^2=-108$ – мнимая.

$\alpha=-16$; $\beta=\pm6$ при $\beta=+6$ $(x+16)^2+(y-6)^2=192=(13{,}84)^2$

при $\beta=-6: (x+16)^2+(y+6)^2=0$. Окружность обращается в этом случае в точку, ибо центр этой двояко касательной окружности лежит на направляющей окружности.

Парабола, соответствующая корню $k_4=-5$, начерчена пунктиром с двумя точками.

Направляющая для этой серии двояко касательных окружностей окружность начерчена таким же пунктиром.

Кривая: $x(x^2+y^2)+x^2+4xy+4y^2=0$ построена по точкам:

при $x=-1$; $3y^2-4y=0$ $y_1=0$ $y_2=\frac{4}{3}=1^1/_3$

$x=-2$ $y^2-4y-2=0$ $y_1=4{,}44$; $y_2=0{,}44$

Уравнение вещественной ассимптоты: $x+4=0$ (КА).

Координаты главной точки А: $Xa=-4$. $Ya=-3$.

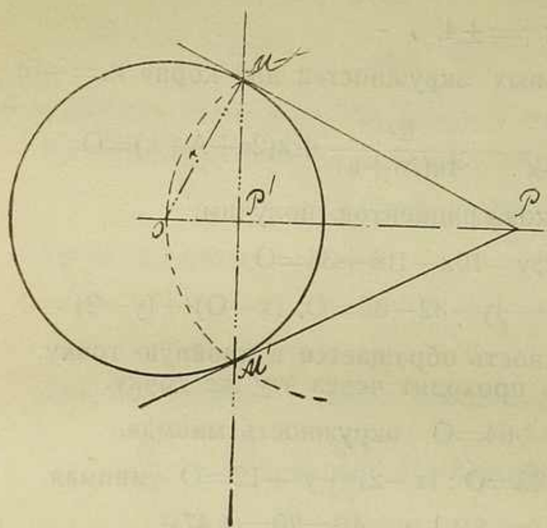
Координаты центра: $xc=\frac{3}{2}$

$y_c=-2$

Конец главы I-ой.

ГЛАВА II.

§ 1. В различных вопросах геометрии играют важную роль геометрические преобразования. Рассмотрим сейчас основные свойства так называемого инверсионного преобразования: им нам придется часто пользоваться в настоящей главе. Это преобразование впервые было применено M. Stubbs'om Philosophical Magazine 1843 г. Полная аналитическая теория инверсионного преобразования дана M. Liouville'ем Journal de Mathématique T. XII.



Чертеж 27

Пусть нам дана окружность (черт. 27) радиуса k и точка P вне ее. Соединив точку P с центром, построим поляру точки P по отношению к окружности O. Эта поляра MM пересечет линию центров в точке P^1, которая и будет соответствующей точке P в этом преобразовании. Из $\triangle$ OMP^1 находим:

$$OP.OP^1=k^2 \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

Если положим $k=1$ и обозначим OP и OP^1 соответственно через ρ и ρ^1, то равенство (1) можно написать в виде:

$$\rho\rho^1=1, \text{ или } \rho=\frac{1}{\rho^1} \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

Из соотношения (2) видна причина названия этого рода преобразований преобразованиями обратных радиусов—векторов или инверсионными преобразованиями. Окружность (черт. 27) наз. основной окружностью O центром инверсии, k—модулем или степенью инверсии. Инверсия устанавливает однозначную зависимость между точками части плоскости внутри окружности O и точками вне ее в том смысле, что каждой точке плоскости вне этой окружности соответствует единственная точка внутри окружности и обратно.

С удалением точки P точка P^1 приближается к O. и для бесконечно-удаленной точки соответственной будет центр инверсии. Наоборот, при приближении точки P к окружности и P^1 приближается к ней, так что на самой окружности соответственные точки совпадают.

Если трактовать этот вопрос аналитически, то можно сказать, что в инверсионном преобразовании точке с координатами ρ и θ соответствует новая точка с координатам ρ^1 и θ^1, причем эти координаты связаны следующими зависимостями.

$$\rho\rho^1=k^2 \text{ и } \theta=\theta^1 \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

Переходя к прямоугольным Декартовым координатам, мы получим такие формулы:

$$\sqrt{x^2+y^2}\,.\,\sqrt{x^{12}+y^{12}}=k^2;\ y:x=y^1:x^1 \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Из соотношений (4) сейчас же получим формулы инверсионного преобразования для Декартовых координат:

$$x=\frac{k^2.x^1}{x^{12}+y^{12}};\quad y=\frac{k^2.y^1}{x^{12}+y^{12}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Формулы (5) показывают, что инверсионное преобразование однозначно, ибо x и y рационально выражаются через x^1 и y^1.

Справедливо и обратное заключение, ибо

$$x^1=\frac{к,^2\, x}{x^2+y^2}\ \text{и}\ y^1=\frac{к.^2\, y}{x^2+y^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

что очень легко проверить.

Преобразования, обладающие свойством выражать как старые координаты через новые, так и новые через старые, рационально называются *бирациональными* или *Кремоновыми*.

Формулы (6) подтверждают аналитически все те свойства инверсии, какие были указаны выше на основании чисто геометрических соображений.

Из них, например, легко усматривается, что всякой бесконечно-удаленной точке соответствует центр инверсии и обратно, что точка инверсионная по отношению к центру инверсии есть любая бесконечно удаленная точка.

Следовательно центр инверсии есть единственная вещественная точка, инверсионная которой *не определяется однозначно*.

Однозначность инверсионного преобразования сохраняется также и для мнимых точек. Существуют механические приборы, при помощи которых по данной фигуре можно получить ее инверсионное преобразование.

Наиболее известным из них является прибор инверзор *Peausellier*-Липкина *Peaucellier* Nouv. Ann. de Math. 1864 г. и 1873 г.) Тот же прибор был описан студ. Липкиным (в Изв. Петер. Акад. Наук 1871 г.)

§ 2. Отметим основные свойства инверсионного преобразования:

1) преобразованием прямой линии вообще будет окружность. Окружность же при инверсионном преобразовании переходит вообще снова в окружность.

Если преобразуемые прямая или окружность проходят через центр инверсии, то их инверсионными преобразованиями будут прямые.

Действительно, возьмем ур-ие какой-нибудь окружности:

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

и преобразуем его по формулам инверсионного преобразования (5), в таком случае мы получим:

$$\frac{к^4\, x^{12}+к^4\, y^{12}}{(x^{12}+y^{12})^2}+\frac{2aк^2\, x^1+2bк^2\, y^1}{x^{12}+y^{12}}+c=0 \quad . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Упростив уранение (8) мы легко найдем:

$$к^4+2aк^2.\, x^1+2bк^2\, y^1+cx^{12}+cx^{12}=0 \quad . \; . \; . \; . \quad (9)$$

т. е. получим снова окружность.

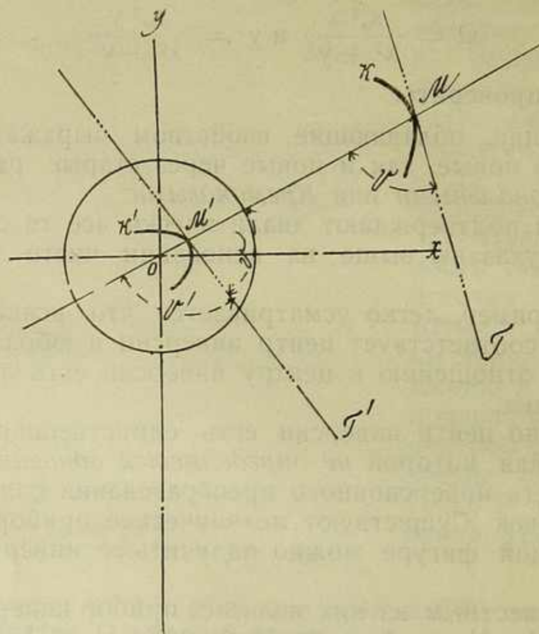
Если $c = 0$, т. е. данная окружность проходит через центр инверсии, то преобразованием ее будет:

$$ax^1 + by^1 + \frac{k^2}{2} = 0 \, , \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

т. е. прямая линия.

2) Касательные в двух соответственных точках двух преобразованных по инверсии *кривых образуют равные углы с общим радиусом вектором.*

Обозначим для доказательства этого предложения через v и v^1 углы, составленные касательными к кривой и к ее инверсионному преобразованию с радиусом вектором, в таком случае (черт 28):



Чертеж 28

$$\operatorname{tg} v = \rho . \frac{d\theta}{d\rho} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

и

$$\operatorname{tg} v^1 = \rho^1 . \frac{d\theta}{d\rho^1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

для первой и второй кривых (МК) и ($M^1 K^1$), но так как $\rho^1 = \frac{k^2}{\rho}$, то отсюда $d\rho^1 = -\frac{k^2 \, d\rho^2}{\rho^2}$. Подставив эти выражения ρ^1 и $d\rho^1$ в ур-ие

$$(12), \text{ мы найдем, что } \operatorname{tg} v^1 = \frac{k^2}{\rho} \cdot \frac{d\theta}{\frac{-k^2 d\rho}{\rho^2}} = -\rho \frac{d\theta}{d\rho} \quad . \; . \quad (13)$$

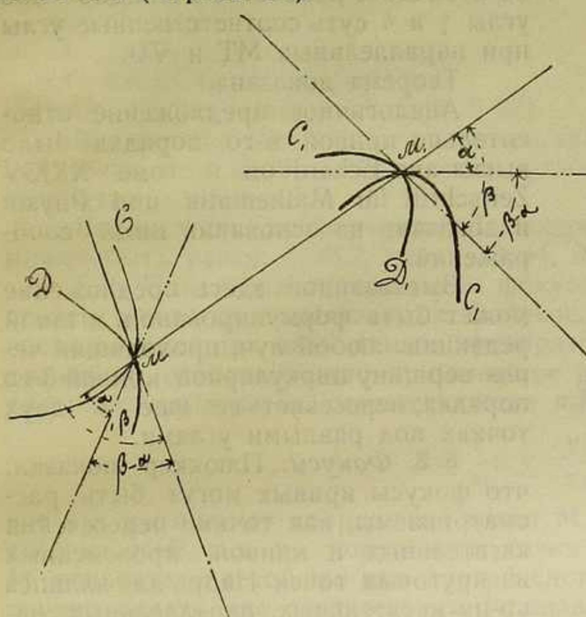
Следовательно $\operatorname{tg} v = -\operatorname{tg} v^1$.

Значит углы v и v^1 дополняют друг друга до π.

Касательные МТ и $M^1 T^1$ — антипараллельны.

Точка их пересечения вместе с точками М и M^1 служат вершинами равнобедренного треугольника.

Из предложения 2-го непосредственно вытекает, что две какие-нибудь кривые и два их преобразования по способу обратных радиусов векторов пересекаются под одним и тем же углом. Этот угол равен разности углов, которые кривые и их инверсионные *преобразавания* составляют с общим радиусом вектором точки, в которой они пересекаются. (Чертеж 29).



Чертеж 29

Из того же предложения 2-го нетрудно вывести и такие следствия: а) если мы умеем построить касательную к данной кривой, то мы можем построить касательную и к ее инверсионному преобразованию и обратно; в) если две какие-либо кривые касаются друг друга в точке, отличной от центра инверсии, то и преобразование этих кривых по способу обратных радиусов векторов также касаются друг друга в соответственной точке. 3) Инверсионным преобразованием параболического пучка окружностей, имеющих центр в центре инверсии, являются прямые, параллельные радикальной оси этого пучка.

Действительно, ур-ие параболического пучка окружностей, имеющих центр в начале координат, будет

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x = 0 \quad . \ . \ . \ (14) \ (\text{см. § 20 глава I})$$

$$\text{или} \ (x - \alpha)^2 + y^2 = \frac{\alpha^2}{4}. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (15)$$

ур-ие (15) после преобразования его по формулам инверсии (5) принимает вид:

$$x^1 = \frac{k^2}{2\alpha} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (16)$$

и представляет пучек прямых, параллельных оси ОУ—радикальной оси параболического пучка.

На основании свойства 2-го инверсионного преобразования (глава II, § 2) легко доказать следующее предложение, относящееся к лучам, проходящим через вершину циркулярной кривой (см. черт. 29а).

Если через вершину циркулярной кривой М проведем луч MNP, пересекающий эту кривую в точках N и P, а вещественную ее ассимптоту в точке V [1]), то сумма tg углов, которые этот луч составляет с касательными к цир. кривой в точках N и P равна ts угла этого же луча с вещественной ассимптотой циркулярной кривой. [Углы отсчитываются от положительного направления луча против часовой стрелки]

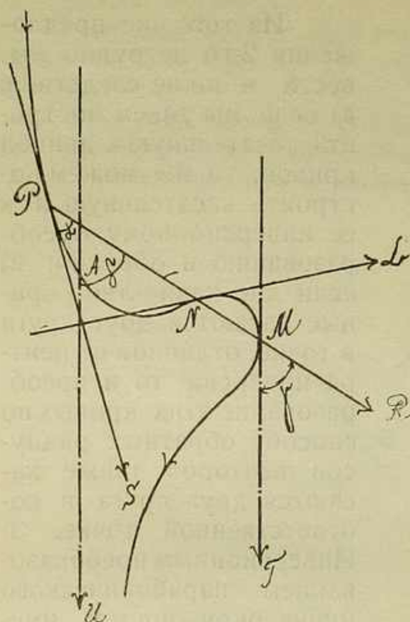
Действительно, так как точки N и P являются инверсионными друг по отношению к другу, то ∠MNL=∠SPM=α

---

[1]) Буква V не помещена на чертеже 29-а.

Остается доказать, что $\operatorname{tg} RPS + \operatorname{tg} RNL + \operatorname{tg} RMT = \operatorname{tg} RVU$ т. е. $\operatorname{tg}(360^0 - \alpha) + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(360 - \gamma) = \operatorname{tg}(360 - \delta)$ [1] последнее соотношение может быть переписано таким образом:

$$-\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\delta, \text{ т. е. } \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\delta,$$



Чертеж 29а

но последнее равенство очевидно—ибо углы γ и δ суть соответственные углы при параллельных MT и VU.

Теорема доказана.

Аналогичное предложение относительно кривой n-го порядка было высказано Echardt'ом в томе XXXIV Zeitschrift für Mathematik und Physik и доказано на основании иных соображений.

Высказанное здесь предложение может быть формулировано и в такой редакции: любой луч, проходящий через вершину циркулярной кривой 3-го порядка, пересекает ее еще в двух точках под равными углами.

§ 3. *Фокусы.* Плюккер показал, что фокусы кривых могут быть рассматриваемы, как точки пересечения касательных к кривой, проведенных из круговых точек. Напр., для эллипса ур-ия касательных, параллельных направлению F, как известно будут:

$$y = mx \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2}$$

В нашем случае ур-ия изотропных касательных будут иметь вид:

$$y = ix \pm \sqrt{b^2 - a^2} = ix \pm ci, \text{ где } c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

и

$$y = -ix \pm ci$$

Решив совместно по два из четырех ур-ий (17), мы получим координаты всех четырех фокусов эллипса. То же получим и для прочих кривых 2-го порядка.

Приняв указанное свойство фокусов кривых 2-го порядка за их определение, Плюккер распространил его и на кривые высших порядков.

Таким образом, *фокусом* кривой называется точка, через которую проходят касательные к этой кривой с угловыми коэффициентами $\mp i$.

Когда точки касания таких касательных находятся на конечном расстоянии, то фокус называется *обыкновенным*.

Если точки касания удалены на ∞ (касательные суть ассимптоты), то фокус называется *особенным*.

Каждой касательной вида $u + iv = 0$ соответствует только один вещественный фокус—именно точка пересечения ее с сопряженной касательной: $u - iv = 0$.

Число фокусов кривой зависит от ее класса. Класс кривой—степень ее уравнения в тангенциальных координатах—определяет число

[1]) Все углы отсчитываются *против* часовой стрелки.

касательных, какое можно провести к данной кривой из данной точки вне ее.

Класс плоской кривой определяется, как известно формулой Плюккера:

$$n=m(m-1)-2\upsilon-3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

где n—класс кривой
m—ее порядок
δ—число ее узловых точек
υ—число ее точек возврата.
[Salmon, Courbes planes Chap. II § 67]

Мы видели уже, что циркулярная кривая или вовсе не имеет двойной точки или может иметь одну узловую точку или одну точку возврата.

Ввиду этого, по формулам Плюккера, класс циркулярной кривой может быть равен: $6=3.2$, или $6-2=4$, или наконец $6-3=3$.

§ 4. Определим теперь число фокусов циркулярных кривых в частности число их вещественных фокусов. Для решения этой задачи воспользуемся так называемым преобрзованием Ньютона. Это преобразование, особенно часто применяемое при изучении точек кривых, расположенных на ∞, осуществляется при помощи формул:

$$x=\frac{1}{x_1};\; y=\frac{y_1}{x_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

где x и y означают координаты точки M, отнесенной к какой-нибудь системе осей, а x_1 y_1—координаты точки M_1, соответствующей точке M, относительно той же или другой системы координатных осей. Нетрудно видеть, что соотношения, устанавливаемые формулами преобразования (19), однозначны.

Отметим основные свойства преобразования Ньютона:

1) всякая прямая преобразуется в прямую же. Действительно, прямой: $ax+by+c=0$ в первой системе осей будет соответствовать $a+by_1+cx_1=0$, т. е. также прямая во второй системе.

Угловой коэффициент данной прямой $-\frac{a}{b}$ равен ординате начала ее преобразования. В частности бесконечно удаленной прямой в одной системе соответствует ось ОУ в другой.

2) алгебраическая кривая $m^{\text{-го}}$ порядка имеет своим преобразованием кривую того же порядка.

В самом деле, пусть уравнение.

$$\varphi_m(x,y)+\varphi_{m-1}(x,y)+\varphi_{m-2}(x,y)+ \;.\;.\;.\;.\;.+\varphi_0(x,y)=0 \quad . \; . \quad (20)$$

будет уравнением некоторой кривой $m^{\text{-го}}$ порядка в первой системе оси

Ее преобразование будет иметь вид:

$$\varphi_m(1,y_1)+x_1.\ \varphi_{m-1}(1,y)+ \;.\;.\;.\;. +x_1^m.\ \varphi_0(1,y)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

и представит очевидно также кривую $m^{\text{-го}}$ порядка.

3) точкам пересечения некоторой кривой C и прямой D соответствуют общие точки их преобразований. Это непосредственно вытекает из (1) и (2). Например окружность: $x^2+y^2=5$ и прямая $y=1$ пересекаются в точках: $(+2,1)$ и $(-2,1)$. Их преобразования: $1+y^2=5x^2$ и $y=x$ пересекутся в точках: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ и $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, которые являются соответственными точкам $(2,1)$ и $(-2,1)$ в этом преобразовании.

4) Из только что указанного свойства (3) выходит, что касательной в точке M к кривой C соответствует касательная в точке M_1 к кривой C_1, причем M_1 и C_1 суть преобразования M и C.

Это же предложение нетрудно доказать и непосредственно аналитическим путем.

Будем рассматривать y как функцию от x, а y_1 как функцию от x_1 (между ними должна быть зависимость, определяемая кривыми C и C_1) x, кроме того есть функция от x_1 в силу уравнения $x=\frac{1}{x_1}$

Из второго уравнения преобразования в силу зависимости $x=\frac{1}{x_1}$ находим, что

$$y=\frac{y_1}{x_1}=y_1\,x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Отсюда вычисляем:

$$\frac{dy}{dx}=y_1+x\frac{dy_1}{dx_1}\frac{dx_1}{dx} \text{ но } xx_1=1, \text{ след.} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

$$x\frac{dx_1}{dx}+x_1=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

или

$$x\frac{dx_1}{dx}=-x_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Таким образом получаем:

$$\frac{dy}{dx}=y_1-x_1\frac{dy_1}{dx_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

Аналогично вычислим и угловой коэффициент касательной $\frac{dy_1}{dx_1}$ из (22) видно, что

$$y_1=y\,.\,x_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

Дифференцируя последнее равенство, мы получим:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=y.+x_1\frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dx_1}$$

но $x+x_1\frac{dx}{dx_1}=0$ ибо $xx_1=1$ (23), следовательно

$x_1\frac{dx}{dx_1}=-x$, значит

$$\frac{dy_1}{dx_1}=y-x\frac{dy}{dx} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

След., если касательная к кривой C в точке M (xy) будет иметь своим уравнением

$$Y-y=\frac{dy}{dx}\left\{X-x\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

или

$$Y=\frac{dy}{dx}.X+\left\{y-x\frac{dy}{dx}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

то уравнение ее преобразования будет:

$$\frac{Y_1}{X_1}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{X_1}+\left\{y-x\frac{dy}{dx}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

(преобразованию подлежат только текущие координаты).

Ур-ие (31) по освобождении от знаменателя принимает форму

$$Y_1=\left\{y-x\frac{dy}{dx}\right\}X_1+\frac{dy}{dx} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

Подставив в ур-ие (32) выражение $y-x\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dy}{dx}$ из уравнений (28) и (26), мы получим:

$$Y_1=\frac{dy_1}{dx_1}.X_1+y_1-x_1\frac{dy_1}{dx_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

Ур-ие (33) может быть переписано таким образом:

$$Y_1-y_1=\frac{dy_1}{dx_1}(X_1-x_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

Уравнение (34) наглядно показывает, что преобразование касательной к кривой C в точке M есть касательная к кривой G_1 в точке M_1, чем и доказывается теорема.

5) Из последнего свойства вытекает, что класс кривой также не изменяется при преобразовании Ньютона.

§ 5. Применим теперь указанные выше общие свойства преобразования Ньютона к интересующему нас вопросу.

Рассмотрим некоторую прямую изотропного направления, пусть ее уравнение будет

$$Y=iX+A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Ее преобразование будет:

$$Y_1=i+AX_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

также прямая (свойство 1), проходящая очевидно через точку (0,i) Если прямая (35) касательная к некоторой кривой C, то прямая (36) будет касательной к преобразованию C_1 кривой C (свойство 4-е).

Число касательных к данной кривой C_1, проходящих через данную точку (o, i) равно, как известно, классу этой кривой n, если точка лежит вне кривой. Оно равно $n-1$, если данная точка есть обыкновенная точка, лежащая на кривой. Число это уменьшается до $n-2$, если данная точка есть двойная точка кривой. (См. Salmon, Courbes planes p. 89).

Возьмем ур-ие циркулярной кривой в простейшем виде уравнения (26) § 5 гл. I:

$$(x+A)\,(x^2+y^2)+Dx+Ey+F=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

и преобразуем его по формулам Ньютона.

По выполнении всех выкладок оно примет следующий вид:

$$Fx_1^3+Ay_1^2x_1+Ey_1x_1^2+Dx_1^2+Ax_1+1+y_1^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

Это уравнение вообще кривой 3-го порядка будет того же класса (свойство 5-е), что и уравнение (37).

Нетрудно убедиться, что кривая (38) проходит через точку (0,i).

Как известно, условия, чтобы данная точка кривой 3-го порядка $f(x, y, z)=0$ в однородных координатах была двойной точкой, заключаются в совместности уравнений:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0;\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial z}=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (39)$$

при $z=1$ в случае двойной точки на конечном расстоянии и при $z=0$ в случае двойной точки на ∞.

[См. например: Вельмин, кривые 3-го порядка стр. 78].

Применив этот критерий к уравнению (38) (сделав его предварительно однородным), мы убедимся, что точка $(0, i)$ есть обыкновенная точка кривой.

Число касательных с угловым коэффициентом i к циркулярной кривой (37) равно, на основании изложенного выше, числу касательных к кривой (38), проведенных из точки $(0,i)$. Последнее же число, в силу соображений § 5, равно $n-1$.

Но так как среди таких касательных должна быть и одна мнимая ассимптота циркулярной кривой (с угловым коэффициентом $+i$), то число касательных к циркулярной кривой (37) с точками касания на конечном расстоянии будет равно $n-2$, где n обозначает класс кривой (38) или, что одно и то же (37).

Аналогично найдем, что число таких же касательных (с точками касания на конечном расстоянии) с угловым коэффициентом $-i$ равно также $n-2$, где n имеет прежнее значение.

Касательные 1-й группы пересекутся с касательными 2-й группы в $(n-2)^2$ точках, которые по Плюккеру и будут *обыкновенными фокусами циркулярной кривой.*

Отсюда легко видеть, что число фокусов циркулярной кривой будет равно 16, или 4, или 1, смотря по тому, будет ли n равняться 6, 4 или 3.

В числе этих фокусов будут, конечно, и мнимые.

Число вещественных обыкновенных фокусов циркулярной кривой равно $n-2$.

Вещ. фокусы получаются от пересечения каждой из касательных 1-й группы с сопряженной ей касательной 2-й группы. Таким образом циркулярная кривая без двойной точки имеет четыре вещественных обыкновенных фокуса, кривая с узловой точкой имеет их два, и, наконец, цирк. кривая с точкой возврата имеет только один вещественный обыкновенный фокус.

§ 6. Особенный фокус кривой есть точка пересечения ее мнимых ассимптот. Координаты его были найдены в § 2 главы I.

К сказанному раньше относительно особенного фокуса или центра кривой следует здесь прибавить, что он совпадает с фокусом параболы (138) § 25 главы I, по которой движутся центры двояко касательных окружностей. В случае формы (26) § 5 уравнения кривой особенный фокус ее совпадает с началом координат. Фокус параболы (138) также имеет координаты (0,0), в чем нетрудно убедиться при помощи легкого вычисления.

Отметим еще одно свойство особенного фокуса циркулярной кривой.

Пусть $f(x, y, z)=0$ выражает уравнение циркулярной кривой 3-го пор. в однородных координатах.

Уравнение $x^1\frac{\partial f}{\partial x}+y^1\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (40)$

где $x^1\ y^1$ есть данная точка, называется уравнением первой поляры полюса $(x^1\ y^1)$ по отношению к данной кривой 3-го порядка.

Уравнение (40) будет представлять некоторое коническое сечение, ибо оно будет, как легко сообразить, второй степени относительно x и y. Можно искать такой полюс, для которого 1-я поляра относительно данной циркулярной кривой будет окружностью. Это условие заключается в том, что искомый полюс $x^1 y^1$ должен совпадать с особенным фокусом циркулярной кривой.

Для упрощения доказательства возьмем уравнение циркулярной кривой в простейшей форме: $(x+A)(x^2+y^2)+Dx+Ey+F=0$ или в однородных координатах;

$$x^3+Ax^2z+xy^2+Ay^2z+Dxz^2+Eyz^2+Fz^3=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

Уравнение первой поляры будет:

$$x^1.(3x^2+2Axz+y^2+Dz^2)+y^1(2xy+2Ayz+Ez^2)+Ax^2+$$
$$+Ay^2+2Dxz+2Eyz+3Fz^2=0. \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

Перейдя от однородных к обыкновенным координатам, получим

$$x_1(3x^2+2Ax+y^2+D)+y^1(2xy+2Ay+E)+Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+3F=0 \quad (43)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (43) будет представлять окружность лишь при условии $x^1=0,\ y^1=0$.

§ 7. При помощи теоремы § 25 главы I мы можем найти координаты обыкновенных фокусов циркулярной кривой, а также доказать так называемую теорему *Hart'a* относительно последних.

Пусть $x_1\ y_1$ будут координатами какого-нибудь обыкновенного фокуса циркулярной кривой, тогда прямые

$$\begin{aligned} y-y_1&=i\ (x-x_1) \\ y-y_1&=i\ (x\ \ x_1) \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

будут касательными к рассматриваемой кривой.

Их совокупность:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

мнимая окружность будет иметь двойное касание с рассматриваемой циркулярной кривой. [§ 25 гл. I].

Мы показали, что в с такие окружности выражаются уравнением [§ 25 гл. I]:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-\frac{F}{k}-\frac{E\beta}{A+k}+\frac{E^2}{4k(A+k)}+k(2\alpha+A+k)=0 \quad \ldots \quad (46)$$

Уравнения 45 и (46) должны быть следовательно тождественными, т. е.

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-\frac{F}{k}-\frac{E\beta}{A+k}+\frac{E^2}{4k(A+k)}+k(2\alpha+A+k)=x^2-2x_1x+x_1^2+$$
$$+y^2-2y_1y+y_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

Из (47) находим:

$$\begin{aligned} x_1&=\alpha \\ y_1&=\beta \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

$$x_1^2+y_1^2+\frac{F}{k}+\frac{Ey_1}{A+k}-\frac{E^2}{4k(A+k)}-k(2x_1+A+k)=0. \quad \ldots \quad (49)$$

Уравнения (48) дают координаты обыкновенного фокуса циркулярной кривой, соответствующего определенному значению к.

Сравнив же уравнение (49) с уравнением (143) § 25 главы I, мы приходим к заключению, что уравнение (40) есть ничто иное, как уравнение направляющей окружности данной серии двояко касательных окружностей.

Отсюда следует, что обыкновенные фокусы циркулярной кривой совпадают с точками пересечения каждой из парабол (138) с направляющей окружностью (143) § 25, соответствующей тому же (из 4-х) значений к.

Точек пересечения будет в каждом случае 4.

Другими словами, *16 фокусов циркулярной кривой лежат на четырех окружностях, причем каждая из этих окружностей содержит по четыре фокуса кривой.*

Это и есть теорема Hart'a. Ее можно доказать и чисто геометрическим путем, исходя из того, что ангармоническое отношение пучка четырех касательных, проведенных к кривой из какой-нибудь точки на ней, постоянно. [Salmon, Courbes planes, Paris 1884 § 168].

§ 8. Теорема § 7 остается справедливой и для $к=0$. Если же $к=-A$, т. е. $A+к=0$, то при помощи соображений § 7 мы не получим координат фокусов. В этом частном случае парабола (138) обращается в пару прямых, совпадающих с осью абсцисс (уравнение их $\beta^2=0$). В таком случае, как известно (§ 26 гл. I) $E=0$.

Координаты фокусов в этом случае можно найти из таких соображений: фокусы кривой должны быть расположены на оси абсцисс (парабола, на которой они лежат, сливается с осью. X) значит, достаточно вычислить только абсциссы этих фокусов. Пусть уравнение циркулярной кривой будет (при $E=0$):

$$(x+A).(x^2+y^2)+Dx+F=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

Для того, чтобы точка $(x_1\ o)$ была фокусом цирк. кривой (50), необходимо и достаточно, чтобы прямые:

$$y=\pm\ i\ (x-x_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

были касательными к кривой (50), т. е. пересекали бы ее в двух совпадающих точках.

Координаты точек пересечения кривой (50) с прямыми (51) найдутся из уравнений их при совместном их решении, т. е.

$$(x+A)\,.\,(x^2-x^2+2xx_1-x_1^2)+Dx+F=o \quad \ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

$$\text{или} \quad 2x_1x^2+(2Ax_1-x_1^2+D).\,x+F-Ax_1^2=o. \quad \ldots\ldots \quad (53)$$

Условие равенства корней уравнения (53):

$$(2Ax_1-x_1^2+D)^2-4.\,(F-Ax_1^2).\ 2x_1=o \quad \ldots\ldots \quad (54)$$

Из р авнения (54) и найдем координаты (абсциссы) фокусов кривой, соответствующих значению $к=-A$.

§ 9. Обыкновенные фокусы циркулярной кривой могут быть найдены также и при помощи инверсионного преобразования на основании следующего свойства этого преобразования; *точка инверсионная по отношению к фокусу* (α,β) *данной кривой есть фокус кривой— инверсионной по отношению к данной.* Действительно если (α,β) суть координаты обыкновенного фокуса некоторой кривой, то прямые

$$y-\beta=\pm i\ (x-\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

суть касательные к этой кривой в точке, лежащей на конечном расстоянии от начала координат. Совокупность этих касательных

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

будет, как было уже показано, представлять окружность нулевого радиуса—двояко касательную с данной кривой.

Эта окружность совпадает со своим центром (α,β). Следовательно фокус кривой можно рассматривать как окружность нулевого радиуса, имеющую двойное касание с данной кривой.

Подвергнем уравнение (56) инверсионному преобразованию по формулам (5) § 1 гл. 2-ой.

После несложных преобразований оно получит такой вид:

$$\left\{x'-\frac{k^2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\right\}^2+\left\{y'-\frac{k^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right\}^2=0 \quad . \quad . \quad (57)$$

Уравнение (57) есть ничто иное как уравнение окружности нулевого радиуса, имеющей двойное касание с инверсионным преобразованием данной кривой. Точка $M_1\left\{\frac{k^2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \frac{k^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right\}$ по предыдущему есть фокус инверсионного преобразования кривой. Но M_1 есть ни что иное, как инверсионное преобразование фокуса (α,β) данной кривой. Теорема таким образом доказана.

§ 10. Для того, чтобы воспользоваться способом инверсии в исследовании свойств циркулярных кривых, докажем следующее предложение: *инверсионное преобразование конического сечения по отношению к какой-ниб. точке его есть циркулярная кривая 3-го порядка, вещественная ассимптота которой параллельна касательной к данному коническому сечению в центре инверсии.*

Уравнение конического сечения по отношению к точке кривой, как к началу координат, можно написать в сокращенной форме так:

$$u_2+u_1=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

u_2 есть форма 2-й степени с двумя переменными u_1—форма первой степени с двумя переменными.

Инверсионное преобразование (58) будет иметь вид:

$$r^2u_1+k^2u_2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

где $r=x'^2+y'^2$, а k—степень инверсии.

Очевидно, что уравнение (59) есть уравнение циркулярной кривой.

Так как в уравнении (59) отсутствуют члены 1-го измерения, то начало координат является двойной точкой кривой. (§ 23 глава 1). Эта двойная точка будет изолированной, в случае если коническое сечение эллипс (дискриминант формы $u_2>0$), точкой возврата в случае параболы (дискриминант $u_2=0$) и узловой точкой в случае гиперболы (дискриминант $u_2<0$). [§ 22 глава I].

Уравнение $u_1=0$ дает, как известно, уравнение касательной в начале координат к данному коническому сечению. Из уравнения же $u_1=0$ находится угловой коэффициент вещественной ассимптоты кривой (59). Отсюда следует, что эти касательная и ассимптота параллельны. Теорема—доказана.

Если возьмем вершину конического сечения за центр инверсии, то получаемые циркулярные кривые будут простейшими.

Например, уравнение конических сечений, отнесенное к вершине, будет, как известно:

$$y^2=2px\pm q^2x^2, \text{ где } p=\frac{b^2}{a}; q=\frac{b^2}{a^2} \quad . \quad . \quad (60)$$

Инверсионным преобразованием уравнения (60) будет следующее:

$$x^1.(x^{12}+y^{12})=mx^{12}+ny^{12} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

значения m и n легко могут быть вычислены через p, q и k.

Именно $m=\pm\frac{q^2k^2}{2p}; n=\frac{k^2}{2p}$.

Если $m>0$ и $n>0$, то кривая (61) является инверсионным преобразованием *эллипса*, при $m=0$ кривая (61) служит инверсионным преобразованием *параболы* и называется *циссоидой Диоклеса.*

При $m<0$ циркулярная кривая является инверсионным преобразованием гиперболы.

Если $m=-n$, то получается кривая, которая служит инверсионным преобразованием *равнобочной гиперболы.* Она называется *строфоидой* или, у английских авторов, *логоцикликой* Booth'а. Booth рассматривал ее свойства в связи с геометрической теорией логарифмов.

§ 11. Для иллюстрации изложенной в предыдущих §§ теории фокусов рассмотрим в качестве примера *циссоиду Диоклеса.* Ее уравнение будет:

$$x(x^2+y^2)=2ay^2; \; m=0 \; n=2a, \text{ где} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

a обозначает радиус производящего круга.

В уравнении (62) начало координат в двойной точке кривой (точке возврата). Перенесем начало координат в особенный фокус кривой. Его координаты (§ 3 гл. I) будут $(-a,0)$.

После преобразования уравнение циссоиды получит вид:

$$(x-3a).(x^2+y^2)+3a^2x-a^3=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Уравнение для определения корней к (ур-ие 140 § 25 гл. I) в данном случае будет: $(k-3a)^2.k^2-a^3.(k-3a)+3a^2k(k-3a)=0$ . . (64)

или проще: $$(k-3a)(k-a)^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Отсюда: $k_1=3a$, $k_2=k_3=k_4=a$.

Корень k_2—тройной кратности, что вполне согласуется с теорией, изложенной в § 33 главы I.

Парабола, соответствующая $k_1=3a$ (§ 8 гл. I), обратится в $\beta^2=0$ (две прямые, совпадающие с осью x).

Абсциссы фокусов, расположенных на этой прямой, найдутся из уравнения (54) (§ 8 гл. 2):

$$(2Ax_1-x_1^2+D)^2-8x_1(F-Ax_1^2)=0$$

в нашем случае последнее уравнение может быть переписано так:

$$x_1^4-12ax_1^3+30a^2x_1^2-28a^3x_1+9a^4=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

Ур-ию же (66) можно по разложении его левой части придать вид:

$$(x_1-9a).(x_1-a)^3=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

Следовательно, корни его будут:

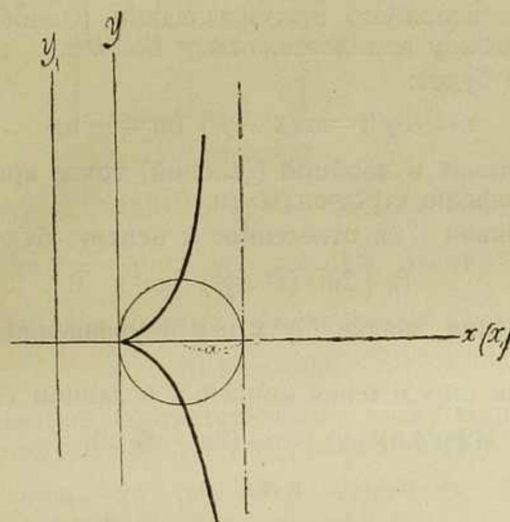
$$x_1=9a; x_2=x_3=x_4=a.$$

Обыкновенный вещественный фокус циссоиды будет иметь координаты: (9a, 0).

Его же можно получить путем инверсионного преобразования фокуса той параболы, которая является инверсионным преобразованием циссоиды. Парабола эта относительно осей xy (черт 30) будет иметь уравнение:

$$y^2 = \frac{m^2}{2a} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

где m—модуль инверсии.



Чертеж 30

Фокус этой параболы будет иметь координаты: $\left(\frac{m^2}{8a}, 0\right)$

Его инверсионное преобразование будет иметь координаты:

$$\left(\frac{m^2 \frac{m^2}{8a}}{\frac{m^4}{64a^2} + 0}, 0 \right), \text{ или } \left(8a, \ 0 \right)$$

Координаты того же фокуса относительно системы осей $x_1 y_1$ будут (9a, 0), т. е. те же самые, что найдены раньше.

Точки, определяемые абсциссами: $x_2 = x_3 = x_4 = a$, совпадают с точкой возврата циссоиды.

Исследуем теперь корни $k_2 = k_3 = k_4 = a$.

Парабола центров, соответствующая этому корню, будет выражаться уравнением:

$$\alpha = -\frac{1}{2}(A + k) + \frac{\beta^2}{2(A+k)} \text{ или } \alpha = a - \frac{\beta^2}{4a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

Уравнение двояко касательных окружностей:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 2a\alpha - a^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

Уравнение направляющей окружности

$$(x-a)^2+y^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71).$$

Рассматриваемая циссоида есть огибающая системы окружностей (70) Эти окружности, как видно из их уравнения, проходят через точку возврата циссоиды (a, 0) и следовательно не будут в собственном смысле двояко касательными (§ 26 глава I), а просто касательными к кривой в двойной точке. Точки пересечения параболы (69) с направляющей окружностью (71) не будут следовательно *фокусами нашей циссоиды*.

В качестве второго примера рассмотрим циркулярную кривую, получаемую от инверсионного преобразования равнобочной гиперболы—прямую *строфоиду* или *логоциклику Booth'a*.

Ее уравнение будет:

$$x(x^2+y^2)=m(x^2-y^2) \quad (m=-n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

Начало координат в двойной (узловой) точке кривой.

Координаты центра строфоиды: (m, 0)

Уравнение кривой (72), отнесенное к центру, будет:

$$(x+2m)(x^2+y^2)+m^2x=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

(Для сокращения значки ^{1} у x и y в уравнении (73) и дальнейших—опущены).

Уравнение для определения корней к в данном случае дает:

$$(2m+k)^2 . k^2+km^2(2m+k)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

или

$$k(2m+k).(k+m)^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

Откуда: $k_1=0$, $k_2=-2m$, $k_3=k_4=-m$.

Исследуем отдельно корни уравнения (74):

a) $k=0$.

Уравнение двояко касательных окружностей, соответствующих этому корню, будет:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+m^2=0 \text{ (§ 26 глава I)} \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

Уравнение направляющей окружности:

$$x^2+y^2=m^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Уравнение параболы центров:

$$\alpha=-m+\frac{\beta^2}{4m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

Фокусами строфоиды будут точки пересечения параболы (78):

$$y^2=4m(m+x) \text{ (α и β заменены в (78) через x и y)} \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

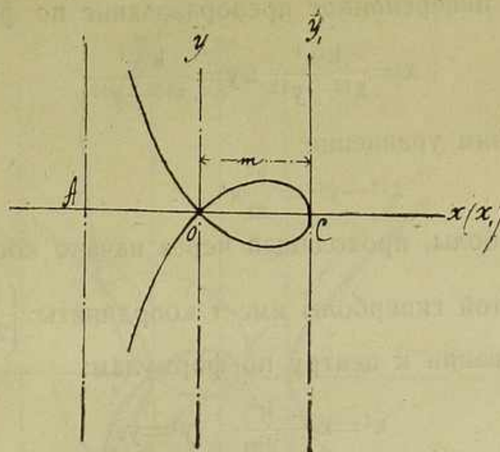
и окружности:

$$x^2+y^2=m^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

Решаем систему уравнений (79) и (80), из них находим:

$$x^2+4m^2+4mx-m^2=0, \; x^2+4mx+3m^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

Отсюда $x=-2m\pm m$; $x_1=-m$; $x_2=-3m$; (Черт. 31)



Чертеж 31

$y_1^2 = 4m^2 + 4m.(-m) = 0$ Значит: $(-m,0)$ есть двойная точка строфоиды.

$y_2^2 = 4m^2 + 4m.(-3m) = -8m^2$; $y^2 = \mp 2mi\sqrt{2}$, Значит: $(-3m, +2mi\sqrt{2})$ и $(-3m, -2mi\sqrt{2})$ суть два мнимых *обыкновенных фокуса строфоиды*.

b) $k_2 = -2m$.

Парабола центров, соответствующая этому корню; $\beta^2 = 0$

Абсциссы фокусов найдутся из уравнения (§ 8 глава 2);

$$(4mx_1 - x_1^2 + m^2)^2 - 8x_1(-2mx_1^2) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (82)$$

По упрощении оно примет вид:

$$x_1^4 + 8mx_1^3 + 14m^2x_1^2 + 8m^3x_1 + m^4 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (83)$$

Левая часть уравнения (83) может быть представлена в виде:

$$(x_1 + m).^2(x_1^2 + 6mx_1 + m^2).$$

Следовательно корни уравнения (83) будут:

$$x_1 = x_2 = -m; \; x_3 = -3m + 2m\sqrt{2}; \; x_4 = -3m - 2m\sqrt{2}.$$

Первые два корня дают двойную точку строфоиды.

Два последние дают два вещественных обыкновенных ее фокуса. Их координаты будут:

$$(-3m + 2m\sqrt{2}, 0) \text{ и } (-3m - 2m\sqrt{2}, 0)$$

Если возьмем прежние оси координат с началом в точке 0, то координаты фокусов строфоиды будут:

$$(-2m + 2m\sqrt{2}, 0) \text{ и } (-2m - 2m\sqrt{2}, 0)$$

$$\text{или } [2m(\sqrt{2} - 1), 0] \text{ и } [-2m(\sqrt{2} + 1), 0]$$

Те же выражения для координат фокусов получим и при помощи инверсии.

Действительно, взяв уравнение строфоиды (относительно осей ХОУ)

$$x(x^2 + y^2) = m(x^2 - y^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (84)$$

произведем с ним инверсионное преобразование по формулам:

$$x=\frac{k^2x^1}{x^{12}+y^{12}} \text{ и } y=\frac{k^2y^1}{x^{12}+y^{12}}$$

в результате получим уравнение:

$$x^{12}-y^{12}=\frac{k^2}{m}x^1 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (85)$$

равнобочной гиперболы, проходящей через начало координат.

Центр этой гиперболы имеет координаты: $\left(\frac{k^2}{2m}, 0\right)$

По преобразовании к центру по формулам:

$$x^1=x_2+\frac{k^2}{2m} \qquad y^1=y_2$$

уравнение (85) примет форму:

$$x_2^2+\frac{k^2x_2}{m}+\frac{k^4}{4m^2}-y_2^2=\frac{k^2x_2}{m}+\frac{k^4}{2m^2}$$

или по упрощении:

$$x_2^2-y_2^2=\frac{k^4}{4m^2} \quad \dots\dots\dots \quad (86)$$

полуоси этой гиперболы равны: $\frac{k^2}{2m}$

Координаты фокусов гиперболы (86) будут:

$$x_2=\sqrt{\frac{2k^4}{4m^2}}=\pm\frac{k^2}{2m}\sqrt{2};\ y_2=0, \text{ или в старых осях:}$$

$$x=\frac{k^2}{2m}\sqrt{2}+\frac{k^2}{2m}=\frac{k^2}{2m}(\sqrt{2}+1);y=0$$

и

$$x=-\frac{k^2}{2m}(\sqrt{2}-1)\,;y=0.$$

Инверсионное преобразование первого фокуса будет:

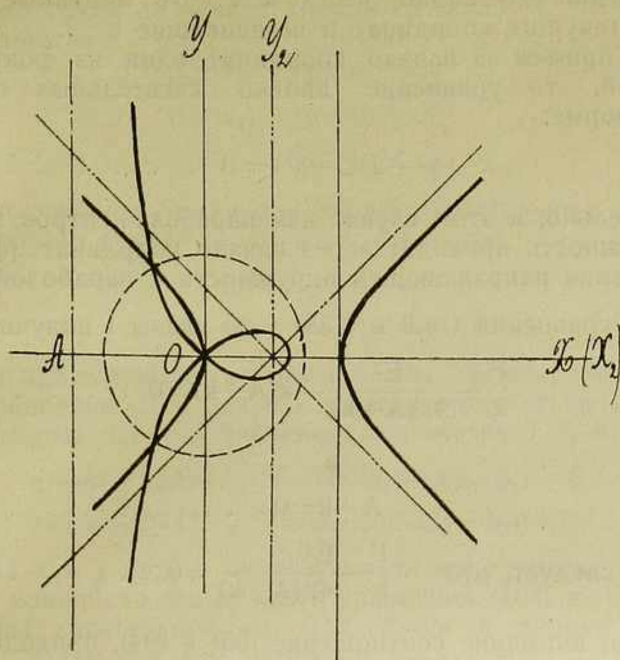
$$x_1=k^2\,\frac{k^2(\sqrt{2}+1)}{2m}\cdot\frac{1}{\frac{k^4(\sqrt{2}+1)^2}{4m^2}+0}=2m(\sqrt{2}-1)\,;y=0$$

Инверсионное преобразование второго фокуса даст второй фокус строфоиды, его координаты будут:

$$-k^2\,\frac{k^2(\sqrt{2}-1)}{2m}\cdot\frac{1}{\frac{k^2(\sqrt{2}-1)^2}{4m^2}+0}=-2m(\sqrt{2}+1)\,;0,$$

что вполне согласуется с формулами предыдущей страницы. (Черт. 32).

c) Остается рассмотреть последний случай (исследование кратного корня $k_3=k_4=-m$).



Чертеж 32

Уравнение параболы центров будет:

$$\alpha = -\frac{m}{2} + \frac{\beta^2}{2m} \quad \text{или}$$

$$\beta^2 = 2m\alpha + m^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (87)$$

Уравнение двояко касательных окружностей

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2m\alpha - m^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (88)$$

Уравнение направляющей окружности

$$(x+m)^2 + y^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (89)$$

Окружности (88) проходят через двойную точку кривой $(-m, 0)$ и являются просто касательными к строфоиде в двойной точке.

Четыре точки пересечения параболы (87) с окружностью (88) не будут фокусами данной кривой.

§ 12. Докажем вторую теорему Hart'а о фокусах циркулярных кривых, аналогичную теореме о фокальных радиусах векторах эллипса и гиперболы. Для доказательства ее снова воспользуемся теоремой о двояко касательных окружностях § 25, гл. I.

Уравнение двояко касательных окружностей может быть представлено в зависимости лишь от одного только параметра β, ибо α выражается через β из уравнения параболы центров.

Тогда уравнению (142) можно придать следующий вид:

$$x^2 + y^2 + 2\beta U + \beta^2 V + W = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (90)$$

где $U = -\left[y + \frac{E}{2(A+k)}\right]; \; V = \frac{k - x}{A+k}; \; W = -\frac{F}{k} + \frac{E^2}{4k(A+k)} + (A+k)x \quad . \quad (91)$

Из уравнений (91) видно, что U и V суть линейные выражения относительно текущих координат и независящие от β.

Если мы примем за начало координат один из фокусов циркулярной кривой, то уравнение двояко касательных окружностей выразится в форме:

$$x^2+y^2+2\beta U+\beta^2 V=0 \quad \ldots \ldots \quad (92)$$

Действительно, в этом случае как парабола центров, так и направляющая окружность проходят через начало координат (фокусы суть точки пересечения направляющей окружности с параболой центров).

Тогда из уравнений (143) и (138) § 25 главы I получим:

$$\frac{F}{k}-\frac{E^2}{4k(A+k)}-k(A+k)=0 \quad \ldots \ldots \quad (93)$$

и

$$A+k=0 \quad \ldots \ldots \quad (94)$$

Откуда и следует, что $$\frac{F}{k}-\frac{E^2}{4k(A+k)}=0. \quad \ldots \ldots \quad (95)$$

Приняв во внимание соотношение (95) и (94), приходим к заключению, что $W=0$ и таким образом предложение доказано.

Уравнение (92) при $\beta=0$ (параметр β—произволен) обращается в

$$x^2+y^2=0. \quad \ldots \ldots \quad (96)$$

Последние очевидно и из чисто геометрических соображений: уравнение (96) изображает ту из двояко касательных окружностей, которая имеет центр в начале координат. Радиус двояко касательной окружности равен длине касательной из центра ее к направляющей окружности, а в последнем случае длина этой касательной равна 0.

Так как циркулярная кривая есть огибающая окружностей (92)

$$x^2+y^2+2\beta U+\beta^2 V=0$$

где β произвольный параметр, то уравнение этой циркулярной кривой может быть получено путем исключения параметра β из уравнения (92) и его производной по β, т. е.

$$2U+2\beta V=0 \quad \ldots \ldots \quad (97)$$

Исключив β из уравнений (92) и (97), находим:

$$(x^2+y^2).\,V=U^2 \quad \ldots \ldots \quad (98)$$

Уравнение (98) и будет уравнением огибающей окружностей (92), т. е. уравнением циркулярной кривой согласно теореме § 25 гл., I.

§ 13. После этих соображений нетрудно уже доказать теорему Hart'a.

Предположим, что циркулярная кривая имеет четыре фокуса, расположенных на направляющей окружности. Возьмем один из этих фокусов за начало координат, а координаты двух других фокусов относительно этого начала пусты будут $(a_1\ b_1)$ и $(a_2,\ b_2)$.

Тогда, обозначив расстояния какой-либо точки $M(x\,y)$ данной циркулярной кривой от этих последних фокусов через ρ_1 и ρ_2, а рас-

стояние той же точки от начала координат через ρ_0, мы получим следующие соотношения:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=\rho_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (99)$$

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=\rho_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (100)$$

$$x^2+y^2=\rho_0^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (101)$$

С другой стороны, уравнения двояко касательных окружностей, имеющих центры в точках $(a_1\ b_1$ и $(a_2\ b_2)$ будут:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (102)$$

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (103)$$

радиусы их, по предыдущему, равны 0 (центры—на направляющей окружности). Но уравнения (102) и (103) должны получаться из уравнения (92) при некоторых частных значениях параметра β: β_1 и β_2, так что

$$x^2+y^2+2\beta_1 U+\beta_1^2.V=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=0 \quad \ldots\ldots \quad (104)$$

$$x^2+y^2+2\beta_2 U+\beta_2^2 V=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=0 \quad \ldots\ldots \quad (105)$$

Если под x и y будем подразумевать координаты любой точки циркулярной кривой, то левые части уравнений (104) и (105) дадут нам квадрат длины касательной из этой точки к двояко касательным окружностям, а так как эти окружности—нулевого радиуса, то мы и получим в таком случае квадраты расстояний точек циркулярной кривой от точек $(a_1\ b_1)$ и $(a_2\ b_2)$.

В результате придем к таким уравнениям:

$$x^2+y^2+2\beta_1 U+\beta_1^2 V=\rho_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (106)$$

$$x^2+y^2+2\beta_2 U+\beta_2^2 V=\rho_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (107)$$

(x и y выражают здесь координаты любой точки циркулярной кривой)

На основании уравнения (101) уравнения (106) и (107) можно переписать так:

$$\rho_0^2+2\beta_1 U+\beta_1^2 V=\rho_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (108)$$

$$\rho_0^2+2\beta_2 U+\beta_2^2 V=\rho_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (109)$$

Уравнение (98) примет вид $\rho_0^2 V=U^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (110)$

Исключив U из уравнений (108) и (109) при помощи (110):

$\pm\rho_0\sqrt{V}=U$, находим:

$$\rho_0^2\pm 2\beta_1\rho_0\sqrt{V}+\beta_1^2 V=\rho_1^2 \quad \ldots\ldots \quad (111)$$

$$\rho_0\pm 2\beta_2\rho_0\sqrt{V}+\beta_2^2.V=\rho_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (112)$$

или

$$\rho_0\pm\beta_1\sqrt{V}=\pm\rho_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (113)$$

$$\rho_0\pm\beta_2\sqrt{V}=\mp\rho_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (114)$$

Исключим из двух последних уравнений $\sqrt{V}$, для чего умножим (113) на β_2, а (114) на β_1 и вычтем их почленно одно из другого:

$(\beta_2-\beta_1)\rho_0=\pm\beta_2\rho_1\mp\beta_1\rho_2$, если при $\sqrt{V}$, взяты $+$ (115)

Если взять разные знаки у $\sqrt{V}$, то путем почленного сложения тех же уравнений найдем:

$$(\beta_2+\beta_1)\rho_0=\pm\beta_2\rho_1\pm\beta\rho_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (116)$$

Отсюда и получается вторая теорема Hart'a: *расстояния любой точки циркулярной кривой от трех ее вещественных конциклических фокусов связаны линейным однородным соотношением*, ибо (115) и (116) можно переписать в такой форме

$$l\rho_0\pm m\rho_1\pm n\rho_2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

Значения коэффициентов l, m и n легко могут быть вычислены из сравнения соотношения (117) с (116) и (115).

Конциклическими называются фокусы, лежащие на окружности одного и того же направляющего круга.

Из тех же соотношений (115) и (117) легко усматривается, что

$$l\pm m\pm n=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (118)$$

Справедлива и обратная теорема: *все точки, которых расстояния* ρ_0, ρ_1 и ρ_2 *от некоторых трех постоянных точек связаны соотношением вида*:

$$l\rho_0\pm m\rho_1\pm n\rho_2=0,$$

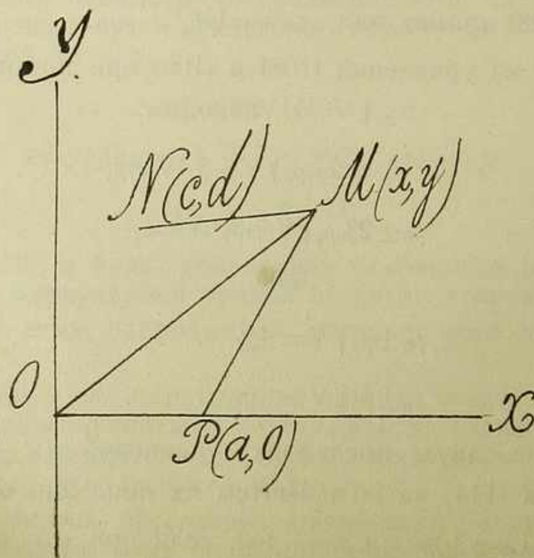
причем $l\pm m\pm n=0$, лежат *на циркулярной кривой 3-го порядка.*

Действительно, рассмотрим такую задачу: *найти геометрическое место точек*, чтобы сумма произведений расстояний каждой из них от трех данных точек на некоторые постоянные множители равнялась нулю.

Пусть искомая точка будет $M(xy)$ (черт. 33), а данные точки 0, N и P. Выберем оси таким образом, чтобы точка 0 была в начале координат, а ось X прошла через точку P. Тогда координаты 0 будут (0,0), а координаты точки P (a,0). Координаты точки N обозначим через c и d. Согласно условию задачи, мы будем иметь:

$$l\,.\,0M+mMN+n\,.\,MP=0,$$

где l, m и n некоторые постоянные множители.



Чертеж 33

В таком случае уравнение искомого геометрического места может быть написано таким образом:

$$l\sqrt{x^2+y^2}+m\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}+n\sqrt{(x-a)^2+y^2}=0. \quad \ldots \quad (119)$$

Освободим уравнение (119) от радикалов

$$l\sqrt{x^2+y^2}+n\sqrt{(x-y)^2+y^2}=-m\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2} \qquad (120)$$

Возведя в квадрат обе части равенства (120), находим

$$l^2(x^2+y^2)+n^2[(x-a)^2+y^2]+2nl\sqrt{(x^2+y^2)[(x-a)^2+y^2]}=m^2[x-c)^2+(y-d)^2]$$

Уединяем радикал:

$$2nl\sqrt{(x^2+y^2)[(x-a)^2+y^2]}=m^2[(x-c)^2+(y-d)^2]-l^2(x^2+y^2)-n^2[(x-a)^2+y^2] \quad (121)$$

По освобождении от радикала и группировке членов (121) уравнению можно придать следующий вид:

$$(2n^2l^2+2m^2l^2+2m^2n^2-m^4-l^4-n^4)(x^2+y^2)^2+\{2n^2l^2(a^2-2ax)-2n^4(a^2-2ax)+$$
$$+2m^4(c^2+d^2-2cx-2dy)+2m^2l^2(c^2+d^2-2cx-2dy)+2m^2n^2[c^2+d^2-2cx-2dy)+$$
$$+(a^2-2ax)]\}(x^2+y^2)-m^4(c^2+d^2-2cx-2dy)^2-n^4(a^2-2ax)^2+2m^2l^2(c^2+d^2-$$
$$-2cx-2dy)+2m^2n^2.(c^2+d^2-2cx-2dy)(a^2-2ax)=0. \qquad (122)$$

Уравнение (122) и будет уравнением искомого геометрического места. Оно представляет собою бициркулярную кривую 4-го порядка (§ 15, глава 2-я).

Бициркулярная кривая (122) переходит в циркулярную кривую 3-го порядка, при условии:

$$2n^2l^2+2m^2l^2+2m^2n^2-m^4-l^4-n^4=0 \quad \ldots \quad (123)$$

Условие же (123) может быть переписано в такой форме:

$$(l+m+n)(m+n-l)(n+l-m)(l+m-n)=0 \quad \ldots \quad (124)$$

Уравнение (124) и показывает, что в случае

$$l\pm m\pm n=0$$

искомым геометрическим местом является действительно циркулярная кривая. Обратная теорема *Hart'a*, таким образом, доказана.

H. Faure в заметке, помещенной в Nouvelles Annales de Math. (3) 1889 г., стр. 98, показал, что всякое коническое сечение, проходящее через четыре конциклических фокуса циркулярной кривой 3-го порядка, имеет свои собственные фокусы на этой же кривой.

§ 14. Если циркулярная кривая имеет узловую или изолированную двойную точку, то и к таким кривым теорема предыдущего § применима. Роль недостающего третьего фокуса (такие кривые имеют только два вещественных обыкновенных фокуса § 6, гл. 2-я играет узловая точка кривой.

Теорема может быть без труда доказана при помощи чисто геометрических соображений.

Пусть 0 (черт. 34) будет узловая точка кривой, буквы S и H пусть обозначают ее обыкновенные вещественные фокусы и M произвольную точку данной циркулярной кривой.

Докажем, что отрезки SM, HM и $0M$ связаны следующим соотношением:

$$l \cdot SM + m \cdot HM = n \cdot 0M, \text{ где } l, \ m \text{ и } n$$

суть некоторые постоянные.

Тр-ки $0MS$ и $0M^1S^1$ подобны, ибо

$$0S \cdot 0S^1 = 0M \cdot 0M^1 = k^2.$$

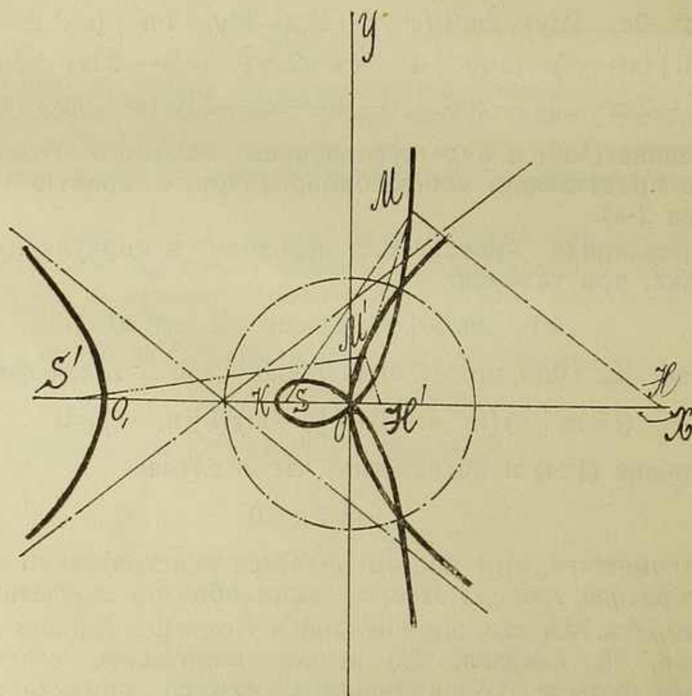
$$\text{Следовательно } \frac{0S}{0M} = \frac{0M^1}{0S^1}$$

$$\text{Далее находим } \frac{SM}{0M} = \frac{S^1M^1}{0S^1} = \frac{S^1M^1 \cdot 0S}{k^2} \text{(125), так как}$$

$$0S \cdot 0S^1 = k^2; \ S^1, H^1, M^1$$

точки инверсионные по отношению к точкам

S, H, M.



Чертеж 34

$2a$—большая ось конического сечения. Точно также найден для второго фокуса:

$$\frac{HM}{0M} = \frac{H^1M^1}{0H^1} = \frac{H^1M^1 \cdot 0H}{k^2} \text{(126); } 0H \cdot 0H^1 = k^2$$

Из (125) и (126) легко получим:

$$\frac{SM}{0S} \pm \frac{HM}{0H} = \frac{0M}{k^2}(S^1M^1 \pm H^1M^1) \quad \ldots \ldots \quad (127)$$

Но так как точка M^1 лежит на коническом сечении, фокусами которого служат точки

$$S^1 \text{ и } H^1, \text{ то } S^1M^1 \pm H^1M^1 = 2a \text{ и } (127)$$

соотношение может быть переписано так:

$$SM.\left(\frac{1}{0S}\right) + HM\left(\pm\frac{1}{0H}\right) = 0M.\frac{2a}{k^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (128)$$

Обозначив $\frac{1}{0S}$ через l; $\pm\frac{1}{0H}$—через m и $\frac{2a}{k^2}$ через n, мы и получим искомое соотношение:

$$l.SM + mHM = n.0M.$$

Из (128) можно сейчас же получить еще одно соотношение между расстояниями какой-либо точки циркулярной кривой от двух ее фокусов и двойной точки.

Обозначив буквою K вершину кривой (§ 10, гл. I), мы видим из чертежа, что точка K есть инверсионная по отношению к вершине конического сечения 0_1 (в этом нетрудно убедиться и простым вычислением), значит $0k.00_1 = k^2$ или $0k.2a = k^2$, откуда

$$\frac{2a}{k^2} = \frac{1}{0K},$$

подставив полученное выражение $\frac{2a}{k^2}$ в равенство (128), мы и получим искомое соотношение:

$$\frac{SM}{0S} \pm \frac{HM}{0H} = \frac{0M}{0K} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (129)$$

§ 15. Аналлагматические кривые.

Мы видели, что вследствие инверсионного преобразования порядок уравнения кривой, а след. и сама кривая изменяются. Только окружность после любого инверсионного преобразования переходит в новую окружность. Уравнение, а след. и вид кривой существенным образом зависят от выбора полюса инверсии.

Если мы общее уравнение циркулярной кривой (ось 0У взята параллельно вещественной ассимптоте кривой):

$$x(x^2 + y^2) + Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad . \; . \; . \quad (130)$$

подвергнем инверсионному преобразованию по формулам:

$$x = \frac{k^2x^1}{x^{12} + y^{12}} \quad y = \frac{k^2y^1}{x^{12} + y^{12}},$$

то мы получим такое уравнение:

$$\frac{k^6x^1 + Ak^4x^{12} + Bk^4x^1y^1 + Ck^4y^{12}}{(x^{12} + y^{12})^2} + \frac{Dk^2x^1 + Ek^2y^1}{x^{12} + y^{12}} + F = 0 \quad . \quad (131)$$

Освободив ур-ие (130) от знаменателя, перепишем его так:

$$F(x^{12} + y^{12}) + k^4(Ax^{12} + Bx^1y^1 + Cy^{12}) + k^2(Dx^1 + Ey^1)(x^{12} + y^{12}) + k^6x^1 = 0 \quad (132)$$

Это уравнение так называемой *бициркулярной кривой 4-го порядка*, если только $F \neq 0$, т. е. если центр инверсии не лежит на данной кривой.

Если центр инверсии лежит на данной циркулярной кривой, а хотя бы одно из количеств D или E не равно нулю, то уравнение (132) будет уравнением циркулярной же кривой 3-го порядка

$$(Dx' + Ey')(x'^2 + y'^2) + k^2(Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2) + k^4x' = 0, \qquad (133)$$

которая будет отличаться от данной своей формой и положением относительно координатных осей.

Если $F = 0$; $D = 0$ и $E = 0$, т. е. центр инверсии совпадает с двойной точкой данной кривой (см. § 23, главы I), то ее инверсионным преобразованием будет коническое сечение, проходящее через центр инверсии (§ 10, глава 2). Его уравнение будет:

$$Ax'^2 + Bxy' + Cy'^2 + k^2x' = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (134)$$

Рассмотрим теперь подробнее вопрос о том, в каких случаях циркулярная кривая, при ее инверсионном преобразовании переходит снова в циркулярную кривую.

Кривые, не изменяющие своего рода после инверсионного преобразования их, назовем *аллагматичными*.

Если кривая аллагматична относительно какого-нибудь полюса, то можно всегда выбрать модуль инверсии так, чтобы после преобразования получилась кривая, тождественная с данной, назовем такую кривую *аналлагматичной* (ἀναλλάττω не изменяю).

Например, строфоида ур-ие (73) § 11, главы 2-й

$$(x + 2m)(x^2 + y^2) + m^2x = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (135)$$

аллагматична по отношению к ее вершине, т. е. при всяком инверсионном преобразовании уравнения (135) (оно отнесено к вершине кривой, как к началу координат), мы получим новую строфоиду. Действительно, после инверсионного преобразования ур-ия (135), мы будем иметь:

$$\left[\frac{k^2x'}{x'^2 + y'^2} + 2m\right]\frac{k^4}{x'^2 + y'^2} + \frac{m^2k^2x'}{x'^2 + y'^2} = 0. \quad . \; . \; . \quad (136)$$

после несложных преобразований получаем окончательное уравнение строфоиды:

$$\left(x' + \frac{2k^2}{m}\right)(x'^2 + y'^2) + \frac{k^4x'}{m^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (137)$$

$$\text{или} \quad (x' + 2m').(x'^2 + y'^2) + m'^2.x' = 0,$$

$$\text{где } m' = \frac{k^2}{m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (138)$$

Легко видеть, что коэффициенты m и m' связаны соотношением инверсии: $mm' = k^2$

Если взять модуль инверсии равным m, то уравнение (138) будет тождественно с уравнением (135)—преобразование будет в этом случае *аналлагматичным*.

Преобразования последнего рода впервые были рассмотрены французским математиком Moutard'ом, который изложил их свойства

и условия аналлагматичности *кривых* в ряде сообщений, напечатанных в Bulletins de Société Philomatique de Paris за 1862-1864 годы.

Некоторые сведения по этому вопросу помещены также во 2-м томе „Traité d'Analyse" H. Laurent и в упомянутом в § 25, гл. I, мемуаре Darboux.

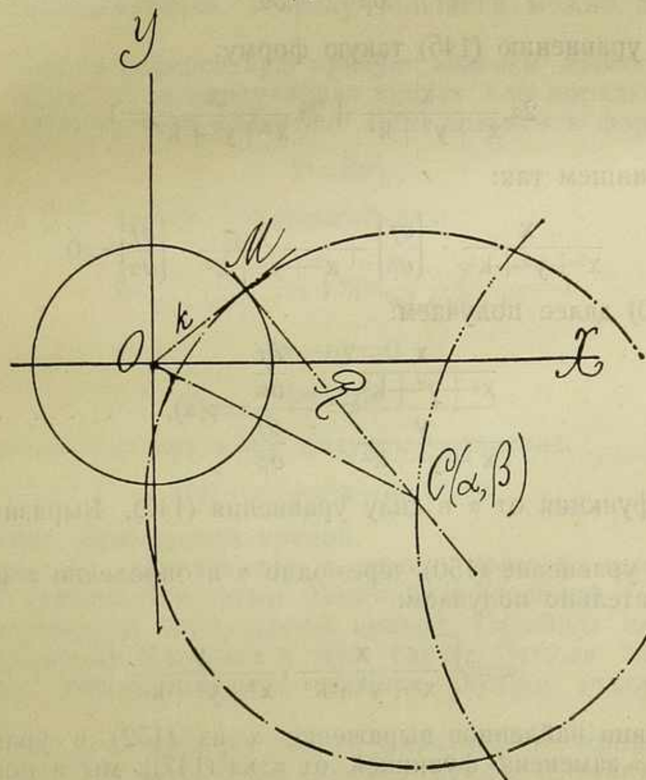
В основе теории аналлагматик лежит теорема Moutard'a: *Всякая аналлагматика есть огибающая семейства окружностей которых центры описывают данную кривую, называемую деферентной и которые ортогонально пересекают данную окружность, называемую направляющей. Центром последней должен быть центр инверсии, а радиус ее должен равняться модулю инверсии в случае аналлагматичности преобразования.*

Для доказательства этой теоремы предположим, что

$$f(\alpha,\beta)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (139)$$

есть уравнение деференты (черт. 35),

$$x^2+y^2=k^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (140)$$



Чертеж 35

—уравнение направляющей окружности, а

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (141)$$

—уравнение окружностей, огибающей которых будет искомая кривая. Условие ортогональности (139) и (140) будет очевидно

$$\alpha^2+\beta^2=OC^2=R^2+k^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (142)$$

Следовательно

$$\alpha^2+\beta^2-R^2=k^2; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (143)$$

Уравнение (143) в силу (141) может быть написано в такой форме:

$$x^2+y^2-2(\alpha x+\beta y)+k^2=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (144)$$

Для получения уравнения огибающей надо исключить параметры α и β из уравнений

$$x^2+y^2-2(\alpha x+\beta y)+k^2=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (145)$$

$$-2x-2y\frac{d\beta}{d\alpha}=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (146)$$

$$f(\alpha, \beta)=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (147)$$

Из (147) $\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial\alpha}}{\frac{\partial f}{\partial\beta}}$ тогда (146) получит вид:

$$x.\frac{\partial f}{\partial\beta}+y\frac{\partial f}{\partial\alpha}=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (148)$$

Дадим уравнению (145) такую форму:

$$2\alpha.\frac{x}{x^2+y^2+k^2}+2\beta\frac{x}{x^2+y^2+k^2}=1, \quad . \ . \ . \ . \quad (149)$$

а (148) перепишем так:

$$\frac{x}{x^2+y^2+k^2}\cdot\left\{\frac{\partial f}{\partial\beta}\right\}+\frac{y}{x^2+y^2+k^2}\cdot\left\{\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right\}=0 \quad . \ . \ . \quad (150)$$

Из (150) далее получаем:

$$\frac{\frac{x}{x^2+y^2+k^2}}{\frac{y}{x+y^2+k^2}}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial\alpha}}{\frac{\partial f}{\partial\beta}}=\varphi(\alpha), \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (151)$$

ибо β есть функция от α в силу уравнения (147). Выразив $\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ и $\frac{\partial f}{\partial\beta}$, входящие в уравнение (150), через одно α и определив α из уравнения (151), окончательно получаем:

$$\alpha=\psi\left[\frac{x}{x^2+y^2+k^2}, \frac{y}{x^2+y^2+k^2}\right] \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (152)$$

Подставив найденное выражение α из (152) в уравнение (149) [в котором β заменена функцией от α из (147)], мы и получим ур-ие огибающей окружностей (144) в виде:

$$F\left\{\frac{x}{x^2+y^2+k^2}, \frac{y}{x^2+y^2+k^2}\right\}=0 \quad . \ . \ . \ . \quad (153)$$

Это и будет уравнение искомой *аналлагматики*.

Для того, чтобы показать это, преобразуем уравнение (153) к полярной системе координат по формулам: $x=\rho.\cos\theta$ $y=\rho.\sin\theta$, тогда оно примет вид:

$$F\left\{\frac{\rho\cos\theta}{\rho^2+k^2}, \frac{\rho\sin\theta}{\rho^2+k^2}\right\}=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (154)$$

Преобразуем последнее уравнение по формулам инверсии:

$$\rho\rho^{1}=k^{2}$$

после этого получим:

$$F\left\{\frac{\frac{k_2}{\rho^{1}}\cos\theta}{\frac{k^2}{\rho^{12}}+k^2}, \frac{\frac{k^2}{\rho^{1}}\sin\theta}{\frac{k^4}{\rho^{12}}+k^2}\right\}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (155)$$

Разделив числителя и знаменателя каждой из дробей, стоящих под знаком функции в ур-ии (155) на k^2 и умножив их на ρ^{12}, мы и получим

$$F\left\{\frac{\rho^{1}\cos\theta}{k^2+\rho^{12}}, \frac{\rho^{1}\sin\theta}{k^2+\rho^{12}}\right\}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (156)$$

Уравнение (156) показывает, что полученная кривая (153) действительно аналлагматична. Теорему Moutard'а можно считать доказанной.

§ 16. Если за деферентную кривую возьмем параболу, то аналлагматикой будет тогда циркулярная кривая 3-го порядка.

Действительно, если уравнение (139) возьмем в форме:

$$\beta^2=2p\alpha$$

то уравнения § 15 примут следующий вид:

$$2\alpha.\frac{x}{x^2+y^2+k^2}+\sqrt{2p\alpha}.\frac{y}{x^2+y^2+k^2}=1 \quad . \; . \; . \; . \quad (157)$$

$$\beta x-py=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (158)$$

$$\beta^2=2p\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (159)$$

после исключения из них α и β получим уравнение:

$$x(x^2+y^2)+k^2x-3p.y^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (160)$$

т. е. уравнение циркулярной кривой.

Предложение, высказанное в начале этого §, непосредственно вытекает из сравнения теоремы Moutard'а с теоремой о двояко касательных окружностях циркулярной кривой. Парабола центров и есть деферентная кривая Moutard'а в этом случае. Отсюда заключаем, что циркулярные кривые являются частным случаем аналлагматических кривых.

Из кривых 3-го порядка только циркулярные кривые обладают этим свойством. Для того, чтобы кривая 3-го порядка была аналлагматичной, необходимо, чтобы старшие члены ее уравнения имели множителя: x^2+y^2, ибо только в таком случае возможно сокращение членов уравнения на квадратичный множитель: $x^{12}+y^{12}$ после инверсии и сохранение вследствие этого порядка уравнения относительно x^1 и y^1.

Существует общая теорема, что аналлагматиками могут быть лишь те кривые, какие проходят через круговые точки плоскости. Это сводится к сказанному выше.

§ 17. В § 10 главы I было показано, что если через вершину К циркулярной кривой проведем ряд прямых линий (см. чер. 3), то произведение отрезков, отсекаемых на каждой из них данной циркулярной кривой,—постоянно.

Если посмотреть на это предложение с точки зрения инверсии, то можно сразу заключить, что всякая циркулярная кривая аналлагматична по отношению к ее вершинам, ибо точки инверсионные точкам кривой снова лежат на кривой, если вершина кривой—полюс инверсии.

Так как циркулярная кривая имеет вообще 4 вершины (см. чер. 11 и 13), то она будет аналлагматична вообще по отношению к четырем центрам инверсии.

Сейчас мы покажем, что эти центры или полюсы инверсии лежат на кривой и суть точки касания четырех касательных к циркулярной кривой, параллельных ее вещественной ассимптоте.

Если кривая имеет двойную точку, то она обладает двумя или одним центром аналлагматической инверсии (в зависимости от характера двойной точки: узловой или изолированной, или точки возврата). Если кривая с двойной точкой имеет ось симметрии, то у нее будет один центр аналлагматической инверсии в случае узловой или изолированной точки, и ни одного центра—в случае точки возврата.

Для доказательства этих предложений заметим прежде всего, что полюсы аналлагматического преобразования совпадают с центрами направляющих окружностей [уравнение (148) § 25 главы I-й].

Рассмотрим уравнение циркулярной кривой, отнесенное к центру одной из направляющих окружностей как к началу координат.

Такой вид уравнения был получен в § 28 главы I-й уравнения (167)

$$x(x^2+y^2)+(A+3k)x^2+(A+k)y^2-\frac{E}{A+k}xy+r^2x=0$$

Произведем в этом уравнении инверсионное преобразование по формулам

$$x=\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2} \quad \text{и} \quad y=\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}$$

где r—радиус направляющей окружности.

После некоторых упрощений мы найдем:

$$x'(x'^2+y'^2)+(A+3k)x'^2+(A+k)y'^2-\frac{E}{A+k}x'y'+r^2x'=0 \quad . \quad (161)$$

Уравнение (161) показывает, что инверсионное преобразование будет аналлагматичным, если 1) *центр инверсии совпадает с центром одной из направляющих окружностей*, и 2) *модуль инверсии равен радиусу этой окружности*. При произвольном модуле преобразование будет аналлагматичным. Значит число полюсов аналлагмат. преобразования зависит от числа направляющих окружностей. Центры направляющих окружностей, на основании § 31 главы I-й, совпадают с точками пересечения гиперболы: $y(x+A)=-\frac{E}{2}$ с данной кривой, а эти точки пересечения, как показано в § 31, суть точки касания касательных к кривой, параллельных ее вещественной ассимптоме. Таким образом справедливость предложения, высказанного в начале этого §, подтверждается. Соображения § 33 подтверждают остальное.

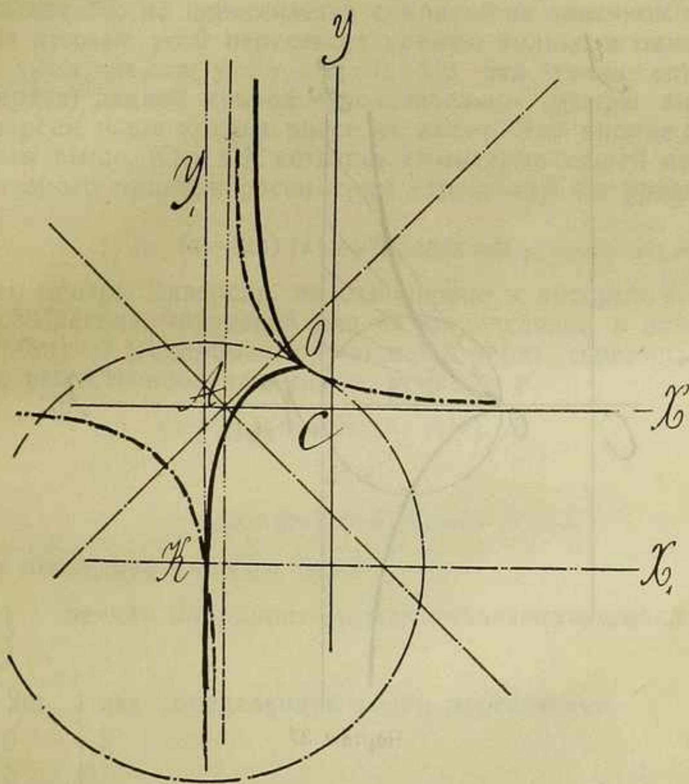
Необходимо только заметить, что число полюсов аналлагматической инверсии может быть и меньше числа направляющих окружностей или числа точек пересечения гиперболы § 31 с циркулярной кривой: исключаются центры направляющих окружностей, совпадающие с двойной точкой кривой. В этом случае радиус таких направ-

ляющих окружностей равен 0 (§ 28 гл. I) Следовательно и модуль аналлагматической инверсии обращается в нуль, т. е. инверсия становится невозможной. Формулы ее обращаются в:

$$x=0$$

$$y=0$$

и уравнение инверсионной кривой (161) обращается в этом случае в тождество: $0=0$.



Чертеж 36

На чертеже 36 начерчена гипербола § 31 для кривой:

$$x(x^2+y^2)+x^2+4xy+4y^2=0$$

приведенный в качестве примера в § 34 главы I-й. Эта кривая имеет только один центр аналлагматической инверсии K, ибо кривая имеет точку возврата.

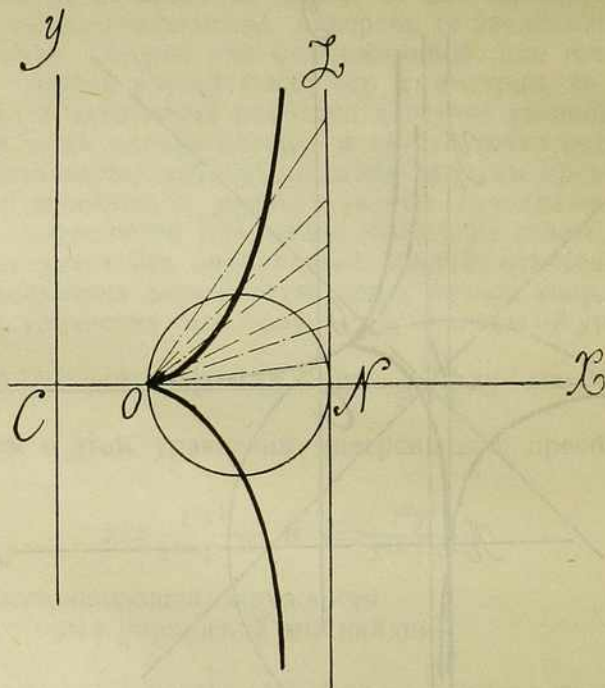
Таким образом для нахождения координат центров аналлагматической инверсии достаточно найти решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} y(x+A) &= -\frac{E}{2} \\ (x+A)(x^3+Ax^2+Dx+F)-\frac{E^2}{4} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 162$$

и взять те решения этой системы, которые не совпадают с координатами двойной точки данной кривой.

Если кривая имеет ось симметрии (напр. ось X), то E=O, и гипербола § 31 в этом случае распадается на пару прямых:

1) $x+A=O$ и 2) $y=O$. Первая прямая представляет собою вещественную ассимптоту кривой (общую с ассимптотой гиперболы). Она пересекается с кривой на ∞ (Координаты главной точки в этом случае будут § 6 глава I: $x=-A$; $y=\infty$), и система (162) не дает для y определенного значения. Вторая прямая $y=0$ пересекает кривую в центре аналлагматической инверсии.



Чертеж 37

Если кроме того кривая имеет двойную точку, то прямая $y=0$ должна проходить через нее и следовательно пересечь кривую еще в одной точке (в случае узловой или изолированной двойной точки), которая и будет единственным центром аналлагматической инверсии для такой кривой.

Если двойная точка кривой есть точка возврата, то прямая $y=0$ должна касаться кривой в этой точке, имея три общих точки с кривой в точке возврата, прямая $y=0$ более не пересечется с кривой, и следовательно в этом случае циркулярная кривая вовсе не будет иметь центра аналлагматической инверсии.

§ 18. Рассмотрим пример для пояснения соображений предыдущего параграфа.

Возьмем циссоиду Диоклеса (черт. 37) и найдем для нее центры аналлагматической инверсии. Уравнение циссоиды, отнесенное к ее центру как к началу координат, будет § 11 глава 2-я уравнение (63):

$$(x-3a)(x^2+y^2)+3a^2x-a^3=0$$

Найдем центры инверсии. Система (162) в нашем случае дает такую систему уравнений:

$$y(x-3a)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (163)$$

$$(x-3a)(x^3-3ax^2+3a^2x-a^3)=0$$

или

$$(x-3a)(x-a)^3=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (164)$$

Решаем уравнения (163) и (164): $x_1=3a$ $y_1=\frac{0}{0}$. Точки пересечения нет. Ассимптота NL не пересекается с кривой на конечном расстоянии.

Вторая прямая: $y=0$ пересекает кривую только в одной точке O трикратно: $x_2=x_3=x_4=a$; $y_2=y_3=y_4=0$. Но эта точка есть двойная точка (возврата) данной кривой. Следовательно центры аналлагматической инверсии наша кривая вовсе не имеет. Это вполне согласуется со сказанным выше. (Ось OX есть ось симметрии нашей кривой).

Для второго примера рассмотрим строфоиду. Ее уравнение (§ 11 глава 2-я).

$$(x+2m)(x^2+y^2)+m^2x=0$$

Найдем центры инверсии, по отношению к которым кривая аналлагматична. Система уравнений для их определения в данном случае будет: $y(x+2m)=0$ (гипербола, проходящая через середины хорд параллельных вещественной ассимптоте кривой), и

$$(x+2m)(x^3+2mx^2+m^2x)=0$$

или

$$x(x+2m).(x+m)^2=0$$

Корни последней системы будут:

a) $\left.\begin{matrix} x_1=0 \\ y_1=0 \end{matrix}\right\}$ начало координат—центр аналлагматической инверсии.

б) $\left|\begin{matrix} x_2=-2m \\ y_2=\frac{0}{0} \end{matrix}\right|$ нет определенной точки пересечения.

c) $\left.\begin{matrix} x_3=x_4=-m \\ y_3=y_4=-0 \end{matrix}\right\}$ двойная (узловая) точка кривой.

Таким образом, вполне согласно с теорией, кривая (строфоида) аналлагматична по отношению к одному только полюсу инверсии—началу координат.

Действительно, преобразовав уравнение строфоиды

$$(x+2m)(x^2+y^2)+m^2x=0$$

по формулам:

$x=\frac{m^2x^1}{x^{12}+y^{12}}$ и $y=\frac{m^2y^1}{x^{12}+y^{12}}$ (радиус направляющей окружности для корня $k=O$ равен m см. § 11 глава 2-ая), мы получим:

$$\frac{m^2x^1}{x^{12}+y^{12}}.\frac{m^4}{x^{12}+y^{12}}+2m.\frac{m^4}{x^{12}+y^{12}}+\frac{m^4x^1}{x^{12}+y^{12}}=0$$

после упрощений:

$$(2m+x^1)(x^{12}+y^{12})+m^2x^1=0$$

Уравнение тождественное с предыдущим.

В виде 3-го примера рассмотрим кривую, помещенную на черт. 36. Уравнение этой кривой, отнесенное к ее центру C (см. § 34 гл. I), будет:

$$\left(x+\frac{11}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)+\frac{23}{4}x-16y+\frac{125}{8}=0$$

Для нахождения требуемых полюсов инверсии надо найти точки пересечения кривой с гиперболой, начерченной пунктиром: Точки эти найдем из уравнений

$$y\left(x+\frac{11}{2}\right)=8 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (165)$$

$$\left(x+\frac{11}{2}\right).\left(x^3+\frac{11}{2}x^2+\frac{23}{4}x+\frac{125}{8}\right)-64=0$$

Последнее уравнение может быть переписано в таком виде:

$$\left(x+\frac{13}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)^3=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (166)$$

Из (165) и (166) находим:

$$\text{a)}\ x_1=-\frac{13}{2};\ y_1=-8$$

Эти координаты принадлежат точке K центру аналлагматической инверсии и центру направляющей окружности, начерченной пунктиром.

$$\text{b)}\ x_2=x_3=x_4=-\frac{3}{2};\ y_2=y_3=y_4=2.$$

Этот тройной корень системы (165) и (166) дает точку 0—точку возврата нашей кривой, в которой гипербола, начерченная пунктиром, пересекает и касается кривой. Эта точка, как сказано выше, не есть полюс аналлагматической инверсии. Перенеся начало координат в точку K (оси У, KX_1), мы преобразуем уравнение кривой следующим образом:

$$x_1\ (x_1^2+y_1^2)-14x_1^2-y_1^2-16\ x_1.\ y_1+125x_1=0. \quad . \ . \ . \ . \quad (167)$$

Преобразуем уравнение (167) по формулам инверсии (радиус направляющей окружности равен $\sqrt{125}$ (см. § 34 гл. I).

Формулы преобразования будут:

$$x_1=\frac{125x^1}{x^{12}+y^{12}}$$

$$y_1=\frac{125y^1}{x^{12}+y^{12}}$$

После преобразования уравнение (167) примет вид:

$$\frac{125x^1}{x^{12}+y^{12}}.\ \frac{125^2}{x^{12}+y^{12}}-14.\frac{125\ ^2x^{12}}{(x^{12}+y^{12})^2}-\frac{125.^2y^{12}}{x^{12}+y^{12}}-\frac{16.125^2x^1y^1}{(x^{12}+y^{12})^2}+\frac{125^2.x^1}{x^{12}+y^{12}}=0.$$

после упрощений находим:

$$x^1(x^{12}+y^{12})-14x^{12}-y^{12}-16x.^1y^1+125x^1=0.$$

Откуда и видно, что кривая (167) аналлагматична относительно точки K.

§ 19. Отметим еще несколько свойств циркулярных кривых, связанных с инверсионным преобразованием. Мы показали в § 17, что циркул. кривая вообще аналлагматична по отношению к 4-м центрам инверсии.

Докажем теперь следующее предложение: *если соединим прямыми любые три центра инверсии циркулярной кривой, то четвертый центр совпадет с ортоцентром треугольника, получившегося при этом соединении.*

Это предложение можно доказать при помощи гиперболы § 31 главы I.

Предварительно укажем только лемму, необходимую для нашего доказательства.

Из основного курса Анал. геометрии известно, что во всяком пучке кривых 2-го порядка

$$S+\lambda S_1=0,$$

где $S=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$, и

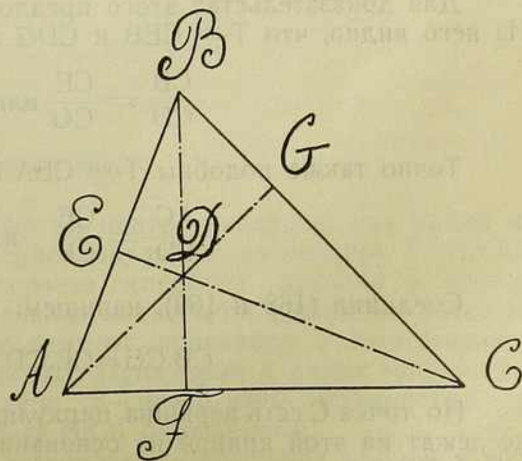
$S_1=A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2+2D_1x+2E_1y+F_1$, а λ—параметр пучка, всегда имеется одна равносторонняя гипербола. Написав уравнение пучка в раскрытом виде, получим для определения λ уравнение I-ой степени:

$$A+\lambda A_1+C+\lambda C_1=0,$$

которое и даст требуемое для равносторонней гиперболы единственное значение λ. Исключение представляется лишь в случае $A+C=0$ и $A_1+C_1=0$, тогда λ становится неопределенным, и все гиперболы пучка будут равносторонними. След. в пучке, в котором основные кривые суть равнобочные гиперболы, все кривые пучка также равнобочные гиперболы.

Отсюда и получается необходимая для нашего доказательства лемма. *Все равносторонние гиперболы, описанные около треугольника, проходят через ортоцентр этого треугольника*

Доказать эту лемму нетрудно на основании сказанного выше, если принять в соображение, что всякая пара взаимно перпендикулярных прямых может быть рассматриваема, как равносторонняя гипербола, слившаяся со своими ассимптотами.



Чертеж38

Опишем около Т-ка ABC (черт. 38) равностороннюю гиперболу. Предположим, что эта гипербола пересечет его высоту BF в точке D. Тогда всякая линия 2-го порядка, проходящая через четыре точки A, B, C и D, должна

быть равносторонней гиперболой, так как через A, B, C и D уже проходят две равносторонние гиперболы: проведенная нами и система двух взаимно перпендикулярных прямых AC и BF (их можно принять за основные гиперболы пучка).

В таком случае и две другие прямые AB и CE, проходящие через эти четыре точки, должны давать равностороннюю гиперболу, т. е. быть взаимно перпендикулярными. Значит CD есть вторая высота треугольника ABC и след. D есть его ортоцентр. Лемма доказана. Если теперь припомним, что центры инверсии циркул. кривой лежат на гиперболе: $y.(x+A)=-\frac{E}{2}$, которая равносторонняя, то становится очевидным, что, соединив три каких-нибудь центра инверсии прямыми, мы получим треугольник, ортоцентр которого будет четвертым центром инверсии. Доказательство этого предложения занимает лишь несколько строк. В такой форме, кажется, оно не было еще указано.

При помощи того же чертежа (38) нетрудно чисто геометрическим путем доказать, что касательные к цирк. кривой в центрах инверсии параллельны ее вещественной ассимптоте.

Точки A, E, DF лежат на циркулярной кривой, но они также лежат на окружности, описанной на AD как на диаметре ($\angle$E и $\angle$F прямые). След мы можем применить теорему Eckhardt'a § 8 гл. I: окружность, проходящая через две точки: A и F циркулярной кривой пересечет ее еще в двух точках E и D продолжение прямой ED пересечет кривую в точке C; продолжение прямой AF пересечет кривую также в точке C; прямая, проходящая через две эти точки пересечения (совпадающие в одну)—параллельна вещественной ассимптоте кривой согласно теоремы § 8 гл. I. След. касательная к циркулярной кривой в центре инверсии C ее параллельна вещественной ассимптоте кривой. Таким же способом можно доказать, что касательные в остальных центрах инверсии параллельны вещественной ассимптоте кривой.

§ 20. В связи с предыдущей докажем еще такую теорему: *основания высот каждого из треугольников, имеющих вершины в трех каких-либо центрах аналлагматической инверсии также лежат на этой кривой.*

Для доказательства этого предложения обратимся к чертежу 38. Из него видно, что Т-ки CEB и CDG подобны. Отсюда напишем:

$$\frac{CB}{CD}=\frac{CE}{CG} \text{ или } BC.\,CG=CD.CE \quad . \; . \; . \quad (168)$$

Точно также подобны Т-ки CEA и CDF. Из их подобия получим:

$$\frac{AC}{CD}=\frac{CE}{CF}, \text{ или } CE.CD=AC.CF \quad . \; . \; . \quad (169)$$

Соединив (168 и 169), напишем:

$$CB.CG=CE.CD=AC.CF \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (170)$$

Но точка C есть вершина циркулярной кривой, точки B, A и D также лежат на этой кривой на основании § 19.

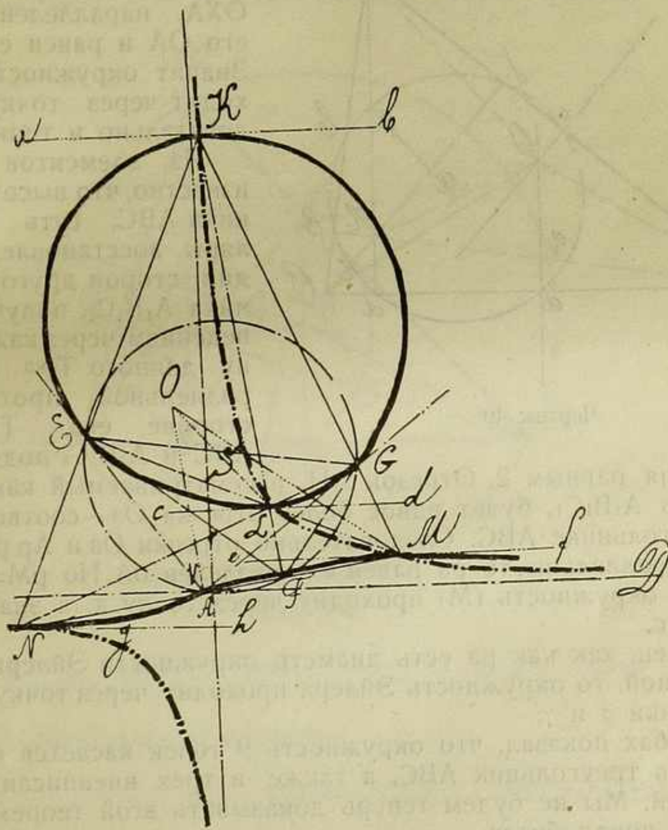
Если вспомним теорему § 10 главы I, то можем написать:

$$CB.CG=CE.CD=CA.CF \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (171)$$

где точки G, E и F должны лежать на циркулярной кривой.

Сравнив соотношение (171) и (170), мы видим, что они тождественны, следовательно основания перпендикуляров G, E и F действительно лежат на той циркулярной кривой, вершинами которой служат точки A, B, C и D.

Чертеж 39 показывает, что точки E, G и F лежат на кривой. На чертеже 39 перечерчена кривая чертежа 9. A ее главная точка, AD—вещественная ассимптота. Прямые ab, cd, ef и gh параллельны вещественной ассимптоте AD. Они касаются циркулярной кривой и дают в точках прикосновения K, L, M и N четыре центра аналлагматической инверсии. Треугольник KLN, проходящий через три из них, имеет



Чертеж 39

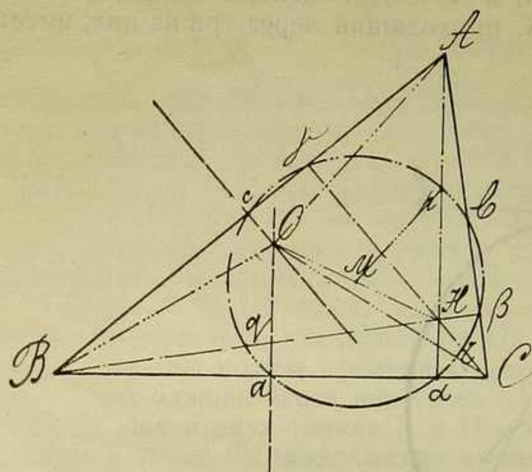
свой ортоцентр в точке M — четвертом центре инверсии, как видно из чертежа: G, E и F основания перпендикуляров из вершин Т-ка KLN на его стороны. Пунктиром начерчена гипербола, дающая в точках пересечение с кривой 4 центра аналлагматической инверсии. Одна из ее взаимно перпендикулярных ассимптот совпадает с вещественной ассимптотой циркулярной кривой AD. Пунктиром с двумя точками начерчена окружность 9 точек Эйлера. $_1$S—центр этой окружности.

O-центр описанной около Т-ка NKM окружности.

V—точка пересечения касательных к циркулярной кривой в точках E, F и G. В данном случае точка V совпадает с точкой A.

§ 21. На чертеже 40 начерчен так называемый круг девяти точек Эйлера. Он строится следующим образом: возьмем некоторый треугольник ABC и найдем центр описанной около этого треугольника

окружности 0. Найдем также ортоцентр треугольника ABC—H. Разделив отрезок OH пополам, примем его средину M за центр окружности радиуса, равного $\frac{OA}{2}$. Описанная из точки M радиусом $\frac{OA}{2}$ окружность и будет *окружностью девяти точек Эйлера.* Она действительно проходит через 9 точек: α, β, γ—основания высот T-ка ABC, a, b, c средины сторон ABC и p, q, r средины расстояний ортоцентра треугольника ABC от его вершин.



Чертеж 40

Действительно, отрезок Mp, соединяющий средины M и p сторон OH и HA треугольника OXA, параллелен основанию его OA и равен его половине. Значит окружность (M) переходит через точку p, а следовательно и точки q и r.

Из элементов геометрии известно, что высоты треугольника ABC, суть перпендикуляры, восстановленные из средин сторон другого треугольника $A_1B_1C_1$, получаемого проведением через каждую вершину данного T-ка прямой, параллельной противолежащей стороне его. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны с модулем подобия равным 2. Отрезок AH, рассматриваемый как принадлежащий T-ку $A_1B_1C_1$, будет вдвое более отрезка Oa—соответствующего ему в треугольнике ABC. Следовательно отрезки Oa и Ap равны, а так как они параллельны, то pa равен и параллелен 0A. Но pM=Ma и следовательно окружность (M) проходит через точку a, а значит и через точки b и c.

Наконец, так как pa есть диаметр окружности Эйлера (M) и угол p α a—прямой, то окружность Эйлера проходит через точку α, а значит и через точки β и γ.

Фейербах показал, что окружность 9 точек касается окружности, вписанной в треугольник ABC, а также и трех вневписанных в него окружностей. Мы не будем теперь доказывать этой теоремы, так как она нам не понадобится.

Окружность 9 точек является линией центров пучка равносторонних гипербол, какой мы рассматривали в § 19 настоящей главы.

Заметим наконец, что четыре треугольника, образованные соединением любых трех центров инверсии циркулярной кривой, имеют общий круг 9 точек.

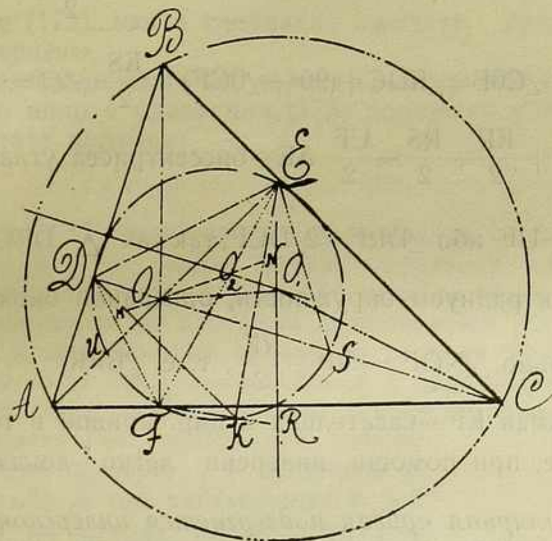
Действительно, только что мы показали, что круг 9 точек треугольника проходит через основания его высот α, β, γ (см. черт. 40).

Но эти точки принадлежат каждому из четырех треугольников, имеющих вершины в центрах инверсии циркулярной кривой, след. они имеют общий круг 9 точек.

§ 22. Докажем теперь, пользуясь соображениями § 21, такую теорему: *Касательные к циркулярной кривой в точках D, E и F см. чертеж (41) пересекаются в одной точке K, лежащей на круге 9 точек, который является общим для всех четырех треугольников, имеющих вершины в центрах аналлагматической инверсии этой кривой.*

Это предложение может быть доказано при помощи чисто геометрических соображений. Возьмем треугольник ABC, проходящий через три каких-нибудь центра аналл. инверсии кривой. Четвертый центр инверсии будет ортоцентром 0 треугольника ABC. Пусть касательные к циркулярной кривой в точках D и E пересекутся в точке K. Соединим основание третьей высоты с точкой K. Пусть кроме того касательная к циркулярной кривой в точке 0 пересечет касательные DK и EK в точках M и N.

Так как D и E суть инверсионные точки с точкой 0 по отношению к C и A, ибо на основании § 10 гл. I CO CD=constans и AO.AE=constans, то $\angle KEO = N0E$ [§ 2 гл. I сл. 2] и $\angle KDO = \angle MOD = \angle N0C$.



Чертеж 41

Следовательно, $\angle KEO + \angle KDO = \angle NOE + \angle NOC = \angle EOC = \angle DOA = \frac{\pi}{2} - \angle DAO$; далее можно написать:

$$\pi - \angle DKE = \angle KDO + \angle CDE + \angle KEO + \angle AED,$$

т. е. $\pi - \angle DKE = \frac{\pi}{2} - \angle DAO + \angle ODE + \angle OED$; $\angle ODE + \angle OED = \pi - \angle DOE$;

$\angle DOE = \pi - \angle DOA$; $\angle DOA = \frac{\pi}{2} - \angle DAO$; след. $\angle DOE = \pi - \frac{\pi}{2} + \angle DAO = \frac{\pi}{2} + \angle DAO$; значит $\pi - \angle DKE = \frac{\pi}{2} - \angle DAO + \pi - \angle DOE = \frac{\pi}{2} - \angle DAO + \pi - \frac{\pi}{2} - \angle DAO.$

Отсюда и находим, что

$$\angle DKE = 2\angle DAO.$$

На чертеже 41 пунктиром с одной точкой начерчен круг Эйлера для треугольника ABC. Найдем угол DFE ортоцентрического треугольника DEF, вписанного в эту окружность. Очевидно угол DFE

равен углу DSE. Угол же DSE равен $2\angle ECS=2\angle OAD$. Треугольник ESC равнобедренный. Если на отрезке OC, как на диаметре, построим окружность, то она должна пройти через точку E ($\angle OEC$—прямой), отсюда $SC=SE$. Треугольники же BDC и AEB подобны. Так как угол K равен углу F и оба они опираются на одну и ту же дугу DE, то этим и доказывается, что точка K находится на окружности Эйлера Т-ка ABC. Остается только показать, что KF касательная к циркулярной кривой в точке F.

Для этого достаточно показать, что $\angle N0F=\angle BFK$ (точки 0 и F —инверсионны по отношению к B): $BO.BF=contans$).

Действительно, $\angle BFK=\angle BFC+\angle CFK=90^0+\frac{KR}{2}$

$$\angle N0F=\angle N0C+\angle C0F=\angle KDC+(90^0-\angle 0CF)=\frac{KS}{2}+90^0-\frac{DRF}{2}=\frac{KS}{2}+$$

$+90^0-\frac{DF}{4}=90^0+\frac{KR}{2}+\frac{RS}{2}-\frac{UF}{2}$ AE—биссектрисса угла DEF; $UF=\smile$ $\smile\frac{DF}{2}$. Но $\smile RS=\smile UF$ ибо $\angle DRF=2\angle DCF$, так как $\triangle$ DRC равнобедренный $RD=RC$ как радиусы окружности, описанной около $\triangle$-ка ADC.

Следовательно, $\angle NOF=90^0+\frac{RK}{2}$, т. е. $\angle BFK$.

Значит прямая KF—касательна к цир. кривой в точке F.

§ 23. Далее, при помощи инверсии легко доказывается такое предложение:

Если циркулярная кривая подвергается инверсионному преобразованию около центра инверсии на ней самой, то она преобразуется в новую циркулярную кривую, причем соприкасающийся круг первой переходит в ассимптоту второй.

Соприкасающийся круг пересекает кривую в трех точках, совпадающих в O и еще в четвертой точке M, лежащей на конечном от нее расстоянии. После инверсии окружность перейдет в прямую, пересекающую новую циркулярную кривую в конечной точке M (инверсионной по отношению к M) и еще в двух точках, совпадающих друг с другом на ∞ (инверсионное преобразование начала координат O).

Значит соприкасающаяся окружность переходит в вещественную ассимптоту инверсионной кривой.

§ 24. В § 9 главы I было показано, что если некоторая прямая пересекает *циркулярную кривую* в трех точках a, b и c, то три точки a^1, b^1 и c^1, в которых касательные в точках a, b, c пересекают *циркулярную кривую*, лежат на одной прямой.

Точкой перегиба наз. точка, в которой касательная имеет с кривой три общих точки.

Из предыдущего следует, что точки прикосновения трех касательных к циркулярной кривой из точки ее перегиба лежат на одной прямой.

Докажем теперь предложение: *если подвергнем инверсионному преобразованию данную циркулярную кривую, приняв ее главную точку A за полюс инверсии, то эта же точка A будет точкой перегиба новой циркулярной кривой, получившейся после инверсионного преобразования.*

Для доказательства последнего возьмем уравнение циркулярной кривой, приняв ее главную точку за начало координат. Такая форма *уравнения кривой* была получена в § 11 главы I. Это уравнение по раскрытии скобок можно переписать так:

$$x(x^2+y^2)+\alpha x^2+\beta xy+\gamma x+\delta y=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (172)$$

буквами α, β, γ и δ обозначены соответственные коэффициенты для сокращения письма.

После инверсионного преобразования уравнения (172) по формулам инверсии (при модуле k), мы получим:

$$(\gamma x^1+\delta y^1)\,(x^{12}+y^{12})+k.^2\alpha.x^1+k^2.\beta.x^1y^1+k^4x^1=0. \quad (173)$$

Уравнение (172), как и следовало ожидать, представляет *новую циркулярную кривую.*

Найдем координаты точки пересечения кривой (173) с осью У.

Для этого надо в уравнении (173) положить $x^1=0$.

В результате получим:

$$\delta.y^{13}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (174)$$

Уравнение (174) показывает, что в начале координат совпадают три точки кривой (173). Значит начало координат, или главная точка кривой (172) является точкой перегиба инверсионной кривой (173).

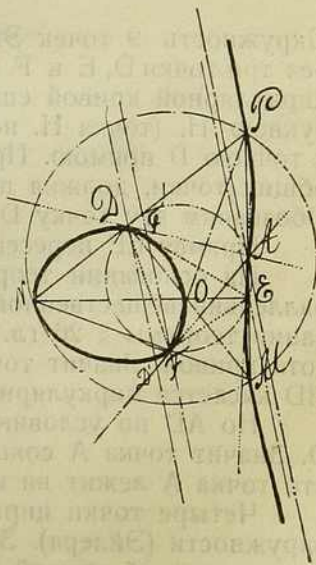
§ 25. С помощью же инверсии доказывается такое предложение о касательных к циркулярной кривой из главной точки.

«*Точки касания трех касательных к циркулярной кривой, проведенных к ней из ее главной точки, лежат на одной окружности*».

Для доказательства вообразим некоторую циркулярную кривую S и проведем из ее точки перегиба A три касательных к ней. Точки касания a_1, a_2 и a_3 по предыдущему будут лежать на некоторой прямой. Сделаем инверсионное преобразование, тогда получим новую циркулярную кривую S^1, у которой касательные (2-е свойство инверсии), проведенные из ее главной точки (в нее перейдет точка перегиба первой кривой), будут иметь точки касания на окружности (в нее перейдет после инверсии прямая a_1, a_2, a_3). Это же предложение есть непосредственное следствие из теоремы 3-ей § 11 главы I.

Из той же теоремы выводим, что упомянутая окружность проходит также через *главную точку* и *особенный фокус кривой.*

§ 26. Треугольник DEF, получаемый от соединения прямыми оснований высот данного Δ-ка, называется *ортическим.*



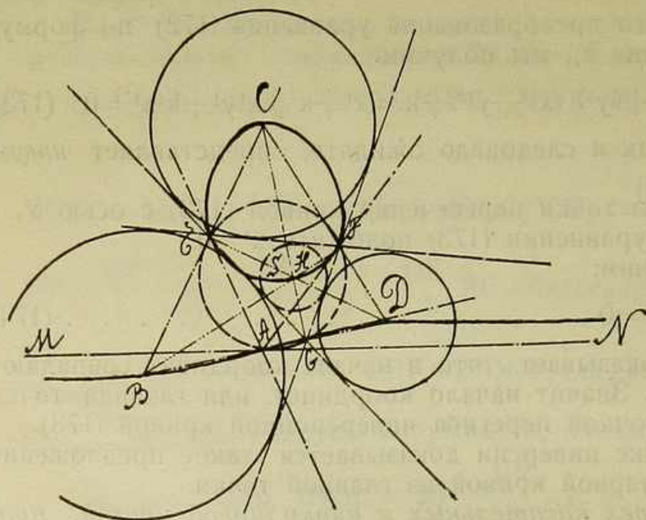
Чертеж 42

Если стороны ортического Δ-ка EF,FD и DE (черт. 42) продолжим до пересечения с циркулярной кривой в точках D^1, E^1 (не помещается на чертеже) и F^1, то прямые DD^1, EE^1 и FF^1 будут параллельны вещественной ассимптоте AL циркулярной кривой.

Так как четыре точки N, F, E и P лежат на циркулярной кривой, а также и на окружности, построенной на NP как на диаметре ($\angle NFP=\angle NEP=d$), то к ним может быть применена теорема § 8 гла-

вы I: окружность, проведенная через N и P, встретит цирк. кривую еще в двух точках F и E. Прямая FE пересечет кривую в точке D^1. Прямая NP также встречает кривую (в точке D). Прямая, проходящая через эти две точки: DD^1 по § 8, будет параллельна вещественной ассимптоте.

Применяя то же к точкам P, D, F, M и M, E, D, N, найдем, что $EE^1 // AL$ и $FF^1 // AL$.



Чертеж 43

§ 27. В дополнение к теореме § 22 докажем, что *точка A пересечения трех касательных; FA, DA и EA (черт. 42) к циркулярной кривой в вершинах ортического треугольника DEF четырех треугольников ее центров аналлагматической инверсии, есть главная точка циркулярной кривой.*

Точка A, как доказано в § 22 главы 2-й, лежит на окружности Эйлера для треугольника MNP центров инверсии. Окружность 9 точек Эйлера (она начерчена пунктиром) проходит через три точки D, E и F циркулярной кривой. Она должна пересечься с циркулярной кривой еще и в четвертой точке. Обозначим эту точку буквою H. (точка H. не отмечена на чертеже 42). Соединим точку H с точкою D прямою. Прямая HD, имея с циркулярной кривой две общих точки, должна пересечь ее еще и в некоторой третьей точке. Обозначим эту точку D_2 (она также не отмечена на чертеже).

Прямая EF пересекает цирк. кривую в третьей точке D^1.

На основании теоремы § 8 гл. I прямая D^1D_2 должна быть параллельна вещественной ассимптоте кривой. Но прямая D^1D на основании теоремы § 26 гл. 2-й тоже параллельна вещественной ассимптоте кривой. Значит точка D_2 совпадает с D и следовательно прямая HD касается циркулярной кривой в точке D.

Но AD по условию касательная к циркулярной кривой в точке D. Значит точка A совпадает с точкой H и, таким образом, доказано, что точка A лежит на кривой.

Четыре точки циркулярной кривой A, D, E и F лежат на одной окружности (Эйлера). Значит, точки прикосновения трех касательных к циркулярной кривой из точки A лежат на одной окружности. Следовательно, на основании теоремы § 25 главы 2-й точка A есть *главная точка циркулярной кривой.*

Как следствие сказанного можно отметить, что *общая для четырех треугольников инверсии окружность 9 точек Эйлера всегда проходит через главную точку циркулярной кривой.*

§ 28. Прежде, чем отметить еще несколько свойств окружности 9 точек Эйлера, приведем новый способ образования циркулярной кривой, основанный на исследованиях *Casey*, а также укажем некото-

рые необходимые для дальнейшего изложения свойства, так называемого *автополярного треугольника.*

Теорема *Casey*, как будет отмечено ниже, легко может быть поставлена в связь с теоремой § 25 главы I.

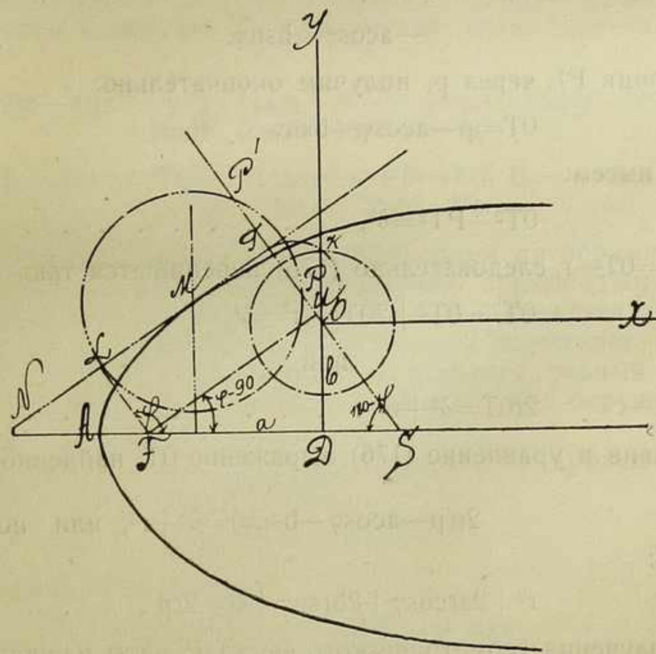
Применив исследования *Casey (Transactions Royal Irish Academy* XXIV p. 457) о способах образования бициркулярных кривых к частному случаю фокального конического сечения (парабол), можно указать следующий способ образования циркулярной кривой 3-го порядка.

Возьмем какую-нибудь постоянную параболу. (Черт. 44). Проведем к ней в какой-ниб. точке М касательную, из некоторой постоянной точки О опустим на эту касательную перпендикуляр ОТ. От основания этого перпендикуляра Т отложим по обе стороны равные отрезки ТР и ТР[1].

Если кроме того точка Р подчинена условию

$$OT^2 - PT^2 = \delta^2,$$

где δ некоторая постоянная длина, то геометрическим местом точек Р и Р[1] *при движении точки М по параболе будет некоторая циркулярная кривая.*



Чертеж 44

Точку О возьмем за начало прямоугольной Декартовой системы координат. Координаты фокуса F параболы пусть будут (—a,—b). На отрезке ОТ как на диаметре строим полуокружность.

От точки О откладываем на ней хорду ОК=δ.

Радиусом ТК делаем засечки на перпендикуляре ОТ, получим, таким образом, точки Р и Р[1]. Покажем, что геометрическим местом таких точек будет некоторая циркулярная кривая.

Координаты точки P обозначим через x и y, а расстояние OP через r, так что

$$r = OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Проведем FL, перпендикуляр на касательную MN, и линию FU // MN. Продолжим также OP до пересечения с осью симметрии параболы в точке S и ось У до пересечения с той же прямой в точке D.

Из чертежа видно, что

$$0T = TU + U0 = FL + U0 = FL + US - 0S.$$

$$\text{но } 0S = \frac{b}{sn\varphi}\ ;\ US = FS\ Sin(\varphi - 90^0) = -FS.cos\varphi.$$

Далее $FS = FD + DS = a + b.ctg\ (180 - \varphi) = a - \frac{bcos\varphi}{sn\varphi}$, отсюда $US = -$

$$-\left\{a - \frac{bcos\varphi}{sn\varphi}\right\}cos\varphi = -acos\varphi + \frac{bcos^2\varphi}{sn\varphi}$$

$$0T = FL - acos\varphi + \frac{bcos^2\varphi}{sn\varphi} - \frac{b}{sn\varphi} = FL - acos\varphi - \frac{b(1-cos^2\varphi)}{sn\varphi} = FL -$$

$$-acos\varphi - bsn\varphi.$$

Обозначив FL через p, получим окончательно:

$$0T = p - acos\varphi - bsn\varphi.$$

Далее имеем:

$$0T^2 - PT^2 = \delta^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (175)$$

но $PT = 0T - r$, следовательно (175) перепишется так:

$$0T^2 - 0T^2 + 20Tr - r^2 = \delta^2$$

или

$$2r0T = \delta^2 + r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (176)$$

Подставив в уравнение (176) выражение 0T, найденное выше, мы получим:

$$2r(p - acos\varphi - bsn\varphi) = \delta^2 + r^2,$$ или по раскрытии

скобок:

$$r^2 + 2arcos\varphi + 2brsn\varphi + \delta^2 = 2rp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (177)$$

Для получения геометрического места P надо из уравнения (177) исключить параметры p и φ, определяющие положение определенной касательной MN. Как известно длина перпендикуляра p из фокуса параболы на ее касательную равна $-\frac{m}{cos\varphi}$, где 2m параметр параболы, а φ угол этого перпендикуляра с осью x (с полож. напр. ее φ в этом случае будет всегда тупым, отчего у 2m взят знак —).

Таким образом имеем формулу: $p = -\frac{m}{cos\varphi}$

Умножим обе части уравнения (177) на r.coφ и подставим в него вместо p только что полученное выражение:

$$r\cos\varphi[r^2+2ar\cos\varphi+2br sny+\delta^2]=-2mr^2 \quad . \ . \ . \ . \ (178)$$

но $r\cos\varphi=x$; $rsn\varphi=y$, $r^2=x^2+y^2$ следовательно по переходе к Декартовым координатам уравнение (178) получит вид:

$$x(x^2+y^2)+2ax^2+2bxy+\delta^2x+2m(x^2+y^2)=0 \quad . \ . \ . \ . \ (179)$$

Ур-ие (179) может быть переписано и таким образом:

$$(x+2m)(x^2+y^2)+2ax^2+2bxy+\delta^2x=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (180)$$

Уравнение (180), как известно, есть уравнение циркулярной кривой. Теорема таким образом доказана.

Уравнение вещественной ассимптоты этой кривой будет: $x+2m=0$

Координаты главной точки:

$$x_A=-2m;\ y_A=\frac{4m^2-\delta^2}{2b}$$

Координаты центра кривой по формулам (§ 3 гл. I) будут: $-a$ и $-b$, т. е. центр кривой совпадает с фокусом параболы. По перенесении начала координат в центр уравнение кривой примет вид уравнения § 5 главы I, ибо ось У параллельна вещественной ассимптоте кривой.

$$(x^1+2m-a)(x^{12}+y^{12})-(4am+a^2+b^2-\delta^2)x^1-4bmy^1+a^3+ab^2$$
$$+2ma^2+2mb^2-\delta^2a=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (181)$$

Здесь $A_2=2m-a$; $D_2=-(4am+a^2+b^2-\delta^2)$; $E_2=-4bm$; $F_2=a^3+$
$+ab^2+2ma^2+2mb^2-\delta^2a$

Уравнение (181) получается из (180) путем преобразования координат. Нетрудно показать, что циркулярная кривая (180) есть огибающая переменной окружности, центр которой движется по параболе MAM^1, причем, эта окружность ортогонально пересекает постоянную окружность, имеющую центр в точке O и радиус, равный δ (т. е. последняя окружность будет одной из направляющих окружностей § 25 гл. I.)

Опишем из точки касания M окружность, проходящую через точки P и P^1. Так как соотношение:

$$OT^2-PT^2=\delta^2$$

может быть переписано в виде:

$$(OT+PT).(OT-PT)=\delta^2 \text{ или}$$

$OP.OP^1=\delta^2$, то отсюда следует, что касательная к окружности M из точки O всегда равна δ, т. е. радиусу постоянной окружности.

Отсюда и видно, что окружности O и M пересекаются ортогонально.

Возьмем на параболе точку M_1, бесконечно близкую к M. В таком случае можно считать, что M_1 лежит на касательной к параболе MN. Опишем из точки M_1, приняв ее за центр, окружность, которая прошла бы через точки P и P^1.

Тогда прямая PP^1 будет радикальною осью окружностей M и M_1, ортогонально пересекающих постоянную окружность O.

Таким образом точки P и P_1 будут характеристическими точками семейства переменных окружностей M, и следовательно циркулярная кривая, как геометрическое место характеристических точек, будет огибающей семейства окружностей M.

Постоянная окружность O есть окружность инверсии в силу соотношения: $OP.OP^1=\delta^2$, где δ модуль инверсии.

Точка O есть один из центров аналлагматической инверсии кривой.

§ 29. В настоящем § приведем чисто аналитическое доказательство теоремы Casey. Оно, повидимому, указывается здесь впервые..

Если обозначим попрежнему координаты фокуса параболы через $-a$ и $-b$ относительно прямоугольной системы с началом в точке O, параметр параболы обозначим через p, то координаты вершины этой параболы будут: $-\left(a+\frac{p}{2}\right)$ и $-b$.

Следовательно ее уравнение будет:

$$\left(y+b\right)^2=2p\left(x+a+\frac{p}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (181)$$

Угловой коэффициент касательной:

$$\frac{p}{y+b}$$

Уравнение касательной к параболе в точке x_1y_1:

$$(y-y_1)(y_1+b)-p(x-x_1)=0$$

Уравнение нормали: $y=-\frac{y_1+b}{p}.x$ или

$$py+(y_1+b)x=0$$

Длина перпендикуляра OT на касательную из точки O будет

$$OT=\frac{-y_1(y_1+b)+px_1}{\sqrt{(y_1+b)^2+p^2}}$$

Длина перпендикуляра из точки $P(\xi, \eta)$ (ξ и η обозначают текущие координаты искомого геометрического места

$$PT=\frac{(\eta-y_1)(y_1+b)-p(\xi-x_1)}{\sqrt{(y_1+b)^2+p^2}}$$

Далее $OT^2-PT^2=\frac{[px_1-y_1(y_1+b)]^2-[\eta-y_1)(y_1+b)-p(\xi-x_1)]^2}{(y_1+b)^2+p^2}=\delta^2$ (182)

Для получения уравнения искомого геометрического места достаточно исключить x_1 и y_1 из уравнений: 1) параболы, куда вместо текущих коорд. подставлены коорд. точки x_1 y_1 лежащей на ней:

$$\left(y_1+b\right)^2=2p\left(x_1+a+\frac{p}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (183)$$

Уравнения $p\eta+(y_1+b)\xi=0$ (184) (точка $\xi\eta$ лежит на нормали в точке x_1y_1) и уравнения (182). Последнее уравнение предварительно

упростим, освободив его от знаменателя и разложив 1-ю часть на множителей, мы получим:

$$[px_1-y_1(y_1+b)+(y_1+b)(\eta-y_1)-p\xi+px_1].[px_1-y_1(y_1+b)+p\xi-px_1-$$
$$-(\eta-y_1)(y_1+b)]=\delta^2[p^2+(y_1+b)^2] \quad . \; . \; . \; . \; . \; (185)$$

или по приведении подобных членов:

$$[2px_1+(y_1+b)(\eta-2y_1)-p\xi].[p\xi-(y_1+b)\eta]=\delta^2[p^2+(y_1+b)^2] \quad . \; . \; (186)$$

Из (184) получаем:

$$y_1+b=-\frac{p\eta}{\xi}; \quad y_1=-\frac{p\eta+b\xi}{\xi}$$

А из (183) найдем: $2px_1=\left\{y_1+b\right\}^2-2pa-p^2=\frac{p^2\eta^2}{\xi}-2pa-$

$$-p^2=\frac{p^2\eta^2-2pa\xi^2-p^2\xi^2}{\xi^2}$$

Подставив только что полученное выражение $2px_1$ и y_1 в (186), мы приведем последнее к виду:

$$\left\{\frac{p^2\eta^2-2pa\xi^2-p^2\xi^2}{\xi^2}-\frac{p\eta}{\xi}\left[\eta+\frac{2p\eta+2b\xi}{\xi}\right]-p\xi\right\}.\left\{p\xi+\frac{p\eta^2}{\xi}\right\}=$$
$$=\delta^2\left[p^2+\frac{p^2.\eta^2}{\xi^2}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (187)$$

Приведя все члены уравнения (187) к общему знаменателю ξ^3 и отбросив его, мы придадим уравнению (187) такую форму:

$$[p^2\eta^2-2pa\xi^2-p^2\xi^2-p\eta(\eta\xi+2p\eta+2b\xi)-p\xi^3](p\xi^2+p\eta^2)=\delta^2\xi(p^2\xi^2+p^2\eta^2)$$

По сокращении на p^2 и приведении подобных членов получаем:

$$(\xi^2+\eta^2)[\delta^2\xi+(\xi^2+\eta^2)p+2a\xi^2+\eta^2\xi+\xi^3+2b\eta\xi]=0 \quad . \; . \; . \; (188)$$

Уравнение (188) распадается на два:

$\xi^2+\eta^2=0$ – точка (начало координат) и ур-ие кривой 3-го порядка:

$$(p+\xi)(\xi^2+\eta^2)+2a\xi^2+2b\eta\xi+\delta^2\xi=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (189)$$

Возвращаясь к обычному обозначению текущих координат через x и y, мы можем переписать уравнение (189) таким образом:

$$(x+p)(x^2+y^2)+2ax^2+2bxy+\delta^2x=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (190)$$

Уравнение циркулярной кривой тождественное с полученным раньше уравнением (180) (только 2m заменено буквою p).

Теорема Casey доказана.

Преобразуем уравнение (190) таким образом: Введем полярную систему координат: $x=\rho\cos\theta$ $y=\rho\,\mathrm{sn}\,\theta$.

После такого преобразования уравнение (190) сведется к следующему:

$$\rho^3\cos\theta+2a\rho^2\cos^2\theta+2b\rho^2\,\mathrm{sn}\,\theta\cos\theta+\delta^2\rho\cos\theta+p\rho^2=0$$

$$\text{или } \rho^2+2\left\{a\cos\theta+b\,\mathrm{sn}\,\theta+\frac{p}{2}\sec\theta\right\}\rho+\delta^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (191)$$

Прямая

$\rho=\alpha$, где α—корень уравнения $a\cos\alpha+b\sin\alpha+\frac{p}{2}\sec\alpha=-\delta$

пересечет кривую (194) в двух совпадающих точках ($N_{1,2}$), ибо в этом случае уравнение (191) примет вид:

$$\rho^2-2\delta\rho+\delta^2=0, \text{ откуда}$$

$\rho_1=\rho_2=\delta$. Декартовы координаты точки $N_{1,2}$ будут ($\delta\cos\alpha$, $\delta\sin\alpha$).

Если преобразовать уравнение (190) к параллельным осям x^1y^1, имеющим начало в точке ($\delta\cos\alpha$ и $\delta\sin\alpha$) по формулам

$$x=x^1+\delta\cos\alpha$$

$y=y^1+\delta\sin\alpha$, то члены с первыми степенями x^1 и y^1 не исчезнут (в чем нетрудно убедиться непосредственной подстановкой). Это показывает (см. § 25 гл. I), что точка $N_{1,2}$ не есть двойная точка кривой, а только точка прикосновения одной из касательных кривой, проведенных из точки O.

Уравнение (190) показывает, что при $\delta=0$ начало координат будет двойной точкой. Если $\delta\neq0$, то кривая не имеет двойной точки, что видно из предыдущего.

Согласно § 22 главы I уравнения касательных к кривой в двойной точке получим, приравняв нулю совокупность членов 2-го измерения уравнения (190), т. е.

$$(2a+p)x^2+2bxy+py^2=0 \quad \ldots\ldots \quad (192)$$

Уравнение (192) показывает, что при $\delta=0$ и при $b^2-(2a+p)p>0$ кривая будет иметь узловую точку (§ 22 гл. I).

В этом случае точка $O(0,0)$ лежит вне параболы:

$$\left\{y+b\right\}^2-2p\left\{x+a+\frac{p}{2}\right\}=0$$

При $\left.\begin{matrix} b^2-(2a+p)p=0 \\ \delta=0 \end{matrix}\right\}$ и кривая имеет точку возврата. Точка O лежит в этом случае на самой производящей параболе.

Если, наконец, $\delta=0$ и $b^2-(2a+p)p<0$, т. е. если точка $O_{(0,0)}$ лежит внутри параболы (181), то двойная точка кривой есть точка изолированная.

Обозначив через ρ_1 и ρ_2 корни уравнения (191), мы можем написать, что

$$\rho_1 \cdot \rho_2=\delta^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (193)$$

$$\frac{\rho_1+\rho_2}{2}=-\left\{a\cos\theta+b\sin\theta+\frac{p}{2}\sec\theta\right\} \quad \ldots \quad (194)$$

Соотношение (193) выражает известное уже из § 28 постоянство длины касательной из точки O к образующей окружности (M). А левая часть уравнения (194) представляет собою радиус вектор r точки N—середины хорды циркулярной кривой, образованной секущей из точки O.

Уравнение: $r+a\cos\theta+b\sin\theta+\frac{p}{2}\sec\theta \quad \ldots \quad (195)$

будет уравнением кривой, представляющей геометрическое место точки N.

Уравнение (195) может быть переписано в такой форме:

$$r\cos\theta + a\cos^2\theta + b\sin\theta \, . \cos\theta + \frac{p}{2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (196)$$

Переходя к Декартовым координатам, мы можем уравнение (196) написать так:

$$x + \frac{ax^2}{r} + \frac{bxy}{r^2} + \frac{p}{2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (197)$$

Освободив уравнение (197) от знаменателя и подставив вместо r^2 равное ему (x^2+y^2), мы окончательно получим:

$$2x(x^2+y^2)+2ax^2+2bxy+p^2x^2+py^2=0$$

или

$$2x(x^2+y^2)+(2a+p)x^2+2bxy+py^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; (198)$$

Уравнение (198) показывает, что геометрическим местом точки N *будет также циркулярная кривая, имеющая (при* $\delta=0$*) двойную точку общую с циркулярной, кривой (190).*

Касательные в этой двойной точке к общим циркулярным кривым также совпадают. Это непосредственно усматривается из сравнения уравнений (190) и (198).

§ 30. Если вершины некоторого треугольника $P_1P_2P_3$ являются полюсами противоположных его сторон по отношению к некоторой окружности, то такой треугольник называется автополярным или полярным треугольником по отношению к данной окружности.

Для того, чтобы Т-к $P_1(x_1y_1)$, $P_2(x_2y_2)$ $P_3(x_3y_3)$ был автополярным по отношению к окружности

$$x^2+y^2=r^2,$$

необходимо и достаточно, чтобы поляра P_1 $xx_1+yy_1-r^2=0$ проходила через P_2 и P_3, т. е. 1) $x_2x_1+y_2y_1-r^2=0$ и 2) $x_3x_1+y_3y_1-r^2=0$.

Применяя то же условие к полярам P_2 и P_3, получим еще одно новое условие: $x_2x_3+y_2y_3-r^2=0$.

Для данной окружности существует бесчисленное множество автополярных треугольников, ибо точка P_1 может быть взята совершенно произвольно, точка P_2 может быть взята в любой точке поляры P_1, точка же P_3 определяется вполне по этим условиям при помощи соотношений 1), 2) 3;

Если точка P_1 взята на самой окружности, то поляра $P_1-P_2P_3$ сливается с касательной в точке P_1, и автополярный треугольник исчезает, ибо P_3 также сливается с P_1.

1) Центр данной окружности является ортоцентром всех треугольников, автополярных по отношению к ней, ибо перпендикуляр, опущенной из полюса на поляру, всегда проходит через центр окружности, по отношению к которой берется поляра. Последнее предложение, вытекающее из самого способа построения поляры, может быть доказано и аналитическим путем.

2) Автополярный треугольник для всякой вещественной окружности всегда тупоугольный, причем вершина тупого угла лежит внутри окружности.

Последнее следует из того (черт. 45), что вершина P_3, как лежащая на поляре P_2, должна быть четвертой гармонической с точкой P_2 по отношению к точкам M и N пересечения прямой P_2N с окружностью и следовательно точка P_3 должна лежать между M и N, если P_2 взята вне отрезка MN.

Для доказательства первой части предложения заметим, что длина

$$P_1P_2^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (199)$$

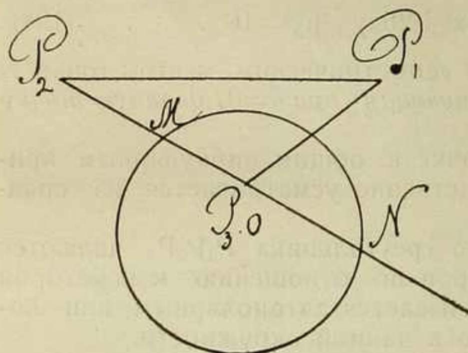
может быть переписана следующим образом:

$P_1P^2=x_1^2+y_1^2-r^2+x_2^2+y_2^2-r^2-2(x_1x_2+y_1y_2-r^2)=0$, а так как в силу условия (1) автополярности треугольника последний член равенства (199) равен 0, то оно в окончательном виде может быть переписано так:

$$P_1P_2^2=\pi_1+\pi_2, \text{где } \pi_1 \text{ и } \pi_2 \text{ степени}$$

(Potenzen) точек P_1 и P_2 относительно окружности.

Степенью (Potenz) точки x_1y_1 относительно окружности наз. результат подстановки координат x_1y_1 в левую часть уравнения окружности. Для точек, лежащих вне окружности степень >0, для точек внутри окружности степень <0. Для точек самой окружности степень равна 0. Если точка x_1y_1 вне окружности, то степень есть квадрат длины касательной из нее.



Чертеж 45

Аналогично находим, что

$P_2P_3^2=\pi_2+\pi_3$ и $P_1P_3^2=\pi_1+\pi_3$ Из сумм: $\pi_1+\pi_3$, $\pi_2+\pi_3$ и $\pi_1+\pi_3$ наибольшей будет та, у которой оба слагаемые положительны, т. е. сумма соответствующая стороне, лежащей вне окружности: P_1P_2.

Против этой стороны лежит тупой угол, ибо
$\pi_1+\pi_2>(\pi_1+\pi_3)+(\pi_2+\pi_3)$; ($\pi_3<0$. Значит $P_1P_2^2>P_1P_3^2+P_2P_3^2$, и предложение доказано.

Автополярные треугольники по отношению к мнимым окружностям будут остроугольными, ибо в этом случае π_1, π_2 и π_3 будут больше 0. Следовательно
$\pi_1+\pi_2<\pi_1+\pi_3+\pi_2+\pi_3$, т. е. квадрат наибольшей стороны меньше суммы квадратов двух других сторон.

Например, для окружности (черт. 46)
один из автополярных треугольников будет иметь вершины в точках (1,1): (3,1) и (0,4). Точка $P_1(1,1)$ взята произвольно.

Уравнение поляры точки $P_1: x+y-4=0$. Точка P_2 лежит на прямой: $x+y-4=0$. Следовательно давши x произвольное значение, например 3, найдем из уравнения $3+y-4=0$; $y_2=1$.

Поляра точки $P_3: xx_3+yy_3-4=0$. Это уравнение должно быть тождественно с уравнением прямой P_1P_2:

$$y-1=\frac{1-1}{1-3}(x-1) \text{ или } y-1=0,$$

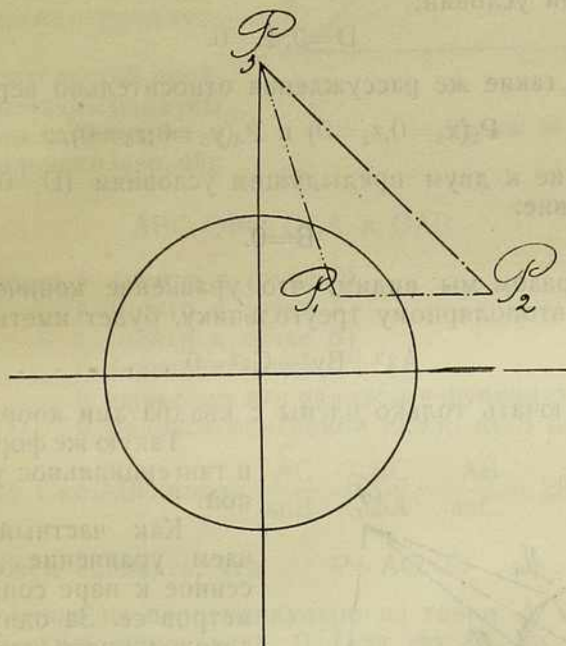
т. е. мы должны иметь: $\dfrac{x_3}{0}=\dfrac{y_3}{1}=-\dfrac{4}{1}$ отсюда $x_3=0$; $y_3=4$.

Пример 2. Автополярным треугольником $P_1(4,3)$; $P_2(-5-3)$ и $P_3(11,-11)$ определяется окружность радиуса ρ, проходящая через его орто центр. (3,1) уравнение этой окружности:

$$(x-3)^2+(y-1)^2=\rho^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (200)$$

Для определения ρ пользуемся основными условиями: поляра P_1 по отношению к окружности (200) будет:

$$x+2y-5-\rho^2=0.$$



Чертеж 46

Она должна пройти через точки P_2 и P_3 следовательно:

$-5-6-5-\rho^2=0$; $\rho^2=-16$; $\rho=4i$. Окружность—мнимая.

То же выражение для ρ дает и второе условие.

§ 31. Можно также рассматривать Т-к по отношению к любому коническому сечению. Для конического сечения существует бесчисленное множество автополярных треугольников, и в этом случае точку P_1 можно взять произвольно, а вершину P_2 в любой точке поляры P_1.

Если кривую, по отношению к которой рассматривается автополярный треугольник, отнесем к системе трилинейных координат, приняв автополярный треугольник за координатный, то уравнение кривой примет весьма простую форму.

Пусть уравнение конического сечения в трилинейных координатах будет $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0$ . . . . . . (201)

Напишем уравнение поляры какой-нибудь точки $P_1(x_1y_1z_1)$ по отношению к кривой (201):

$$(Ax_1+By_1+Dz_1)x+(Bx_1+Cy_1+Ez_1)y+(Dx_1+Ey_1+Fz_1)z=0$$

Возьмем точку P_1 в одной из вершин координатного треугольника, тогда $x_1=0; y_1=0$, и уравнение (3) примет вид:

$$Dz_1x + Ez_1y + Fz_1z = 0$$

или

$$Dx + Ey + Fz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (202)$$

Если мы хотим, чтобы поляра (202) была противоположной стороной координатного треугольника, то уравнение (202) должно быть эквивалентно с уравнением стороны, противолежащей вершине: ($x_1=0$ $y_1=0$). Уравнение этой стороны: $z=0$. Уравнение (202) будет эквивалентно $z=0$ при условии:

$$D=0;\ E=0.$$

Повторив такие же рассуждения относительно вершин

$$P_2(x_2=0, z_2=0) \text{ и } P_3(y_3=0; z_3=0),$$

мы в добавление к двум предыдущим условиям ($D=0; E=0$) получим еще одно условие:

$$B=0.$$

Таким образом мы видим, что уравнение конического сечения, отнесенное к автополярному треугольнику, будет иметь вид:

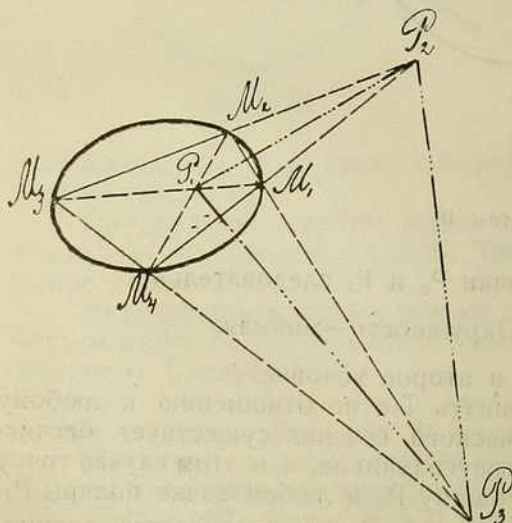
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (203)$$

т. е. будет заключать только члены с квадратами координат.

Такую же форму будет иметь и тангенциальное уравнение кривой.

Как частный случай получаем уравнение кривой, отнесенное к паре сопряженных диаметров ее. За одну из вершин автополярного треугольника берем центр. Поляpой его будет, как известно, бесконечно удаленная прямая.

§ 32. Возьмем кривую 2-го порядка (черт. 47) и впишем в нее четыреугольник $M_1M_2M_3M_4$. Треугольник $P_1P_2P_3$, вершинами которого служат точки пересечения диагоналей полного четыреугольника $M_1M_2M_3M_4$, будет автополярным для этой кривой 2-го порядка.



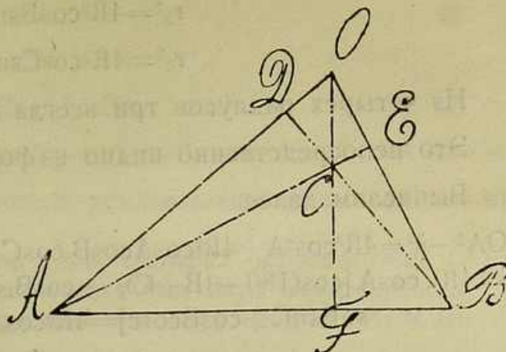
Чертеж 47

Сказанное непосредственно вытекает из известного способа построения поляр точек $P_1P_2P_3$ при помощи одной линейки. Очевидно, что этот же треугольник $P_1P_2P_3$ будет автополярным для всех кривых 2-го порядка, образующих пучок с центрами в точках $M_1M_2M_3M_4$.

§ 33. Возвращаясь к рассмотрению свойств $\triangle$-ков, получаемых путем попарного соединения четырех центров аналлагматической инверсии циркулярной кривой, мы можем, на основании предыдущего, высказать относительно их следующие предложения:

1) Каждый из четырех центров аналлагматической инверсии есть центр окружности, по отношению к которой треугольник, составленный путем соединения остальных трех центров, будет автополярным.

2) Четыре окружности, по отношению к которым четыре упомянутые выше треугольника будут автополярными, пересекают друг друга ортогонально.



Чертеж 48

Предложение 1-е вытекает непосредственно из первой теоремы § 30.

Для доказательства предложения 2) обозначим радиусы окружностей, по отношению к которым треугольники (чер. 48):

ABC; OBC; OCA и OAB

автополярны через δ (центр в точке 0)
r_1 (центр в точке A)
r_2 (центр в точке B)
r_3 (центр в точке C)
и вычислим эти радиусы в функциях углов Т-ка ABC и радиуса описанной около него окружности.

$$\text{Из Т-ка ABC имеем: } \frac{AC}{snB}=\frac{BC}{snA}=\frac{AB}{snC}=2R \quad \ldots \quad (204)$$

Далее можем написать, что $\delta^2=AO.OD$ . . . . . . (205)

Точка D лежит на перпендикуляре из точки A на поляру этой точки относительно окружности 0 (для нее BC и будет полярой полюса A). A точка пересечения поляры с таким перпендикуляром есть инверсионная точка по отношению к полюсу. Следовательно

$$\delta^2=A0.0D.$$

$$\text{Но } 0D=CD.\ tg0CD=CD.tgFCB=CD.ctgB \quad \ldots\ldots \quad (206)$$

$$CD=AC.\cos(180-C)=-AC.\cos C. \quad \ldots\ldots \quad (207)$$

$$\text{Отсюда } OD=-AC.\cos C.ctgB=-2R.sn\,B\cos C.ctgB=-2R\cos C.\cos B \quad (208)$$

$$AD=AC.sn(180^0-C)=AC.snC=2R.snB.sn.C. \quad \ldots \quad (209)$$

$$\text{Далее } OA=AD+OD=2R(\sin B.snC-\cos C.\cos B)=-2R\cos(B+C). \quad (210)$$

$$=-2R\cos(180-A)=2R.\cos A.$$

$$\text{Следовательно: } \delta^2=AO.OD=-4R.^2\cos A.\cos B.\cos C. \quad \ldots \quad (211)$$

Формула (211) показывает, что радиус δ окружности, по отношению к которой Т-к ABC автополярен, будет вещественным в том случае, если один из углов Т-ка больше $\frac{\pi}{2}$, что вполне согласуется со сказанным в § 30 (теорема 2-я).

Подобным же образом найдем, что:

$$r_1^2=4R^2\cos A\sin B.\operatorname{sn}C \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (212)$$

$$r_2^2=4R^2\cos B\operatorname{sn}C.\operatorname{sn}A \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (213)$$

$$r_3^2=4R^2\cos C\operatorname{sn}A.\operatorname{sn}B \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (214)$$

Из четырех радиусов три всегда вещественны, а один мнимый.

Это непосредственно видно из формул (211, 212), (213) и (214).

Вычислим далее

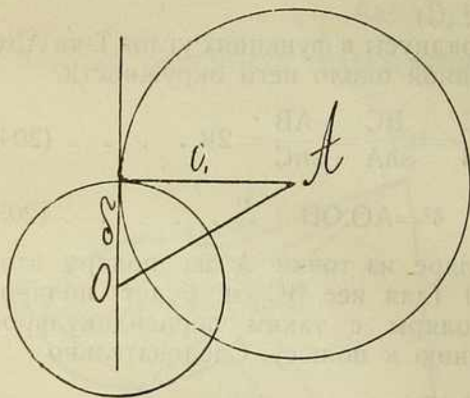
$$OA^2-\delta^2=4R^2\cos^2A+4R^2\cos A\cos B.\cos C=4R^2\cos A(\cos A+\cos B\cos C)=$$
$$=4R^2.\cos A\,[\cos(180-(B+C))+\cos B.\cos C]=4R^2\cos A[-\cos B\cos C+$$
$$\operatorname{sn}B\operatorname{sn}C+\cos B\cos c]=4R^2\cos A\operatorname{sn}B.\operatorname{sn}C=r_1^2, \text{ т. е.}$$

$$\delta^2+r_1^2=OA^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (215)$$

Условия (215) есть ни что иное, как условие ортогональности окружностей (0) и (А) (черт. 49).

Аналогично получим, что $\delta+r_2^2=OB^2$ . . . . (216)

и $\delta+r_3^2=OC^2$ . . . . (217)



Чертеж 49

Следовательно, окружности, по отношению к которым автополярны треугольники центров аналлагматической инверсии, ортогональны друг к другу, и 2-е предложение, таким образом, доказано.

Напишем уравнения всех этих четырех окружностей. Примем сторону $AB=c$ за ось x прямоугольной Декартовой системы координат, а точку А за начало координат. Длину стороны АС обозначим через b.

Тогда координаты центров инверсии будут $B(c,0)$; $A(0,0)$; $C(b\cos A, b\operatorname{sn}A)$

$O\left\{b\cos A;\ \dfrac{-b\cos^2A+c\cos A}{\operatorname{sn}A}\right\}$. Напишем теперь уравнения 4-х окружностей:

Уравнение окружности с центром в точке:

$$B:(B)\ (x-c)^2+y^2=r_2^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (218)$$

$$A:(A)\ x^2+y^2=r_1^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (219)$$

$$(C):(x-b\cos A)^2+(y-b\operatorname{sn}A)^2=r_3^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (220)$$

$$(O):(x-b\cos A)^2+\left[y-\frac{\cos A(c-b\cos A)}{\operatorname{Sn}A}\right]^2=\delta^2 \quad . \ . \ . \ (221)$$

В случае, соответствующем чертежу (50), третья окружность мнимая.

В раскрытом виде уравнения 218—221. перепишутся следующим образом:

(A) $x^2+y^2-r_1^2=0;$

(B) $x^2+y^2-2cx+c^2-r_2^2=0;$

(C) $x^2+y^2-2b\cos Ax-2b\,sn Ay+b^2-r_3^2=0;$

(O) $x^2+y^2-2b\cos Ax-2ctgA(c-b\cos A)y+b^2\cos^2A+ctg^2A(c-b\cos A)^2-\delta^2=0;$

На основании последних можно доказать еще одно свойство этих четырех окружностей.

3) Радикальные оси каждой пары четырех окружностей (A) (B) (C) и (O) проходят через центры остальных двух окружностей.

Напишем уравнение радикальной оси окружностей (A) и (B)

$$-r_1^2+2cx-c^2+r_2^2=0 \text{ или}$$

$$2cx+r_2^2-r_1^2-c^2=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (222)$$

Уравнение (222) должно удовлетворяться координатами точек:

$$C(b\cos A,\ b\,snA) \text{ и } O\ [b\cos A,\ ctgA(c-b\cos A)]$$

Очевидно, что для обеих точек достаточно проверить подстановку $x=b\cos A$. Сделав эту подстановку, получаем из ур-ия (222) и (212) и (213):

$$2bc\cos A+4R^2\cos B.snC.snA-4R^2\cos A snB.snC-4R^2sn^2C=0 \quad . \ (223)$$

Подставив в (223) выражения b и c из ур-ий (204), находим

$$8R^2\ sn.B.snC.\cos A+4R^2\cos B.snC.snA-4R^2\cos A snB snC-4R^2sn^2C=0$$

или

$$4R^2\cos B snC Sn.A+4R^2\cos A snB snC-4R^2sn^2C=0.$$

Сократив на $4R^2$ и взяв snC за скобки, получим

$$snC(snA\cos B+\cos A snB)-sn^2C=0$$

$$\text{или } snC.sn(180-C)-sn^2C=0, \text{ т. е. } sn^2C-sn^2C=0.$$

Предложение (3) для радикальной оси окружностей (A) и (B) доказано.

Напишем теперь уравнение радикальной оси окружностей (0) и (A) и покажем, что она пройдет через точки C ($b\cos A$; $b\,snA$) и B (c, o). Уравнение радикальной оси (0) и (A) будет:

$$-2b\cos Ax-2ctgA(c-b\cos A)y+ctg^2A(c-b\cos A)^2+b^2\cos^2A-\delta^2+r_1^2=0 \quad (224)$$

Условием, что прямая (224) пройдет через точку B, будет:

$$-2bc\cos A+ctg^2A(c-b\cos A)^2+b\cos^2A-\delta^2+r_1^2=0.$$

Заменив b, c, δ и r_1 их выражениями через R, мы получим:

$$-8R^2\cos A.SnB.snC+4\frac{R^2\cos^2A}{Sn^2A}(SnC-SnB\cos A)^2+b^2\cos^2A-\delta^2+r_1^2=0$$

или

$$-8R^2\cos A snB.snC+4R^2\cos^2A.\cos^2B+4R^2\cos^2A sn^2B+4R^2\cos A.\cos B.\cos C+$$
$$+4R^2\cos A.snB snC=0$$

по приведении подобных членов находим:

$$4R^2\cos^2A + 4R^2\cos A(\cos B\cos C - \sin B \operatorname{sn} C) = 0 \text{ или}$$

$$4R^2\cos^2A + 4R^2\cos A.\cos(180 - A) = 0, \text{ т.е. } 4R^2\cos^2A - 4R^2\cos^2A = 0.$$

Условие удовлетворяется.

Аналогично покажем, что прямая (224) проходит через $C(b\cos A,\ b\operatorname{sn} A)$

Условием такого прохождения будет:

$$-2b^2\cos^2A - 2bc\cos A + 2b^2\cos^2A + \operatorname{ctg}^2A(c - b\cos A)^2 + b^2\cos^2A - \delta^2 + r_1^2 = 0,$$

или по приведении подобных членов:

$$\operatorname{ctg}^2A(c - b\cos A)^2 + b^2\cos^2A - \delta^2 - r_1^2 = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (225)$$

так как $2bc\cos A = 2r_1^2$ [на основании формул (204) и (212)].

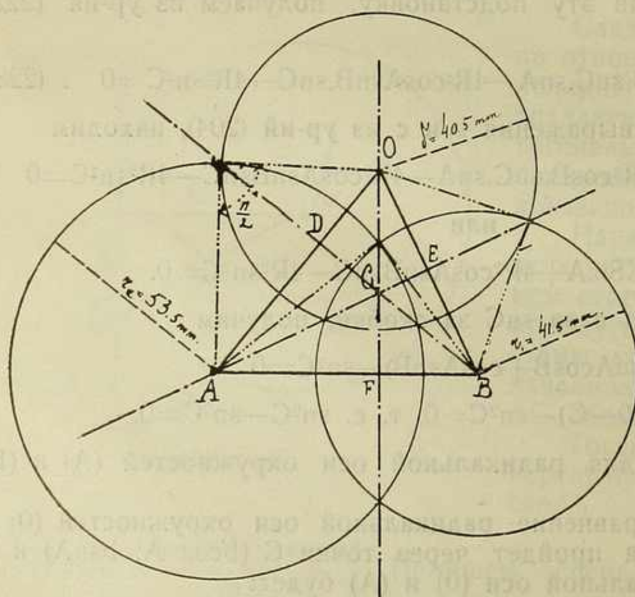
Заменив в (225) c b δ и r_1 их выражениями, а snC через Sn(A+B) и сократив результат на $4R^2$, мы получим:

$$\cos^2A\cos^2B + \cos^2A\operatorname{Sn}^2B + \cos A.\cos(B + C) = 0, \text{ или}$$

$$\cos^2A + \cos A\cos(180 - A) = 0, \text{ т. е. } \cos^2A - \cos^2A = 0.$$

Предложение (3) относительно радикальной оси (0) и (А) доказано.

Совершенно таким же образом доказывается, что радикальная ось (0) и (В) пройдет через А и С.



Чертеж 50

4) Так как радикальными осями каждой пары окружностей служат (см. черт. 50) высоты треугольника АОВ, то можно сказать, что все четыре упомянутые окружности имеют общий радикальный центр—ортоцентр треугольника АОВ.

На чертеже 50 для треугольника АВС со стороною АС=47mm и углами А=26° В=39° и С=115°, вычислено по формулам (211 — 214) при помощи логарифмических таблиц радиусы тех окружностей, по отношению к которым Т-ки АВС, АСО и ОСВ автополярны δ=40,5 mm; r_1=41,5 mm. r_2=53,5 mm. Окружность, по отношению к которой автополярен ТкАОВ, будет мнимая, ибо треугольник АОВ—остроугольный. Окружности—ортогональны.

§ 34. В § 28 было показано, что О—центр постоянной окружности служит центром аналлагматической инверсии. В этом же нетрудно убедиться при помощи формул инверсии $x = \frac{\delta^2 x'}{x'^2 + y'^2}$ и $y = \frac{\delta^2 y'}{x'^2 + y'^2}$)

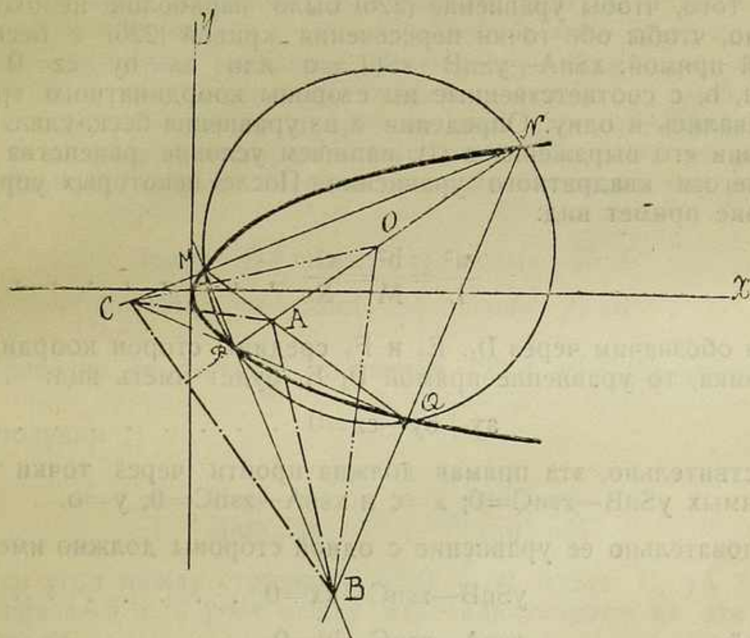
Раньше же мы показали, что вообще циркулярная кривая имеет четыре центра аналлагматической инверсии.

Можно показать, что вершины Т-ка ABC (черт. 51), образованного пересечением диагоналей полного четыреугольника MNPQ, полученного по парным соединениям точек пересечения фокальной параболы (§ 28 гл. 2) и постоянной окружности 0, суть также центры аналлагматической инверсии циркулярной кривой, образованной по способу, указанному в §§ 28 и 29, причем модулями инверсии будут r_1 r_2 и r_3 (см. § 33). Четвертый центр 0 будет ортоцентром треугольника ABC.

Треугольник ABC автополярен для всех кривых пучка с центрами MNPQ (см. черт. 47) следовательно и для окружности 0.

Этим доказывается, что 0 есть ортоцентр Т-ка ABC.

Так как 0 есть центр инверсии с модулем δ, то $0B.0D=\delta^2 0C.0E=\delta^2$ и $0A.0F=\delta^2$.



Чертеж 51

Радиусы окружностей: B—r_2; A—r_1 и C—r_3.
На основании § 33 имеем:

$$r_1^2+\delta^2=0A^2$$
$$r_2^2+\delta^2=0B^2$$
$$r_3^2+\delta^2=0C^2$$

Подставив выражение δ^2 из последнего равенства во второе из предыдущих равенств, мы получим:

$$0C.0E=0C^2-r_3^2 \qquad \text{или} \qquad 0C(0C-0E)=r_3^2.$$

Окончательно получим: $0C.CE=r_3^2$.
Аналогичным путем найдем:

$$B0.BD=r_2^2 \quad \text{и}$$
$$A0.AF=r_1^2$$

Теорема доказана.

§ 35. Укажем еще одно свойство окружности 9 точек Эйлера для треугольников с вершинами в центрах аналлагматической инверсии

циркулярной кривой: *Общая окружность девяти точек, треугольников, образованных путем соединения каких-либо трех центров аналлагматической инверсии циркулярной кривой, проходит через фокус фокальной параболы кривой (особенный фокус циркулярной кривой).*

Для доказательства этого предложения воспользуемся трилинейными координатами, приняв автополярный треугольник за координатный § 31).

Так как треугольник, полученный от соединения трех центров инверсии, будет автополярным для окружности, имеющей центр в четвертой точке, то уравнение параболы будет иметь вид:

$$Lx^2+My^2+Nz^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (226)$$

Для того, чтобы уравнение (226) было параболой, необходимо и достаточно, чтобы обе точки пересечения кривой (226) с бесконечно удаленной прямой: $x\mathrm{Sn}A+y\mathrm{Sn}B+z\mathrm{Sn}C=o$ или $ax+by+cz=0$ [A, B и C углы, a, b, c соответственные им стороны координатного треугольника] сливались в одну. Определив z из уравнения беск.-удал. прямой и подставив его выражение в (1), напишем условие равенства корней получившегося квадратного уравнения. После некоторых упрощений это условие примет вид:

$$\frac{a^2}{L}=\frac{b^2}{M}=\frac{c^2}{N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (227)$$

Если обозначим через D_1, E_1 и F_1 средины сторон координатного треугольника, то уравнение прямой D_1E_1 будет иметь вид:

$$ax+by-cz=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (228)$$

Действительно, эта прямая должна пройти через точки пересечения прямых $y\mathrm{Sn}B-z\mathrm{sn}C=0$; $x=c$ и $x\mathrm{sn}A-z\mathrm{sn}C=0$; $y=o$.

Следовательно ее уравнение с одной стороны должно иметь вид:

$$y\mathrm{Sn}B-z\mathrm{sn}C-kx=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (229)$$

а с другой:

$$x\mathrm{sn}A-z\mathrm{sn}C-ly=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (230)$$

Так как уравнения (229) и (230) должны изображать одну и ту же прямую и коэффициенты при z у них равны, то равны и остальные коэффициенты соответственно, т. е.

$$l=-\mathrm{Sn}B \text{ и } k=-\mathrm{Sn}A$$

След. искомая прямая имеет уравнением:

$$x\mathrm{sn}A+y\mathrm{sn}B-z\mathrm{sn}C=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (231)$$

Заменив snA, snB и snC в уравнении (231) пропорциональными им a b c, мы и получим уравнение ее в форме

$$ax+by+cz=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (232)$$

Условие, чтобы прямая (232) касалась параболы (226), будет то же самое (227), которое должно уже быть выполнено раньше.

Аналогично можно показать, что и прямые E_1F_1 $(by+cz-ax=o)$ и F_1D_1 $(ax-by+cz=o)$ также касаются параболы (226).

Отсюда выходит, что парабола (226) касается сторон треугольника $D_1E_1F_1$ имеющего вершины в срединах сторон координатного треугольника ABC.

Окружность девяти точек Т-ка ABC, как было показано выше, пройдет через точки $D_1E_1F_1$ т. е. будет описана около Т-ка D_1E_1F.

Остается только показать, что окружность, описанная около трех касательных к параболе, проходит через фокус ее.

§ 36. Напишем уравнение в окружности, описанной около треугольника, составленного тремя касательными к параболе.

Уравнение кривой 2-го порядка, описанной около Т-ка, стороны которого выражаются уравнениями (в сокращенной форме) $x=o$; $y=o$

$z=o$ будет: $$lyz+mzx+nxy=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (233)$$

Действительно, уравнение (233) выражает кривую 2-го порядка, проходящую через вершины треугольника, ибо оно удовлетворяется каждым из положений: 1) $x=0$; $y=0$; 2) $y=0$; $z=0$; 3) $z=0$; $x=0$.

Для того, чтобы уравнение (233) представляло окружность, подставим в него вместо x: $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p$, вместо y $x\cos\beta+y\,\mathrm{sn}\,\beta-p_1$; вместо z $x\cos\gamma+y\,\mathrm{sn}\,\gamma-p_2$ и приравняв друг другу коэффициенты при x^2 и y^2, а коэффициенты при $xy=0$, (система координат предполагается прямоугольной), получим после несложных выкладок следующие два условия:

$$l\cos(\beta+\gamma)+m\cos(\gamma+\alpha)+n\cos(\alpha+\beta)=0 \quad \ldots\ldots \quad (234)$$

$$l\sin(\beta+\gamma)+m\sin(\gamma+\alpha)+n\sin(\alpha+\beta)=0 \quad \ldots\ldots \quad (235)$$

Определив из системы уравнений (235) и (235) отношения $\frac{m}{l}$ и $\frac{n}{l}$, получим

$$\frac{m}{l}=\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin(\beta-\gamma)} \qquad \frac{n}{l}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\beta-\gamma)} \quad \ldots\ldots \quad (236)$$

Если угол между сторонами $x=0$; $y=0$ будет C, то $\sin(\alpha-\beta)=$ $=\sin C$, ибо $\alpha-\beta$ есть угол между перпендикулярами на эти стороны. Точно также

$$\sin(\beta-\gamma)=\sin A \quad \text{и}$$

$$\sin(\gamma-\alpha)=\sin B \quad \ldots\ldots\ldots \quad (236a)$$

Заменив в уравнении (233) l m и n им пропорциональными $\mathrm{sn}(\beta-\gamma)$ $\mathrm{sn}(\gamma-\alpha)$ и $\sin(\alpha-\beta)$ и приняв во внимание соотношения (236), получим уравнение окружности, описанной около треугольника, составленного касательными к параболе (233) в таком виде:

$$yz\,\mathrm{sn}A+zx\,\mathrm{sn}B+xy\,\mathrm{sn}C=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (237)$$

Написав вместо x y и z их полные выражения: $x\cos\alpha+y\,\mathrm{sn}\,\alpha-p$ и т. д., вычислим свобод. член уравнения (237). Он будет, как нетрудно вычислить, равен следующему выражению:

$$-p_1p_2\,\mathrm{sn}A-pp_2\,\mathrm{sn}B-pp_1\,\mathrm{sn}C$$

или в силу формул (236а):

$$-[p_1p_2\sin(\beta-\gamma)+p.p_2\sin(\gamma-\alpha)+pp_1\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta)] \quad \ldots \quad (238)$$

Возьмем начало прямоугольной Декартовой системы координат, к которым отнесена кривая (237) после ее преобразования, в фокусе

параболы, тогда, как известно, если $x=0$ касательная к этой параболе; $p=\frac{m}{\cos\alpha}$ и аналогично $p_1=\frac{m}{\cos\beta}$, а $p_2=\frac{m}{\cos\gamma}$, если $y=0$ и $z=0$ также касательны к параболе, у которой $p=2m$.

В таком случае выражение (238) получает следующий вид:

$$\frac{-m^2}{\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma}[\sin(\beta-\gamma).\cos\alpha+\sin(\gamma-\alpha)\cos\beta+\sin(\alpha-\beta)\cos\gamma] \quad (239)$$

Трехчлен, стоящий в квадратных скобках, выражения (239), тождественно равен 0, в чем легко убедиться по раскрытии простых скобок.

Таким образом доказано, что окружность, проходящая через вершины треугольника, составленного тремя касательными к параболе, проходит через начало координат, т. е. через фокус параболы.

Это же предложение может быть доказано и чисто геометрическим путем. См. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, Neunte Auflage, Berlin 1922, Erster Teil, § 212, S. 396.

§ 3. В заключение 2-й главы укажем еще одно свойство директрисс каждой из фокальных парабол циркулярной кривой 3-го порядка. Это свойство выражается следующей теоремой:

Директриссы четырех фокальных парабол проходят соответственно через центры четырех окружностей, описанных около четырех треугольников, образованных соединением центров инверсии циркулярной кривой.

Уравнение параболы, отнесенной к автополярному треугольнику, будет:

$$l\alpha^2+m\beta^2+n\gamma^2=0$$

при условии:

$$\frac{a}{l}+\frac{b^2}{m}+\frac{c^2}{n}=0$$

a, b и c длины сторон координатного Т-ка ABC.

Уравнение поляры полюса $(\alpha_0\beta_0\gamma_0)$ будет:

$$l\alpha\alpha_0+m.\beta\beta_0+n\gamma\gamma_0=0.$$

Координаты фокуса параболы:

$$\left\{\frac{m+n}{a}, \frac{n+l}{b} \quad \frac{l+m}{c}\right\}$$

Уравнение директриссы, как поляры фокуса, будет:

$$\frac{l(m+n)}{a}.\alpha+\frac{m(n+l)}{b}.\beta+\frac{n(l+m)}{c}.\gamma=0.$$

Координаты центра окружности, описанной около координатного треугольника, пропорциональны cosA, cosB и cosC.

Центр описанной окружности лежит в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из средин сторон Т-ка.

Уравнение двух из таких перпендикуляров:

$$\alpha.\mathrm{sn}A-\beta\,\mathrm{sn}B+\gamma.\mathrm{sn}(A-B)=0 \quad \ldots\ldots \quad (240)$$

$$\beta\,\mathrm{sn}B-\gamma.\mathrm{sn}C+\alpha.\sin(B-C)=0 \quad \ldots\ldots \quad (241)$$

Из (240) и (241) находим:

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\operatorname{sn}C-\sin(A-B)}{\operatorname{sn}A+\sin(B-C)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (242)$$

$$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\sin(A-B).\sin(B-C)+\operatorname{sn}A\operatorname{sn}C}{\operatorname{sn}B[\operatorname{sn}A+\sin(B-C)]} \quad \ldots\ldots \quad (243)$$

Из (242) и (243) находим, что:

$$\frac{\alpha}{\operatorname{sn}C-\operatorname{sn}(A-B)}=\frac{\beta}{\dfrac{-\operatorname{sn}(A-B).\operatorname{sn}(B-C)+\operatorname{sn}A\operatorname{sn}C}{\operatorname{sn}B}}=$$

$$=\frac{\gamma}{\operatorname{sn}(A)+\operatorname{sn}(B-C)}$$

или

$$\frac{\alpha}{\operatorname{sn}(A+B)-\operatorname{sn}(A-B)}=\frac{\beta}{\dfrac{-\operatorname{sn}(A-B)\operatorname{sn}(B-C)+\operatorname{sn}(A+B).\operatorname{sn}(B+C)}{\operatorname{sn}B}}=$$

$$=\frac{\gamma}{\operatorname{sn}(B+C)+\operatorname{sn}(B-C)}$$

Заменив разность и сумму sin их выражениями через произведения, а произведения sin—половиной разности косинусов, мы придадим последним соотношениям такую форму:

$$\frac{\alpha}{2\cos A\operatorname{sn}B}=\frac{\beta}{2\cos B.\operatorname{sn}B}=\frac{\gamma}{2\cos C.\operatorname{sn}B}$$

по сокращении на $\frac{1}{\operatorname{sn}B}$ окончательно получаем:

$$\frac{\alpha}{\cos A}=\frac{\beta}{\cos B}=\frac{\gamma}{\cos C} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (244)$$

Напишем условие, чтобы директрисса фокальной параболы прошла через центр окружности, описанной около ее автополярного треугольника.

Это условие будет иметь такой вид:

$$l(m+n)\frac{\cos A}{\operatorname{sn}A}+m(n+l)\frac{\cos B}{\operatorname{sn}B}+n(l+m)\frac{\cos C}{\operatorname{sn}C}=0 \quad . \quad (245)$$

a b и c в уравнении директриссы заменены пропорциональными им выражениями snA, snB и snC из (244)

Уравнение (245) можно переписать таким образом:

$$lm(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B)+mn(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)+nl(\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}A)=0 \quad . \quad (246)$$

Заменив суммы ctg, найдем:

$$\frac{lm\sin(A+B)}{\operatorname{sn}A\operatorname{sn}B}+\frac{mn\operatorname{sn}(B+C)}{\operatorname{sn}B.\operatorname{sn}C}+\frac{nl\sin(C+A)}{\operatorname{sn}C\operatorname{sn}A}=0 \quad \ldots \quad (247)$$

Заменив в уравнении (247) sn(A+B), sn(B+C и sn(C+A) через snC snA и snB, а затем sin пропорциональными им количествами a, b c, мы получим:

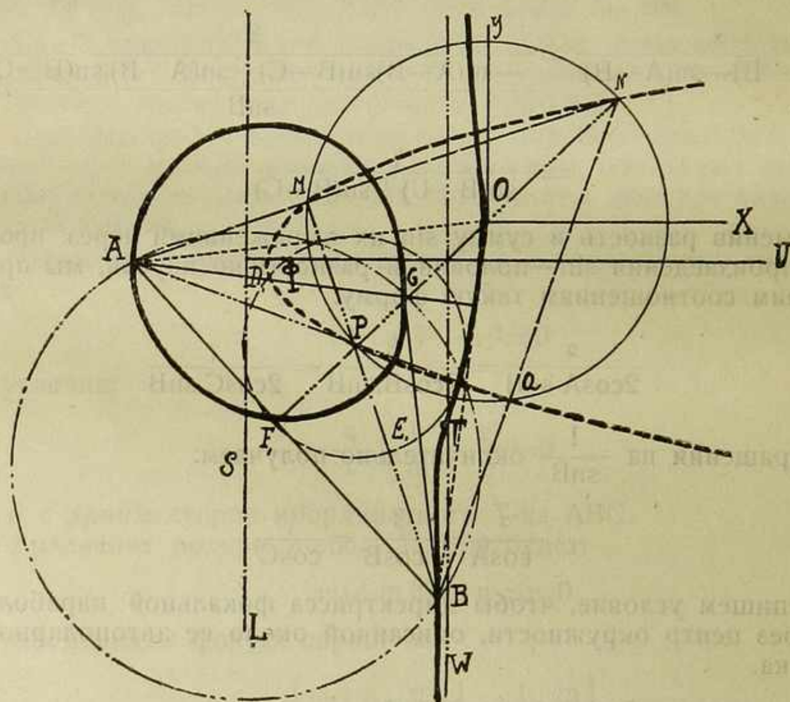
$$\frac{lmc}{ab}+\frac{mna}{bc}+\frac{nlb}{ac}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (248$$

Умножив все члены условия (248) на abc и разделив затем на lmn, мы можем переписать условие (248) в такой форме:

$$\frac{a^2}{l}+\frac{b^2}{m}+\frac{c^2}{n}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (249)$$

Соотношение (249) есть ни что иное как соотношение второе настоящего §. Оно всегда выполняется, если фокальная кривая есть парабола, как это имеет место в нашем случае.

Теорема таким образом доказана.



Чертеж 52

На чертеже 52 начерчена циркулярная кривая при $a=-10$; $b=-2$ $p=2$ и $\beta=9$ [см. уравнение (190) § 29].

Ее уравнение будет:

$$x(x^2+y^2)+22x^2+4xy+2y^2+81x=0.$$

Она построена по точкам. Ввиду того, что $\delta\neq0$ кривая не имеет, согласно § 29, двойной точки и состоит из овала и бесконечной ветви.

Фокальная парабола:

$$(y+2)^2=4(x+11)$$

начерчена пунктиром.

Постоянная окружность начерчена сплошной линией.

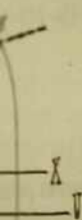
M,N,P и Q точки пересечения параболы и окружности δ. Полярным треугольником будет Т-к ABC. О его ортоцентр. Пунктиром начерчен круг 9 точек автополярного треугольника ABC. Этот круг проходит через точки D_1 E_1 и F_1 средины сторон Т-ка ABC.

Согласно § 35 окружность 9 точек пройдет и через фокус Ф фокальной параболы. Точка Ф является вместе с тем и особенным фокусом циркулярной кривой.

KL—директрисса фокальной параболы проходит через точку S—центр окружности, описанной около автополярного треугольника ABC.

Эта окружность начерчена пунктиром с двумя точками. Бесконечная ветвь циркулярной кривой касается оси 0У в начале координат.

A,0,B и C вершины циркулярной кривой. Касательные к ней в этих точках параллельны вещественной ассимптоте кривой VW. T главная точка циркулярной кривой.



ГЛАВА III

Проективные свойства циркулярных кривых

§ 1. Циркулярные кривые в области кривых 3-го порядка играют роль, аналогичную окружности в области конических сечений.

Как известно, все кривые 2-го порядка могут быть получены, как сечения прямого кругового конуса соответственным образом направленными плоскостями. Другими словами все кривые 2-го порядка можно рассматривать как перспективу окружности.

§ 2. Укажем в общих чертах основания теории конической проекции или перспективы.

Если какая-нибудь кривая C начерчена на некоторой плоскости P и если из какой-нибудь точки пространства S как вершины опишем коническую поверхность, имеющую своей направляющей данную кривую C, то всякая кривая C_1 пересечения полученной конической поверхности с произвольной плоскостью P_1 называется конической проекцией кривой C на плоскость P_1 или перспективой кривой C на плоскости P_1.

Теория проекций представляет собою могущественный метод для получения различных свойств кривых при помощи свойств кривых более простого вида.

Точки M иM_1, лежащие на одной образующей конуса, называются соответственными. Центральной проекцией точки M будет таким образом соответственная ей точка M_1.

Проекцией какой-либо прямой служит очевидно другая прямая. Если какая-либо прямая L пересекает кривую C в$_1$ n точках M_1 M_2. M_n, то ее проекция L_1 пересечет проекцию, кривой C_1 в n соответственных точек M_1^1 $M_2^1 \ldots M^1_n$.

Так как каждая прямая пересекает кривую n-го порядка в n точках (вещественных или мнимых), то отсюда следует, что коническая проекция кривой n-го порядка есть также кривая n-го порядка.

Точно также касательная к кривой проектируется в касательную к ее проекции.

При помощи элементарной геометрии можно показать, что проекция △-ка на параллельную плоскость дает △-к, подобный данному: Так как каждая кривая может быть рассматриваема как предел периметров многоугольников, то отсюда заключаем, что центральная проекция кривой на параллельную плоскость есть кривая, подобная данной.

Возьмем две произвольные плоскости P и P_1, пересекающиеся по прямой KN. (черт. 53). Пусть точки плоскости P проектируются на плоскость P_1 из какой-нибудь точки пространства S.

Проекцию произвольной прямой AB плоскости P на P_1 мы получим, спроектировав какие-нибудь две ее точки.

Прямая A^1B^1 должна пройти через точку Z пересечения прямой AB и KN, Точка Z есть сама себе соответствующая. При удалении точки B вправо точка B будет также изменять свое положение на P_1.

Если B уйдет на ∞, то ее проекцией будет точка U^1 пересечения плоскости P_1 с лучем $SU_1 // AB$. При удалении точки B на ∞ в обратном направлении (влево) ее проекция снова совпадет с U^1.

Итак. бесконечно удаленные элементы прямой отображаются в одной точке.

Проекцию AB можно строить по проекциям Z и U^1, прямая ZN^1 и будет очевидно проекцией прямой AB.

Если на плоскости P возьмем ряд параллельных прямых: AB, CD GH, то им соответствует один и тот же луч, исходящий из S.

Следовательно изображения этих прямых пройдут через одну и ту же точку U^1, соответствующую бесконечно удаленной.

Чертеж 53

Следовательно, параллельные прямые пересекаются в одной бесконечно удаленной точке.

Возьмем на плоскости P еще какую-нибудь прямую RT (ее проекцией будет R^1T^1); бесконечно удаленная точка RT получится в пересечении луча $SU'' // RT$.

Отсюда заключаем, что бесконечно удаленные точки плоскости P проектируются по одной прямой EF пересечения плоскости P_1 с плоскостью, проходящею через точку S // плоскости P.

Таким образом, все бесконечно удаленные элементы плоскости P отображаются по некоторой прямой на плоскости P_1.

§ 3. Рассмотрим теперь вопрос о центральной проекции с аналитической точки зрения.

Возьмем снова две плоскости P и P_1. Пусть xy будут Декартовы координаты точек плоскости P относительно осей, расположенных в этой плоскости, а X и У такие же координаты точек плоскости P_1. Если мы зададим условие, чтобы каждой точке плоскости P соответствовала одна определенная точка плоскости P_1 и обратно, то координаты XУ должны быть однозначными функциями xy и обратно.

Если каждой прямой плоскости P соответствует прямая на плоскости P_1, то плоскости P и P_1 называются в этом случае *гомографическими* или *находящимися в проективном соответствии.* Аналитически задача определения формул проективного соответствия двух плоскостей сводится к определению двух независимых друг от друга функций X и У от независимых переменных x и y под тем условием, чтобы всякому линейному соотношению:

$$lx + my + n = 0$$

между x и y соответствовало линейное же соотношение $LX + MУ + N = 0$ между X и У.

[Задачей этой занимались: акад. А. А. Марков, к вопросу о черчении карт СПБ. 1888 и Chatenet Nouw. Ann. Math 1886].

В результате решения этой задачи получаются следующие формулы, выражающие проективную зависимость между двумя плоскостями

$$X=\frac{a^1x+b^1y+c^1}{\alpha x+\beta y+\gamma} \text{ и } У=\frac{a''x+b''y+c''}{\alpha x+\beta y+\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

коэффициенты a^1, b^1, c^1, a'', b'', c'', α, β и γ произвольны.

Не нарушая общности вопроса, мы можем все члены числителей и знаменателей формул (1) разделить на один из коэффициентов, напр. на α, и тогда формулы проективного преобразования примут вид:

$$X=\frac{ax+by+c}{x+py+q};\quad У=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{x+py+q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

После этого преобразования в формулах проективного соответствия двух плоскостей будет входить 8 коэффициентов.

Следовательно гомографическое положение вполне определяется *четырьмя парами соответственных точек.*

Мы будем иметь в этом случае 8 уравнений вполне достаточных для определения восьми коэффициентов формул проективного преобразования (2).

Можно и наоборот, исходя из формул (1) показать (простой подстановкой), что в случае проективного преобразования прямая на одной из таких плоскостей переходит в прямую же на другой P_1.

Ввиду этого некоторые авторы называют проективное соответствие *коллинеарным*, желая подчеркнуть этим взаимное соответствие прямых линий обеих плоскостей.

§ 4. Укажем теперь весьма важную теорему относительно гомографической зависимости двух плоскостей: „*всякое гомографическое преобразование кривой по формулам* (2) *представляет перспективу этой кривой*“.

Заметим прежде всего, что соотношения (2) могут быть переписаны в таком виде:

$$X=\beta\left[\frac{x\cos\alpha-y\sin\alpha+L}{x+py+q}+X_0\right]$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$У=\beta\left[\frac{x\sin\alpha+y\cos\alpha+K}{x+py+q}+У_0\right]$$

Действительно, для тождественности формул (2) и (3) необходимо и достаточно, чтобы

$$(\beta\cos\alpha+X_0)=a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$(\beta\sin\alpha+У_0)=a_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\beta(pX_0-\sin\alpha)=b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\beta(pУ_0+\cos\alpha)=b_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\beta(h+qX_0)=c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$\beta(k+qУ_0)=c_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Умножив (4) на p и вычтя из полученного произведения (6), найдем

$$ap-b=\beta\,(p\cos\alpha+\sin\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Поступив таким же образом с (5) и (7), получим,

$$a_1p-b_1=\beta\,(p\sin\alpha-\cos\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Из (10) и (11) находим соответственные значения α и β.

Определив α и β из уравнений (4) и (5), найдем X_0 и $У_0$ и, наконец, уравнения (8) и (9) дают значения h и k.

Сделаем далее замену координат в плоскости P (x_1 y), положив в формулах (3)

$$h + x\cos\alpha - y\sin\alpha = x_1 \quad \ldots \quad (12)$$

$$k + x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_1 \quad \ldots \quad (13)$$

Тогда формулы (3) примут следующий вид:

$$X = \frac{x_1}{a^1x_1 + b^1y_1 + c^1} + X_0^1 \quad \ldots \quad (14)$$

$$У = \frac{y_1}{a^1x_1 + b^1y_1 + c_1} + У_0^1 \quad \ldots \quad (15)$$

В формулах (14) и (15) коэффициенты a^1 b^1 c^1 X_0^1 и $У_0^1$ легко выражаются через старые коэффициенты. Самого вычисления мы не производим, потому что эти выражения новых коэффициентов через старые нам не понадобятся.

Положим далее в формулах (14) и (15)

$$\left.\begin{aligned} a^1 &= \lambda\cos\alpha_1 \\ b^1 &= \lambda\cos\beta_1 \\ c^1 &= \lambda\cos\gamma_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (16)$$

Тогда формулы (14) и (15) перепишутся таким образом:

$$X = \frac{\frac{1}{\lambda}y_1}{x_1\cos\alpha_1 + y_1\sin\alpha_1 + l} + X_0^1 \quad \ldots \quad (17)$$

$$У = \frac{\frac{1}{\lambda}y_1}{x_1\cos\alpha_1 + y_1\sin\alpha_1 + l} + У_0^1 \quad \ldots \quad (18)$$

Еще раз изменим координатные оси в плоскости P (x,y) по формулам:

$$x_1\cos\alpha_1 + y_1\sin\alpha_1 + l = x_2 \quad \ldots \quad (19)$$

$$-x_1\sin\alpha_1 + y_1\cos\alpha_1 = y_2 \quad \ldots \quad (20)$$

Из системы уравнений (19) и (20) находим:

$$x_1 = (x_2 - l)\cos\alpha_1 + y_2\sin\alpha_1 \quad \ldots \quad (21)$$

$$y_1 = (x_2 - l)\sin\alpha_1 + y_2\cos\beta_1 \quad \ldots \quad (22)$$

Формулы (17) и (18) тогда принимают вид:

$$X = \frac{(x_2 - l)\cos\alpha_1 - y_2\sin\alpha}{\lambda x_2} + X_c^1 \quad \ldots \quad (23)$$

$$Y = \frac{(x_2 - l)\sin\alpha + y_2\cos\alpha_1}{\lambda x_2} + Y_c^1 \quad \ldots \quad (24)$$

Изменим наконец координаты XY в плоскости P_1 по формулам:

$$X = X_0^1 + \frac{\cos\alpha_1}{\lambda} - X_2\cos\alpha - Y\sin\alpha_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$Y = Y_0^1 + \frac{\sin\alpha_1}{\lambda} - X_2\sin\alpha_1 + Y_2\cos\alpha_1 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Подставив выражения X и Y из формул (25) и (26) в формулы (23) и (24), мы получим:

$$X_2\cos\alpha_1 + Y_2\sin\alpha_1 = \frac{l\cos\alpha_1 + y_2\sin\alpha_1}{\lambda x_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

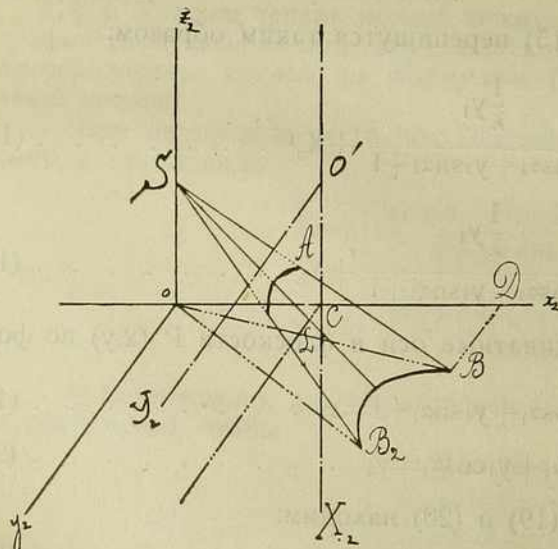
$$X_2\sin\alpha_1 - Y_2\cos\alpha_1 = \frac{l\sin\alpha_1 - y_2\cos\alpha_1}{\lambda x_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Из формул (27) и (28) окончательно получаем

$$X_2 = \frac{l}{\lambda x_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

$$Y_2 = \frac{y_2}{\lambda x_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Такой вид получают формулы, выражающие проективное соотношение между двумя плоскостями после двукратного преобразования координат *xy* в плоскости P и однократного преобразования координат XY в плоскости P_1.



Чертеж 54

Остается теперь показать, что формулы (29) и (30) выражают перспективу плоскости P на плоскости P_1.

Возьмем систему прямоугольных Декартовых координат (черт. 54) $0x_2y_2z_2$ и систему осей $0^1X_2Y_2$ в плоскости, перпендикулярной к оси $0x_2$ первой системы. Плоскость y_20x_2 примем за плоскость P, а плоскость $X_20^1Y_2$ за плоскость P_1.

Рассмотрим коническую поверхность с вершиною в точке S на оси $0z_2$, и пусть A и B будут соответственные точки на одной и той же образующей конуса S. Точка A и будет тогда перспективой на P_1 точки B, лежащей на P. Кривая AA_2, начерченная пунктиром, есть перспектива кривой BB_2, начерченной сплошной линией.

Возьмем точку 0^1 в плоскости z_20x_2 так, чтобы $0^1C = 0S$ и $0^1C = 0z_2$ и выберем 0^1X_2 совпадающей с 0^1C; тогда 0^1Y_2 будет // $0y_2$. Через точку A про-

[1]) Проективное соответствие двух плоскостей не зависит от угла наклонения между ними. Подобие Т-ков сохраняется и в том случае, если P не $\perp$ к P_1. Систему осей $0x_2y_2z_2$, можно взять и косоугольной.

ведем прямую // 0^1C. Она пересечет $0^1У_2$ в некоторой точке K, а прямую 0B в точке L. (²) Прямая $LC//0У_2$, а следовательно // $0y_2$ и $\perp$ к $0x_2$.

Через точку B проведем наконец BD//LC. Из чертежа видно, что координатами точки B будут $x_2=0D$; $y_2=BD$. Координатами точки A будут

$$У_2=0^1K=LC \text{ и}$$

$$X_2=KA=KL-AL.$$

Найдем зависимость между координатами точек A и B.

Из подобия Т-ков 0SB и ALB и Т-ков 0LC и 0BD получаем:

$$\frac{AL}{0S}=\frac{BL}{0B}=\frac{CD}{0D} \text{ и } \frac{BD}{LC}=\frac{0D}{0C} \quad . \; . \; . \; . \quad (31)$$

Приняв во внимание значение входящих в пропорции (31) отрезков и обозначив 0S через l, а 0C через $\frac{1}{\lambda}$, перепишем соотношения (32) таким образом.

$$\frac{l-X_2}{l}=\frac{x_2-\frac{1}{\lambda}}{x_2} \text{ и } \frac{y_2}{У_2}=\frac{x_2}{\frac{1}{\lambda}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

Наконец соотношения (32) по упрощении могут быть переписаны в следующем виде:

$$X_2=\frac{l}{\lambda x_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

$$У_2=\frac{y_2}{\lambda x_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

Мы получили, таким образом, формулы тождественные с формулами (29) и (30).

Таким образом, *„общее проективное соответствие фигур на двух плоскостях есть ни что иное, как перспективное соответствие этих фигур, нарушенное лишь перемещением этих плоскостей в пространстве, т. е. некоторым перемещением в пространстве всегда возможно две проективные плоскости привести в перспективное положение"*.

§ 5. При проективном соответствии двух плоскостей, как сказано выше, всякой прямой L одной плоскости P(xy) соответствует прямая L_1 другой плоскости $P_1(X_1У)$. При этом, конечно, различным точкам L T соответствуют различные точки L_1. Совокупность точек на прямой называется прямолинейным рядом точек.

Рассмотрим, какое соответствие прямолинейных рядов L и L_1 устанавливает проективное соответствие двух плоскостей. Координаты можно считать прямоугольными в обеих плоскостях без нарушения общности исследования, ибо преобразование координат не нарушает проективного соответствия.

Будем определять точки на прямых L и L_1 координатами t и t_1, взяв на L за начало координат некоторую точку M_0, а на прямой L_1 — соответственную точку M_{10}.

Нетрудно убедиться, что между координатами двух соответственных точек M и M_1 существует линейное соотношение вида

$$t_1=\frac{\alpha+\beta t}{\gamma+\delta t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

(²) прямая KL пропущена на чертеже (54).

Для доказательства этого положения сделаем в обеих плоскостях такие преобразования координат (от этого, как сказано выше, проективное соответствие не нарушается) при которых прямые L и L_1 будут осями абсцисс в новых системах координат на P и P_1.

Так как между абсциссами соответственных точек плоскостей P и P_1 существует по условию соотношение:

$$x_1=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}, \quad \ldots \ldots \ldots (36)$$

где x и y коорд. некоторой точки на прямой L, а x_1 y_1 координаты соответственной точки на L_1, то это соотношение (36) сохранится и после указанного преобразования координат. Но так как в новой системе L есть ось абсцисс, то в формуле (36) надо положить $y=0$, и она получит тогда такой вид:

$$x_1=\frac{a_1x+c_1}{ax+c}, \quad \ldots \ldots \ldots (37)$$

т. е. мы будем иметь соотношение вида (35).

Формула (37) представляет собою некоторое линейное преобразование переменной x в другую переменную x_1. Если новую переменную x_1 подвергнем снова некоторому линейному преобразованию по формуле:

$$x^1=\frac{\alpha_1+\beta_1x_1}{\gamma_1+\delta_1x_1} \quad \ldots \ldots \ldots (38)$$

то можно сказать, что x^1 получается из первоначальной переменной x при помощи следующего преобразования:

$$x^1=\frac{\alpha_1+\beta_1\dfrac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}}{\gamma_1+\delta_1\dfrac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}} \quad \ldots \ldots \ldots (39)$$

Преобразование (39) также линейное, ибо его можно переписать следующим образом:

$$x^1=\frac{\alpha_2+\beta_2x}{\gamma_2+\delta_2x} \quad \ldots \ldots \ldots (40)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_2&=\alpha_1\gamma+\beta_1\alpha\\ \beta_2&=\alpha_1\delta+\beta\beta_1\\ \gamma_2&=\gamma\gamma_1+\alpha\delta_1\\ \delta_2&=\gamma_1\delta+\delta_1\beta.\end{aligned} \quad \ldots \ldots \ldots (41)$$

Если обозначим через $D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$ и через $D_1=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{vmatrix}$ и через $D_2=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{vmatrix}$, (42)

$$\text{то } D_2=-D.D_1 \quad \ldots \ldots \ldots (43)$$

Все линейные преобразования вида (37) составляют *группу*, т. е. последовательное производство над переменной двух линейных преобразований эквивалентно некоторому третьему преобразованию также линейному.

Преобразования при помощи формул (29) и (30) § 4 суть ни что иное как преобразование *Ньютона*. (См. главу 2-ую § 4).

Для того, чтобы из формул (29) и (30) получить преобразование *Ньютона*, достаточно в них положить $l=\lambda=1$.

Эти преобразования встречаются у Ньютона в I томе его „Principia“ лемма XXII.

Теория гомографических преобразований подробно рассматривается у Chales, я в его „Memoire sur deux principes generaux de la Science“.

В курсе Аналит. геометрии акад. Д. А. Граве также достаточно подробно рассматриваются вопросы, связанные с проективным соответствием двух плоскостей. [Глава XVI и дальнейшие. Д. А. Граве Ан. геом. Киев. 1911].

Доказательство теоремы о свойствах гомографического соответствия, приведенное в конце § 4, принадлежит „Texeira“. Мною сделаны лишь некоторые дополнения в подробностях изложения.

§ 6. Ньютон в своем труде: „Enumeratio linearum tertii ordinis“ показал, что все кривые 3-го порядка являются перспективой особого класса кривых 3-го же порядка, которые он назвал parabolae divergentes.

Другими словами, все кривые 3-го порядка получаются как сечения плоскостью 5 конических поверхностей. Эта теорема представляет собою обобщение соответственной теоремы о конических сечениях.

Ньютон привел свое знаменитое предложение без доказательства.

Доказательство его было дано уже после смерти Ньютона в 1731 г. Clairot и Nikol'ем в Memoire de l'Academie des Sciences de Paris.

Для доказательства достаточно показать, что всякая кривая 3-го порядка получается из parabola divergens, уравнение которой в Декартовых координатах будет:

$$y^2=ax^3+bx^2+cx+d).$$

Доказательство основано на том, что всякая кривая 3-го порядка имеет по крайней мере одну точку перегиба (вещественную).

Здесь мы не будем приводить этого доказательства, ибо теорема эта не имеет прямого отношения к нашей теме. Аналитическое доказательство содержится у Texeira. Та же теорема доказана чисто геометрическим путем у Salmon'a. [§ 195 Courbes planes]. Геометрическое же доказательство приводится у Вельмина: кривые 3-го порядка.

Уравнение parabolae divergentes может быть написано следующим образом:

$$y=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} \qquad a>o \quad . \; . \; . \; . \; . \; (44)$$

1) Если все корни ур-ия x_1 x_2 x_3 вещественны и различны, причем $x_1<x_2<x_3$, то соответствующая парабола имеет вид: 1 (черт. 55) и состоит из овала и бескон. ветви.

2) Если $x_1=x_2$, то овал обращается в изолированную точку. (Черт. 2 чер. 55).

3) Если равны два больших корня $x_2=x_3$, то кривая имеет узел (см. 3-й черт. 55).

4) Если равны все три корня, то получается так называемая полукубическая парабола с точкой возврата. (Сл. 4-й чер. 55).

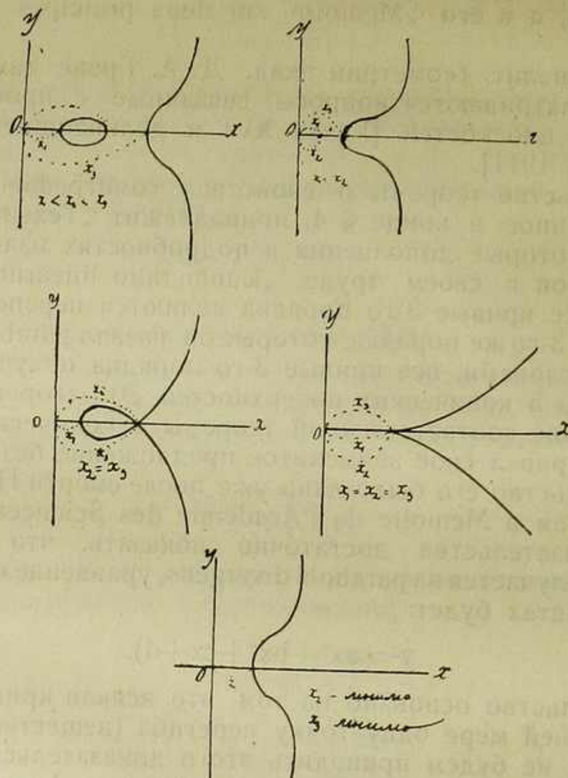
5) Если, наконец, из трех корней один веществен, а два другие мнимые, то получается кривая с изолированной точкой. [Сл. 5-й черт. 55].

§ 7. Chales показал (Aperçu historique 2-me ed.), что parabolae divergentes не являются единственным классом кривых, которые могут

представлять перспективу всех вообще кривых 3-го порядка. Такую же роль играют так называемые кривые 3-го порядка Chales. Их уравнение:

$$y = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Нетрудно показать, что parabolae divergentes получаются из кривых Шаля при помощи преобразования Ньютона.



Чертеж 55

Действительно, подставив вместо x и y в (45) их выражения по формулам Ньютона: $x = \frac{x_1}{y_1}$; $y = \frac{1}{y_1}$ мы вместо (45) получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{y_1} = \frac{ax_1^3}{y_1^3} + \frac{bx_1^2}{y_1^3} + \frac{cx_1}{y_1^3} + \frac{d}{y_1^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

По освобождении от знаменателя (46) получает вид:

$$y_1^2 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

т. е. уравнение parabolae divergentes. Теорема доказана.

След. теорема Шаля является следствием теоремы Ньютона в силу того свойства гомографического преобразования, которое указано в конце § 5.

Пяти видам кривых Шаля, так же как и пяти видам parabolae divergentes, соответствуют 5 конусов, на которых могут быть расположены все кривые 3-го порядка. [Свойства этих конусов изучал Möbius, Abhand. der. Sächs. Ges. zu Leipzig 1853 и Cayle у Transactions of the Cambridge Phil. Society 1866].

§ 8. Покажем теперь, что циркулярные кривые 3-го порядка играют роль аналогичную parabolae diverbentes и кривым Шаля, т. е. все *кривые 3-го порядка являются перспективой циркулярных кривых.*

Для доказательства этого предложения, на основании § 4, достаточно доказать, что общая кривая 3-го порядка помощью проективного преобразования может быть преобразована в циркулярную кривую. Итак, пусть нам дано уравнение некоторой кривой 3-го порядка в трилинейных координатах:

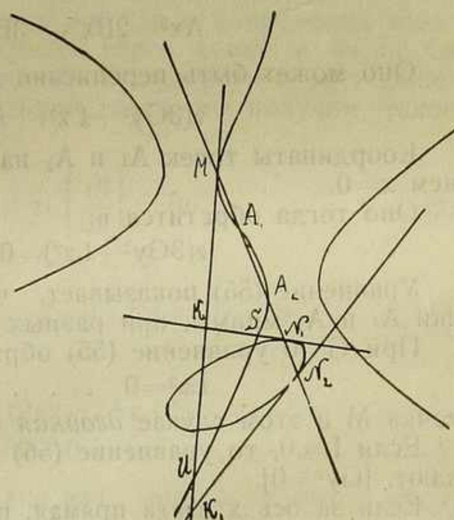
$$Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3+3Ex^2z+6Fxyz+3Gy^2z+3Hxz^2+3Kyz^2+Lz^3=0 \quad . . . . (48.$$

Координатный Δ-к взят произвольно.

Посмотрим, как изменится уравнение кривой (48), если его отнести к некоторому, специально выбранному координатному треугольнику MN_1K (черт. 56).

Возьмем за ось z касательную MK к данной кривой (48) в некоторой точке M, за ось x примем какую-нибудь прямую, проходящую через точку M. Эта прямая, вообще говоря, пересечет кривую (48) в двух точках A_1 и A_2.

Примем, наконец, за ось y касательную к первой поляре кривой (48). [См. § 6 глава II] в одной из точек ее пересечения с прямой MA_1 A_2, например в точке N_1.



Чертеж 56

При таком выборе осей трилинейных координат некоторые из коэффициентов уравнения (48) обратятся в нуль, и уравнение кривой получит более простой вид.

Действительно, если в уравнении кривой (48) положим z=0, то мы найдем, таким образом, координаты точек пересечения прямой z=0 с кривой (48).

Но так как прямая z=0 по условию касательная к кривой (48), то мы должны получить, таким образом, координаты точек M (двойной корень) и U.

Координаты точки M будут x=o, z=0, в этой точке совпадают два значения x. Следовательно уравнение:

$$Ax^3+3Bx^2y+Cxy^2+Dy^3=0 \quad . . . . (49)$$

должно иметь двойной корень x, равный 0.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы C=0 и D=0.

Уравнение первой поляры кривой (48) относительно полюса $(x_1\ y_1\ z_1)$, как известно, будет:

$$\frac{\partial f}{\partial x}x_1+\frac{\partial f}{\partial y}y_1+\frac{\partial f}{\partial z}z_1=0 \quad . . . . (50)$$

где f(xyz)=0 символическое обозначение уравнения (48) [§ 6 глава 2-я]

Уравнение поляры точки M ($x=o$, $z=o$) будет:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0, \text{ т. е.}$$

$$Bx^2+2Cxy+Dy^2+2Fxz+2Gyz+Kz^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Положив в уравнении (51) $y=0$, мы должны получить координаты точек S и N_1 или (S_1 и N_2), но N_1 (или N_2) есть точка касания (ее координаты $x=o$; $y=o$).

Следовательно, по аналогии со сказанным выше, уравнение

$$Bx^2+2Fxz+KZ^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

должно иметь два значения x, равные 0, для чего необходимо и достаточно, чтобы $F=0$ и $K=0$.

Следовательно, если за координатный треугольник принять MKN_1 (или $MK_1 N_2$), то уравнение кривой (48) примет такой вид:

$$Ax^3+2Bx^2y+3Ex^2z+3Gy^2z+3Hxz^2+Lz^3=0 \quad . \; . \quad (53)$$

Оно может быть переписано в таком виде:

$$z(3Gy^2+Lz^2)+Ax^3+3Bx^2y+3Ex^2z+3Hxz^2=0. \quad . \quad (54)$$

Координаты точек A_1 и A_2 найдутся из уравнения (54), положив в нем $x=0$.

Оно тогда обрᴣтится в:

$$z(3Gy^2+Lz^2)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

Уравнение (55) показывает, что если G и L одного знака, то точки A_1 и A_2 мнимы, при разных знаках L и G—вещественны.

При $G=0$ уравнение (55) обращается в:

$$Lz^3=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

и точка M в этом случае *двойная* [глава I, § 22].

Если $L=0$, то уравнение (56) показывает, что точки A_1 и A_2 совпадают. [$Gy^2=0$].

Если за ось x взята прямая, пересекающая кривую в двух различных точках, то $L\neq0$, и мы можем сделать преобразование координат в уравнении (54) по формулам:

$$x_1=\frac{z}{x} \text{ и } y_1=\frac{y}{x}\sqrt{\frac{3G}{L}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

После такого преобразования уравнение (54) перепишется так:

$$x_1(x_1^2+y_1^2)+A_1+B_1y_1^2+E_1x_1+H_1x_1^2 \quad \ldots\ldots \quad (58)$$

Коэффициенты:

$$A_1=\frac{A}{L}\,;\; B_1=\frac{B}{G}\,;\; E_1=\frac{3E}{L}\,;\; H_1=\frac{3H}{L} \quad \ldots \quad (59)$$

Уравнение (58) есть уравнение циркулярной кривой в Декартовых координатах.

Кривая (58) является *перспективой кривой* (48), ибо формулы (51) суть ничто иное, как формулы (29) и (30) § 4 главы III-ей, в которых

$$l=\lambda=\sqrt{\frac{L}{3G}} \text{ и в которых введена третья координата } z$$

(случай однородных координат).

Формулы (57) показывают, что при L и G одного знака вещественным точкам кривой (48) соответствуют вещественные же точки ее перспективы (58).

Если же L и G разных знаков, то вещественным точкам кривой (48) соответствуют мнимые точки кривой (58).

§ 8. О пучке касательных к циркулярной кривой.

Уравнение касательной к цирк. кривой $f(x,y,z)=o$ в какой-ниб. точке (x,y,z), лежащей на этой кривой, будет:

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

где (η, ν, ζ) текущие координаты касательной.

Касательная, как и всякая прямая, пересекает кривую в 3 точках, из которых две совпадают с точкой касания, а третья—всегда действительная, вообще говоря отлична от точки касания. (Гл. I § 9).

Если дана точка $x_1\ y_1\ z_1$ вне кривой, а $x\ y\ z$ координаты неизвестной точки касания прямой, проходящей через точку $x_1\ y_1\ z_1$, то уравнение касательной будет иметь вид (1). Координаты $x_1\ y_1\ z_1$ должны удовлетворять уравнению касательной, след. мы получим такое соотношение:

$$x_1 \left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\} + y_1 \left\{\frac{\partial f}{\partial y}\right\} + z_1 \left\{\frac{\partial f}{\partial z}\right\} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

В раскрытом виде:

$$f(x\ y\ z) = x^3 + xy^2 + Ax^2z + Ay^2z + Dxz^2 + Eyz^2 + Fz^3 = 0 \quad \ldots (3)$$

а ур-ие (2) : (z положено равным 1)

$$x_1(3x^2 + y^2 + 2Ax + D) + y_1\ (2xy + 2Ay + E) + Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + \\ + 2Ey + 3F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Это уравнение кривой 2-го порядка наз. *первой полярой* точки $x_1\ y_1$ относительно циркулярной кривой (см. гл. II, § 6).

Из уравнений кривой (3) $z=1$ и ее первой поляры (4) мы и определим неизвестные координаты точки касания (x и y). Коническое сечение (4) и кривая (3) вообще пересекаются в шести точках, следовательно вообще говоря из внешней точки цирк. кривой можно провести к ней шесть касательных, т. е. цирк. кривая будет, вообще говоря, шестого класса.

В зависимости от наличия и характера особенной точки кривой класс кривой, как показано было выше, может понизиться. (Гл. 2, § 3).

Можно искать поляру точки $x_1\ y_1$ и относительно кривой (4). Это будет прямая линия называемая *второй полярой* полюса $x_1\ y_1$ относительно кривой (3).

Ее уравнение будет:

$$x.(3x_1^2 + y_1^2 + 2Ax_1 + D) + y.(2x_1y_1 + 2Ay_1 + E) + Ax_1^2 + \\ + Ay_1^2 + 2Dx_1 + 2Ey_1 + 3F = 0. \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Из уравнений первой и второй поляр (4) и (5) мы сразу видим, что второе получается из первого перестановкой букв $x\ y$ и $x_1\ y_1$.

На основании этого можно высказать следующие предложения: *1) первая поляра кривой есть геометрическое место точек, вторые*

поляры которых проходят через полюс, и 2) вторая поляра кривой есть геометрическое место точек, первые поляры которых проходят через фокус.

Чтобы найти полюс некоторой данной кривой 2-го порядка относительно данной кривой 3-го порядка, достаточно провести вторые поляры двух каких-либо ее точек: точка их пересечения будет искомым полюсом.

Если полюс лежит на самой кривой 3-го порядка, то вторая поляра его будет касательной к кривой 3-го порядка в этом полюсе. Полюс же, согласно 1-й теореме настоящего §, будет находиться на первой поляре, т. е. вторая поляра будет касаться в этом случае первой поляры в полюсе, иными словами кривая 3-го порядка и ее первая поляра имеют в полюсе двойную точку *пересечения.* Остальных точек пересечения будет, таким образом, четыре.

Напишем уравнения 1-й и 2-й поляр циркуляр. кривой в сокращенном виде.

Уравнение первой поляры цирк. кривой относительно полюса x^1, y^1 будет:

$$\triangle f = x^1 . \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + y^1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + z^1 \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0 \quad . \; . \; . \quad (6)$$

Уравнение (5) второй поляры можно переписать следующим образом:

$$(3x+A).x^{12}+2y.x^1y^1+(x+A).y^{12}+2(Ax+D)x^1+2(Ay+E). \\ y^1+Dx+Ey+3F=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Если мы обозначим через

$$\triangle^2 f = x^{12} . \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} . x^1 y^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y^{12} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} x^1 + 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} y^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

то левая часть уравнения (7) может быть переписана в виде $\frac{\triangle^2 f}{2}$, и уравнение второй поляры в сокращенном виде можно написать так:

$$\frac{\triangle^2 f}{2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

что нетрудно видеть из сравнения левых частей равенств (7) и (8).

§ 9. Возьмем две точки на плоскости M (x, y, z) и M^1 (x^1, y^1, z^1) и обозначим через X, Y, Z однородные координаты точки, делящей расстояние между точками M и M^1 в данном отношении λ.

В таком случае, как известно, X, Y и Z выразятся в зависимости от координат точек M и M^1 и λ следующими формулами:

$$X = x + \lambda x^1 \\ Y = y + \lambda y^1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10) \\ Z = z + \lambda z^1$$

с изменением λ точка (X, Y, Z) движется по прямой, определяемой двумя точками M и M^1.

Уравнение циркулярной кривой в однородных координатах будет:

$$F(X_1Y_1Z)=X^3+XY^2+AX^2Z+AY^2Z+DXZ^2+EYZ^2+FZ^3=0 \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Будем искать точки пересечения прямой MM^1 с кривой (11).

Для нахождения координат точек пересечения надо совместно решить систему уравнений 10 и (11).

В результате подстановки выражений X У и Z из системы (10) в уравнение (11) мы получим следующее кубичное уравнение относительно λ.

$$\lambda^3.f(x^1,y^1,z^1)+\lambda^2\frac{\triangle^2 f}{2}(x^1,y^1,z^1)+\lambda.\triangle f(x^1,y^1,z^1)+f(x,y,z)=0 \quad . \quad . \quad (12)$$

Здесь $\frac{\triangle^2 f}{2}$ есть левая часть уравнения второй поляры полюса $(x^1y^1z^1)$ а $\triangle f$—левая часть уравнения первой поляры полюса $(x^1y^1z^1)$.

Найдем условие, чтобы прямая (10) касалась кривой (11).

Если $M^1(x^1,y^1,z^1)$—данная точка а $M(x,y,z)$ произвольная точка на одной из касательных из точки M^1 к циркулярной кривой (11), то уравнение (12) должно иметь два равных корня, т. е. дискриминант уравнения (12) должен быть равен 0.

Дискриминант D формы

$$a_0\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3$$

будет

$$D=a_1^2a_2^2+18a_0a_1.a_2.a_3-4a_0a_2^3-4a_1^3a_3-27a_0^2a_3^2$$

Приравняв его O, получим уравнение 6 степени относительно x, y, z. [$a_0=f^1(x^1y^1z^1)$—нулевого измерения относительно x y z; $a_1=\frac{\triangle^2 f(x^1y^1z^1)}{2}$ 1-го измерения, $a_2=\triangle f(x^1y^1z^1)$—2-го измерения; $a_3=f(xyz)$—3-го измер.], которое и будет уравнением шести касательных к кривой из точки $x^1y^1z^1$

Если точка $M^1(x^1y^1z^1)$ будет на кривой, то уравнение $D=0$ упростится, так как $a_0=f(x,^1y,^1z)=0$.

В таком случае оно примет следующий вид:

$$a_1^2a_2^2-4a_1^3a_3=0 \qquad \text{или } a_1^2(a_2^2-4a_1a_3)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

После подстановки значений коэффициентов уравнение (13) примет форму:

$$\left[\frac{\triangle^2 f}{2}\right]^2 \cdot \left[(\triangle f)^2-4.\frac{\triangle^2 f}{2}f\right]=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Уравнение (14) представляет собою совокупность шести касательных в кривой (11) из точки, взятой на этой кривой. Точки касания двух из этих касательных совпадают с точкой $M^1(x^1y^1z^1)$. Кроме упомянутых двух касательных через точку M^1 проходят, как показывает уравнение (14), еще четыре касательных к кривой, точки касания которых не совпадают с точкой M^1. Уравнение их совокупности будет:

$$2.f(x,y,z).\triangle^2 f(x^1,y^1,z^1)-[\triangle f(x^1y^1z^1)]^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

§ 10. Докажем теперь теорему Salmon'a [1]), заключающуюся в том, что *ангармоническое отношение пучка четырех касательных, прове-*

---

[1]) Journal für Mathematik B. XLII, J. S. 274.

денных из какой-либо точки циркулярной кривой, есть величина постоянная, независящая от положения вершины пучка—точки M^1 на кривой.

Так как ангармоническое отношение не изменяется при проектировании, то теорема, справедливая для циркулярных кривых, будет справедлива и для всех их проекций, т.-е. для всякой кривой 3-го порядка, так как все кривые 3-го порядка могут быть получены путем проектирования циркулярных кривых (гл. III § 8).

Проще всего было бы доказать теорему Salmon'a для случая parabolae divergentes Ньютона, так как из них могут быть путем проектирования получены все кривые 3-го порядка.

Имея однако в виду вывод инвариантов, циркулярных кривых, мы докажем теорему Salmon'a непосредственно для циркулярных кривых.

Итак, согласно с уравнением (15), напишем прежде всего уравнение пучка 4-х касательных к циркулярной кривой:

$(x+A)(x^2+y^2)+Dxz^2+Eyz^2+Fz^3=0$ из точки $M^1(x^1,y^1,z^1)$ этой кривой.

Вычислив в обыкновенных Декартовых координатах

$$\triangle f(x^1y^1z) \text{ и } \triangle^2 f(x^1y^1z^1).$$

$$\triangle f(x^1,y^1,z^1)=(3x^1+A)x^2+(x^1+A)y^2+2y^1xy+2(Ax^1+D)x+3(Ay^1+E)y+ \\ +Dx^1+Ey^1+3F \quad . \; . \; . \; . \; (16)$$

$$\triangle^2 f(x^1,y^1,z^1)=2(3x^{12}+y^{12}+D+2Ax^1)x+2(2x^1y^1+2Ay^1+E)y+2(Ax^{12}+ \\ +Ay^{12}+2Dx^1+2Ey^1+3F) \; . \; . \; . \; . \; . \; (17$$

Напишем уравнение пучка касательных:

$$2f.\triangle^2 f-(\triangle f)^2=2(x^3+xy^2+Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F)[(6x^{12}+2y^{12}+4Ax^1+2D) \\ x+(4x^1y^1+4Ay^1+2E)y+2Ax^{12}+2Ay^{12}+4Dx^1+4Ey^1+6F]-(3x^1+A)^2x^4- \\ -(x^1+A)^2y^4-4y^{12}.x^2y^2-2(3x^1+A)(x^1+A).x^2.y^2-2(3x^1+A)2y^1.x^3y-2(x^1+A) \\ 2y^1.xy^3-K=0 \quad . \; . \; . \; (18)$$

буквою K обозначена совокупность членов ниже четвертого измерения относительно x и y в уравнении (18).

Раскрыв скобки и расположив полученный многочлен по степеням x, мы перепишем уравнение (18) в таком виде:

$$(12x^{12}+4y^{12}+8Ax^1+4D-9x^{12}-6Ax^1-A^2)x^4+(8x^1y^1+8Ay^1+4E-12x^1y^1- \\ -4Ay^1)x^3y+(12x^{12}+4y^{12}+8Ax^1+4D-6x^{12}-8Ax^1-2A^2-4y^{12})x^2y^2+(8x^1y^1+ \\ +8Ay^1+4E-4x^1y^1-4Ay^1)xy^3-(x^1+A)^2y^4+L=0 \quad . \; . \; . \; . \; (19)$$

буквою L обозначена совокупность неинтересных для нас членов ниже четвертого измерения.

Уравнение совокупности четырех касательных к циркулярной кривой по приведении подобных членов будет иметь вид:

$$(3x^{12}+4y^{12}+2Ax^1+4D-A^2)x^4+4(E+Ay^1-x^1y^1)x^3y+(6x^{12}+4D-2A^2)x^2y^2 \\ +4(E+Ay^1+x^1y^1)xy^3-(x^1+A)^2y^4+L=0 \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

Если мы приравняем нулю совокупность членов четвертого измерения в левой части равенства (20), то мы очевидно получим уравнение пучка четырех прямых, параллельных касательным, изображаемым уравнением (20).

Ангармоническое отношение лучей этого второго пучка будет, конечно, равно ангармоническому отношению пучка касательных.

Таким образом нам надо найти ангармоническое отношение пучка прямых

$$a_0x^4+4a_1x^3y+6a_2x^2y^2+4a_3xy^3+a_4=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

где $a_0=3x^{12}+4y^{12}+2Ax^1+4D-A^2$

$$a_1=E+Ay^1-x^1y^1$$

$$a_2=\frac{3x_1^2+2D-A^2}{3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (22)$$

$$a_3=E+Ay^1+x^1y^1$$

$$a_4=-(x^1+A)^2$$

Уравнение (21) четвертой степени и дает четыре значения $\frac{y}{x}$ угловых коэффициентов пучка прямых; обозначим эти угловые коэффициенты буквами k_1, k_2, k_3, и k_4.

Как известно одно из значений ангармонического отношения (a, b, c, d,) пучка прямых с угловыми коэффициентами: k_1, k_2, k_3, k_4, будет [Salmon-Fiedler B I. § 85 Aufg IX]

$$(a,b,c,d,)=\frac{(k_1-k_3).(k_2-k_4)}{(k_2-k_3)(k_1-k_4)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (23)$$

Все шесть значений ангармонического отношения просто выражаются через три следующие выражения:

$$(k_3-k_2)(k_4-k_1)=D_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (24)$$

$$(k_1-k_3)(k_4-k_2)=D_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (25)$$

$$(k_2-k_1)(k_4-k_3)=D_3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26)$$

а именно эти отношения будут (как легко проверить подстановкой):

$$-\frac{D_2}{D_1},\ -\frac{D_3}{D_2}\ -\frac{D_1}{D_3}.,\ -\frac{D_1}{D_2},-\frac{D_2}{D_3},-\frac{D_3}{D_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (27)$$

первые три получаются круговой подстановкой, последние три — обратны трем предыдущим.

Вычисление далее показывает, что

$$D_1+D_2+D_3=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (28)$$

Известно далее, что все шесть ангармонических отношений выражаются через корни некоторого кубического уравнения (Salmon-Fiedler B. 2 § 339).

Составим кубическое уравнение с корнями:

$$D_1-D_2;\ D_2-D_3;\ D_3-D_1$$

Такое уравнение будет иметь вид:

$$\theta_3+3(D_1D_2+D_2D_3+D_1D_3)\theta-(D_1-D_2)(D_2-D_3)(D_3-D_1)=0 \quad . \; . \; . \; (29)$$

Обозначив корни уравнения (29) через θ_1, θ_2, и θ_3, мы можем написать следующие соотношения:

$$D_1-D_2=\theta_1$$

$$D_2-D_3=\theta_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30)$$

$$D_3-D_1=\theta_3$$

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3=0$$

Присоединив сюда соотношение (28) $D_1+D_2+D_3=0$, мы получим систему уравнений, из которой найдем, что

$$D_1=\frac{\theta_1-\theta_3}{3}$$

$$D_2=\frac{\theta_2-\theta_1}{3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

$$D_3=\frac{\theta_3-\theta_2}{3}$$

Подставив найденные выражения D_1 D_2 и D_3 в (27), мы и получим такие значения шести ангармонических отношений через корни уравнения (29):

$$\frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1-\theta_3},\ \frac{\theta_2-\theta_3}{\theta_2-\theta_1},\ \frac{\theta_3-\theta_1}{\theta_3-\theta_2}.\ \frac{\theta_1-\theta_3}{\theta_1-\theta_2},\ \frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_2-\theta_3},\ \frac{\theta_3-\theta_2}{\theta_3-\theta_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

Коэффициенты уравнения (29) суть симметрические функции корней уравнения (21) и могут быть следовательно рационально выражены через коэффициенты последнего.

Вычисление приводит уравнение (20) к такому виду:

$$\theta^3-36I_2\theta-432I_3=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)а$$

где

$$I_2=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)б$$

$$I_3=a_0a_2a_4-a_0a_3^2-a_1^2a_4+2a_1a_2a_3-a_2^3=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \quad . \; . \quad (32)а$$

Остается теперь вычислить выражения I_2 и I_3 в зависимости от коэффициентов уравнения (21).

Подставив в левую часть равенства (31) выражения входящих туда сомножителей из (22), находим:

$$I_2=-(3x^{12}+4y^{12}+2Ax^1+4D-A^2)(x^{12}+2Ax^1+A^2)-4(E+Ay^1-x^1y^1)(E+Ay^1+$$
$$+x^1y^1)+3.\frac{(3x^{12}+2D-A^2)^2}{9} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

По раскрытии скобок и проведении к общему знаменателю (33), найдем:

$$3I_2=-9x^{14}-12x^{12}y^{12}-6Ax^{13}-12Dx^{12}+3A^2x^{12}-18Ax^{13}-24Ax^1y^{12}-12A^2x^{12}-$$
$$-24DAx^1+6A^3x^1-9A^2x^{12}-12A^2y^{12}-6A^3x^1-12A^2D+3A^4-12E^2-24AEy^1$$
$$-12A^2y^{12}+12x^{12}y^{12}+9x^{14}+4D^2+A^4+12Dx^{12}-6A^2x^{12}-4A^2D; \quad . \quad (34)$$

По приведении подобных членов в правой части равенства (34) найдем:

$$3I_2=-24Ax^{13}-24Ax^1y^{12}-24A^2x^{12}-24A^2y^{12}-24ADx^1-24AEy^1+4D^2+$$
$$+4A^4-16A^2D-12E^2 \quad . \; . \; . \; . \; , \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Взяв за скобки общего множителя—24A, перепишем равенство (35) таким образом:

$$3I_2=-24A(x^{13}+x^1y^{12}+Ax^{12}+Ay^{12}+Dx^1+Ey^1)+4D^2+4A^4-16A^2D-12E^2 \quad (36)$$

Так как точка x^1y^1 по условию лежит на кривой, то $x^{13}+x^1y^{12}+Ax^{12}+Ay^{12}+Dx^1+Ey^1=-F$, и равенство (36) получит вид:

$$3I_2=24AF+4D^2+4A^4-16A^2D-12E^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (37)$$

Окончательно находим, что

$$I_2=-\frac{4}{3}\left\{4AD^2+3E^2-A^4-D^2-6AF\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (38)$$

Уравнение (38) показывает, что I_2 не зависит от координат x^1y^1 точки цир. кривой, из которой проводятся к ней касательные.

§ 11. Вычислим теперь выражение I_3.

$$I_3=a_0a_2a_4-a_0a_3^2-a_1^2a^4+2a_1a_2a_3-a_2^3$$

$$a_0a_2a_4=-3x^{16}-8Ax^{15}-(6D+5A^2)x^{14}-\frac{40AD-8A^3}{3}x^{13}-\frac{8D^2+20A^2D-9A^4}{3}x^{12}$$

$$-\frac{16AD^2-8A^3D}{3}x^1-4x^{14}y^{12}-8Ax^{13}y^{12}-\frac{8D+8A^2}{3}x^{12}.y^{12}-\frac{16AD-8A^3}{3}x^1y^{12}-$$

$$-\frac{8A^2D-4A^4}{3}y^{12}-\frac{(2A^2D-A^4).(4D-A^2)}{3} \quad . \ . \ . \ . \ (39)$$

$$-a_0a^3_2=-3x^{14}y^{12} \ 8Ax^{13}y^{12}-6Ex.^{12}y^1-(4D+6A^2)x^{12}y^{12}-10AEx^{12}y^1-3E^2x^{12}-$$
$$8ADx^1y^{12}-(8ED+2A^2E)x^1y^1-4x^{12}y^{14}-8Ax^1y^{14}-8Ex^1y^{13}-2AE^2x^1-4A^2y^{14}$$
$$-8AEy^{13}-(4E^2+4A^2D-A^4)y^{12}-(8ADE-2A^3E)y^1-E^2(4D-A^2) \quad . \ . \ . \ (40)$$

$$-a_1^2a_4^2=x^{14}y^{12}-2Ex^{13}y'-2A^2x^{12}y^{12}-2AEx^{12}y^1+2A^3x^1y^{12}+E^2x^{12}+2A^2Ex^1y^1+$$
$$+2AE^2x^1+2A^3Ey^1+A^4y^{12}+A^2E^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (41)$$

$$2a_1a_2a_3=-2x^{14}y^{12}+\frac{8A^2-4D}{3}x^{12}y^{12}+4AE^2x^{12}y^1+2E^2x^{12}+\frac{4A^2D-2A^4}{3}y^{12}+$$

$$+\frac{8ADE-4A^3E}{3}y^1+\frac{4E^2D-2A^2E^2}{3} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (42)$$

$$-a_2^3=-x^{16}-(2D-A^2)x^{14}-\frac{(2D-A^2)^2}{3}x^{12}-\frac{(2D-A^2)^3}{27} \quad . \ . \ . \ (43)$$

Сложив почленно равенства (39), (40), (41), (42) и (43), получим:

$$I_3{}^{*)}=-4[x^6+2Ax^5+2x^4y^2+x^2y^4+4Ax^3y^2+2Dx^4+A^2x^4+2Dx^2y^2+2A^2x^2y^2+$$
$$+2AEx^2y+2Axy^4+2Ex^3y+2Exy^3+2EDxy+D^2x^2+E^2y^2+A^2y^4+2AEy^3]-$$
$$-\frac{8}{3}[(5AD-A^3)x^3+(2A^2D-A^4)x^2+(5AD-A^3)xy^2+(2A^2D-A^4)y^2+(2ADE-$$
$$A^3E)y+(2A^2D+A^3D)x]+\left\{\frac{A^2-4D)(2A^2D-A^4}{3}\right\}-E^2(4D-A^2)+A^2E^2-$$
$$-\frac{(2D-A^2)^3}{27}+\frac{4E^2D-2A^2E^2}{3}; \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (44)$$

---

*) Значки ^{1} у **x** и у для упрощения записей временно опущены.

Остается преобразовать выражение I_3 следующим образом: из коэффициента 1-го члена вторых квадратных скобок возьмем $-8ADx^3$, а так как там было $-\frac{40ADx^3}{3}$, то в скобках останется $-\frac{16ADx^3}{3}$, и коэффициент 1-го члена во вторых квадратных скобках по выводе общего множителя $-\frac{8}{3}$ будет: $(2AD-A^3)$.

Такое же преобразование сделаем и с третьим членом вторых квадратных скобок: $-\frac{40AD-8A^3}{3}xy^2$. Взяв $-8ADxy^2$, получим в скобках

$$-\frac{8}{3}(2AD-A^3).xy^2$$

взятые члены: $8ADx^3$ и $-8ADxy^2$ запишем в первые квадратные скобки, тогда у нас получится:

$$I_3=-4[x^6+2Ax^5+2x^4y^2+x^2y^4+4Ax^3y^2+2Dx^4+A^2x^4+2Dx^2y^2+2A^2x^2y^2+$$
$$+2AEx^2y+2Ex^3y+D^2x^2+2Axy^4+2Exy^3+2EDxy+E^2y^2+A^2y^4+2AEy^3+$$
$$+2ADx^3+2ADxy^2]-\frac{8}{3}[(2AD-A^3)x^3+(2A^2D-A^4)x^2+(2AD-A^3)xy^2+$$
$$+(2A^2D-A^4)y^2+(2AD^2-A^3D)x+(2ADE-A^3E)y]+\frac{(A^2-4D)(2A^2D-A^4)}{3}-$$
$$-E^2(4D-A^2)+A^2E^2-\frac{(2D-A^2)^3}{27}+\frac{4E^2D-2A^2E^2}{3} \quad . \; . \; . \; . \; (45)$$

Из уравнения циркулярной кривой имеем:

$$x^3+xy^2+Ax^2+Ay^2+Dx+Dy=-F \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (46)$$

Возведя обе части раненства (46) в квадрат, находим

$$x^6+x^2y^4+A^2x^4+A^2y^4+D^2x^2+E^2y^2+2x^4y^2+2Ax^5+2Ax^3y^2+2Dx^4+2Ex^3y+$$
$$+2Ax^3y^2+2Axy^4+2Dx^2y^2+2Exy^3+2A^2x^2y^2+2ADx^3+2AEx^2y+2ADxy^2+$$
$$+2AEy^3+2DExy=F^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (47)$$

Таким образом, выражение I_3 в силу равенства (47) может быть переписано таким образом:

$$I_3=+4F^2-\frac{8}{3}A(2D-A^2)[x^3+Ax^2+xy^2+Ay^2+Dx+Ey]+\frac{(A^2-4D)(2A^2D-A^4)}{3}$$
$$+A^2E^2-E^2(4D-A^2)-\frac{(2D-A^2)^3}{27}+\frac{4E^2D-2A^2E^2}{3} \quad . \; . \; . \; . \; (48)$$

Выражение в квадратных скобках правой части равенства (48) равно $-F$, и мы окончательно получаем

$$I_3=-4F^2+\frac{8}{3}AF(2D-A^2)+2A^4D-\frac{8}{3}A^2D^2-\frac{A^6}{3}-4E^2D+2A^2E^2-\frac{8D^3}{27}+$$
$$+\frac{12A^2D^2}{27}-\frac{6A^4D}{27}+\frac{A^6}{27}+\frac{4E^2D}{3}-\frac{2A^2E^2}{3} \quad . \; . \; . \; . \; (49)$$

По раскрытии скобок и группировке членов с общим знаменателем, мы можем переписать I_3 в такой форме:

$$I_3 = -4F^2 + \frac{16ADF - 8A^3F - 8E^2D + 4A^2E^2}{3} + \frac{16A^4D - 20A^2D^2}{9} - \frac{8A^6 + 8D^3}{27} \quad (50)$$

Равенство (50) показывает, что выражение I_3 также не зависит от координат x^1y^1.

Так как I_2 и I_3 не зависят от координат той точки кривой, из которой проводятся касательные прямые к ней, то следовательно и θ_1 θ_2 и θ_3 не зависят от координат этой точки, а значит на основании (32) и ангармонические отношения пучка *касательных* также не зависят от координат той точки циркулярной кривой, из которой пучек *касательных* проводится.

Таким образом, теорема Salmon'а доказана.

Выражения I_2 и I_3 суть так называемые Клебшевские инварианты биквадратичной формы (21).

§ 12. Таким образом можно сказать, что ангармоническое отношение пучка касательных характеризует данную кривую 3-го порядка. Оно сохраняет свои значения и для всех проекций этой кривой. Если у двух каких-либо кривых 3-го порядка эти ангармоничные отношения различны, то одна из таких кривых в силу доказанной теоремы не может быть получена как проекция другой.

Другими словами для возможности проектирования двух кривых третьего порядка одной в другую должно существовать некоторое соотношение между коэффициентами уравнений этих кривых.

Последнее обстоятельство об'ясняется тем, что формулы проективного преобразования

$$X = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\alpha x + \beta y + \gamma};\ Y = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\alpha x + \beta y + \gamma} \quad \ldots\ldots \quad (52)$$

содержат восемь независимых параметров, а ур-ие кривой 3-го порядка имеет их девять.

После преобразования мы получим 9 соотношений между коэффициентами старого и нового уравнений кривой. В эти соотношения войдут 8 параметров проективного преобразования. По исключении этих 8 количеств из девяти полученных уравнений, мы и найдем требуемое соотношение между коэффициентами кривых—аналитическое условие возможности проективного преобразования.

Связь этого обстоятельства с существованием абсолютного инварианта кубической формы будет отмечена в следующей главе.

§ 13. Ангармоническое отношение четырех точек или пучка четырех лучей имеет шесть различных значений.

$$\lambda; 1-\lambda; \frac{\lambda}{\lambda-1}; \frac{1}{\lambda}; \frac{1}{1-\lambda}; \frac{\lambda-1}{\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

Существуют три случая, когда некоторые из количеств ряда (52) будут равными:

Разберем эти случаи подробно:

I. Если $\lambda = \frac{1}{\lambda}$, т. е. $\lambda^2 = 1$. а) $\lambda_1 = +1$

б) $\lambda_2 = -1$

a) Если $\lambda=+1$, то значения ангармонического отношения будут:

$$1,\ 0,\ \infty,\ 1,\ \infty,\ 0.$$

b) Если $\lambda=-1$, то 6 значений ангармонического отношения будут:

$$-1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ -1,\ \frac{1}{2},\ 2$$

Наконец с) если

$$\lambda=\frac{\lambda-1}{\lambda} \text{ или } \lambda^2-\lambda+1=0, \text{ то}$$

$\lambda=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ и 6 значений ангармонического отношения будут:

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

Во втором случае говорят, что четыре точки или четыре луча находятся в *гармоническом положении*.

В третьем случае значения λ суть комплексные значения кубического корня из отрицательной единицы, ибо уравнение $\lambda^2-\lambda+1=0$ получается после разложения на множители левой части уравнения $\lambda^3+1=0$.

В таком случае говорят, что четыре точки или луча находятся в *эквиангармоническом отношении*. В этом случае три значения λ равны одному комплексному значению корня кубичного из -1, три другие значения—второму комплексному корню из -1.

§ 14. Укажем теперь условия, при которых пучек четырех касательных к циркулярной кривой будет гармоническим или эквиангармоническим.

Условия эти будут нам нужны в следующей главе.

Возьмем снова кубическое уравнение $(30)_a$, через корни которого выражаются все значения ангармонического отношения пучка касательных:

$$\theta^3-36\,I_2.\theta-432\,I_3=0 \quad \dots\dots\dots \quad (53)$$

Если $I_3=0$, то один из корней уравнения (53) будет равен 0, т. е. два какие-либо значения D будут равны на основании соотношений (30) и следовательно одно из значений ангармонического отношения в силу соотношений (27) будет равно -1, т. е. мы будем иметь гармонический пучек касательных.

b) Если $I_2=0$, то и $D_2.D_3+D_3.D_1+D_1.D_2=0 \quad \dots\dots \quad (54)$

но так как $D_1+D_2+D_3=0$, то мы сейчас же можем получить такие соотношения:

$$D_2\,D_3+D_3\,D_1=-D_1\,D_2$$

$$D_3(D_1+D_2)=-D_1\,D_2 \quad \dots\dots\dots \quad (55)$$

$$-D_3^2=-D_1\,D_2$$

т. е. $D_3^2=D_1\,D_2$ и аналогично: $D_2^2=D_3\,D_1$ и $D_1^2=D_2\,D_3 \quad \dots\dots \quad (56)$

а из соотношений (56) нетрудно получить такие пропорции:

$$\frac{D_3}{D_2}=\frac{D_2}{D_1}=\frac{D_1}{D_3} \quad \dots\dots\dots \quad (57)$$

На основании соотношений (27) мы приходим к заключению, что в этом случае три значения ангармонического отношения равны между собою, т. е. мы имеем случай эквиангармонии.

То же можно доказать и иначе: в случае $I_2=0$ уравнение (53) обращается в двучленное и может быть написано в форме:

$$\theta^3-m^3=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

Корни его будут: m, $m\omega$, $m\omega^2$, где $m^3=432 I_3$ а ω и ω^2—комплексные значения корня кубичного из $+1$. Тогда например первое значение ангармонического отношения:

$$\frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1-\theta_3} \text{ будет } \frac{m-m\omega}{m-m\omega^2}=\frac{1-\omega}{1-\omega^2}=\frac{1}{1+\omega}=, \text{ где } \omega=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{След. } \frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1-\theta_3}=\frac{1}{1+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{2-1+i\sqrt{3}}=\frac{2}{1+i\sqrt{3}}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

т. е. мы будем иметь случай с).

Обратим, наконец, внимание на первый случай, когда одно из значений ангармонического отношения равно 0. Это будет иметь место в том случае, если уравнение (53) будет иметь двойной корень (см. соотношение 32).

Условием двойного корня уравнения:

$$\theta^3+p\theta+q=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

будет равенство нулю его дискриминанта, т. е.

$$4p^3+27q^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

а так как в нашем случае $p=-36 I_2$ и $q=-432 I_3$, то соотношение (60) после подстановки выражений p и q и надлежащих сокращений примет следующий вид:

$$I_2^3-27 I_3^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

Геометрический смысл соотношения (61) будет указан в главе IV.

ГЛАВА IV.

Метрические свойства циркулярных кривых, получаемые с помощью их инвариантов.

§ 1. Ортогональные инварианты циркулярных кривых.

Если уравнение некоторой алгебраической кривой

$$f(x,y,a,b,c....)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

в которых x и y—Декартовы координаты точек кривой а a, b, c... некоторые параметры, через общую ортогональную подстановку

$$\begin{aligned} x&=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha+x_0 \\ y&=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha+y_0 \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1^1$$

преобразуется в $f(x_1,y_1,a_1,b_1,c_1 \ldots)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$ то всякая функция F коэффициентов уравнения (1), которая остается неизменной при этой подстановке, так что

$$F(a,b,c...)=F(a_1,b_1,c_1,...)$$

называется *ортогональным инвариантом кривой* (1)

Если в формулах (1^1) $\alpha=0$, то мы будем иметь инвариант, соответствующий параллельному перемещению, если $x_0=y_0=0$, то у нас будет инвариант, соответствующий вращению фигуры кривой около неподвижной точки.

Равенство нулю инварианта выражает какое-либо метрическое свойство данной кривой.

В настоящей главе рассмотрим по аналогии с кривыми 2-го порядка ортогональные инварианты циркулярных кривых 3-го порядка и применим их к выводу различных метрических свойств этого рода кривых.

Вопросом об ортогональных инвариантах кривых 3-го порядка занимался проф. Иенского Университета I. Thomae. Его работа на эту тему помещена в Berichte über die Vorhandlungen der Gesselschaft der Wissenschaften zu Leipzig. B. 51, 1899.

Об ортогональных инвариантах циркулярных кривых имеется диссертация R. Doelle „Orthogonale Invarianten der Circularcurven 3. Ordnung", Jena 1905.

В настоящей работе инварианты цирк. кривых рассматриваются с несколько иной точки зрения, чем это сделано у Doelle. Doelle стремился получить кроме независимых основных инвариантов целый ряд производных инвариантов с целью выражения при их помощи тех инвариантов, которые имеют более сложные выражения через коэффициенты уравнения кривой.

Далее, у Doelle нет вывода более сложных инвариантов S и T. Он пишет эти инварианты сразу на основании общих выражений их, полученных Аронгольдом и Томэ.

В настоящей работе, исходя из чисто геометрических соображений сделан подробный вывод ортогональных инвариантов через коэф-

фициенты общего уравнения циркулярной кривой, а вывод инвариантов S и T через коэффициенты упрощенного уравнения циркулярной кривой (ввиду сложности вычисления инвариантов через общие коэффициенты).

§ 2. Уравнение циркулярной кривой Гл I, § 1 содержит 8 коэффициентов формулы ортогонального преобразования вводят три параметра (x_0, y_0 и α). 8 коэффициентов преобразованного уравнения определенным образом выразятся в зависимости от 8 коэффициентов прежнего уравнения и трех параметров ортогонального преобразования.

Мы получим таким образом 8 уравнений, связывающих новые и старые коэффициенты. Исключив из этих 8 уравнений три параметра α, x_0, и y_0, мы получим 5 соотношений между коэффициентами старого и нового уравнений кривой, независимых от преобразования координат. Эти соотношения и будут ортогональными независимыми инвариантами циркулярной кривой.

Отсюда следует, что циркулярная кривая не может иметь более 5 независимых ортогональных инвариантов.

Всякая функция этих инвариантов в свою очередь будет также инвариантом, так что зависимых ортогональных инвариантов у циркулярной кривой может быть и более пяти, как увидим ниже.

§ 3. Так как при параллельном перенесении координатных осей коэффициенты старших членов (a и b) не изменяются (гл. I, § 4), то отсюда заключаем, что эти коэффициенты не зависят от x_0 и y_0, а только от угла поворота осей α. Исключив угол α из двух получившихся от сравнения коэффициентов старших членов уравнений, мы заключаем, что один из пяти независимых ортогональных инвариантов должен содержать только коэффициенты a и b.

Найдем этот инвариант.

Уравнение циркулярной кривой напишем в виде:

$$(ax+by)\,(x^2+y^2)+f_2\,(x,\,y)=0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Символом $f_2\,(x,y)$ обозначены члены ниже третьего измерения, которые в данный момент нам не интересны.

Сделаем в ур-нии (3) преобразование координат по формулам

$$\begin{aligned} x&=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha \\ y&=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

В таком случае уравнение (3) примет следующий вид:

$$(a_1x_1+b_1y_1)\,(x_1^2+y_1^2)+F_2\,(x_1y_1)=0 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$\text{где очевидно}\quad \begin{aligned} a_1&=a\cos\alpha+b\sin\alpha \\ b_1&=-a\sin\alpha+b\cos\alpha \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Из системы (6) мы и находим искомый инвариант старших членов уравнения циркулярной кривой, обозначив его через δ, получим:

$$\delta^2=a^2+b^2=a_1^2=b_1^2 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Квадрат этого инварианта только численным множителем $\frac{4}{27}$ отличается от дискриминанта кубичной формы:

$$(ax+by)\,(x^2+y^2).$$

Обращение δ в нуль, что возможно лишь в том случае, если одновременно $a=o$ $b=o$, показывает, что циркулярная кривая переходит в коническое сечение.

§ 4. Найдем условие, чтобы особенный фокус (гл. I § 2) лежал на кривой.

Уравнение циркулярной кривой:

$$f(x,y)=(ax+by)(x^2+y^2)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \quad (8)$$

Обозначим для удобства члены 3-го измерения через u_3, второго через u_2, и т. д., т. е.

$$\begin{aligned} &(ax+by)(x^2+y^2)=u_3 \\ &(Ax^2+Bxy+Cy^2=u_2 \\ &Dx+Ey= \quad u_1 \\ &F= \quad u_0 \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Обозначив координаты особенного фокуса (x_c y_c), напишем требуемое условие в таком виде:

$$f(x_c, y_c)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$\text{Как известно } x_c=\frac{a(C-A)-bB}{2(a^2+b^2)} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

$$y_c=\frac{-b(C-A)-aB}{2(a^2+b^2)} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Подставив выражение x_c и y_c в уравнение кривой (8), находим согласно обозначениям (9)

$$u_3=(ax+by).(x^2+y^2)=\frac{[(C-A)^2+B^2].[(a^2-b^2).(C-A)-2abB]}{8(a^2+b^2)^2} \quad \ldots \quad (13)$$

$$u_2=Ax^2+Bxy+Cy^2=\frac{[(C-A)^2+B^2]}{4(a^2+b^2)^2}.\left\{Aa^2+abB+Cb^2\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

$$u_1+u_0=Dx+Ey+F=\frac{aD.(C-A)-bDB-bE.(C-A)-aEB}{2(a^2+b^2)}+F= \quad \ldots \quad (15)$$

$$=\frac{(aD-bE).(C-A)-B.(bD+aE)}{2(a^2+b^2)}+F$$

Сложив почленно равенства (13), (14) и (15), находим:

$$f(x_c,y_c)=\frac{(C-A)^2+B^2}{8(a^2+b^2)}(A+C)+\frac{4(aD-bE)(C-A)-4B(bD+aE)}{8(a^2+b^2)}+F=0 \quad (16)$$

или, по приведении к общему знаменателю правой части, получим:

$$\frac{[(C-A)^2+B^2].(A+C)+4(D-bE)(C-A)-4B(bD+aE)+8(a^2+b^2).F}{8(a^2+b^2)} \quad (17)$$

Обозначим выражение (17) через Δ_1

Если $\Delta_1=0$, то это будет условием того, что особенный фокус находится на кривой.

Эта особенность кривой очевидно не зависит от системы координат и след. Δ_1 будет вторым инвариантом циркулярной кривой. Назовем этот инвариант Δ_1 *инвариантом особенного фокуса.*

Инвариант особенного фокуса может быть выражен в зависимости от первого инварианта δ:

$$\Delta_1=\frac{[(C-A)^2+B^2].(A+C)+4(aD-bE).(C-A)-4.B.(bD+aE)+8\delta.F}{8.\delta} \quad (18)$$

и представлен в виде разности двух детерминантов третьего порядка:

$$8\delta.\triangle_1 = \begin{vmatrix} A+C, & 0, & O \\ O, & A-C, & B \\ 0, & -B, & A-C \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -a, & b, & C-A \\ b, & a, & B \\ D, & E, & 2F \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

Инвариант $\triangle_1$ - особенного фокуса можно назвать также инвариантом *кругового полюса*. Особый фокус циркулярной кривой можно назвать круговым полюсом потому, что первая поляра его относительно циркулярной кривой есть окружность. Это обстоятельство было уже показано выше (гл. II, § 6) аналитически. Не трудно показать то же и на основании чисто геометрических соображений (согласно § 8 гл. III). Действительно, первая поляра точки по отношению к данной кривой 3-го порядка есть коническое сечение, которое проходит через точки касания касательных к данной кривой из полюса. Так как из особенного фокуса выходят две касательных в круговых точках, то следовательно первая поляра особенного фокуса есть коническое сечение, проходящее через круговые точки плоскости, т. е. окружность.

§ 5. Найдем условие, чтобы все три ассимптоты кривой пересекались в одной точке, т. е. чтобы вещественная ассимптота кривой (гл. I § 1) проходила через особенный фокус.

Уравнение вещественной ассимптоты цирк. кривой (гл. I § 1) будет:

$$ax+by+\frac{Ab^2-Bab+Ca^2}{a^2+b^2}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Уравнения мнимых ассимптот:

$$\begin{array}{l} y-y_c=+i\,(x-x_c) \\ y-y_c=-i\,(x-x_c) \end{array} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

где x_c и y_c суть координаты особенного фокуса.

Напишем уравнения всех трех ассимптот в таком виде:

$$a\,(a^2+b^2)x+b\,(a^2+b^2).y+Ab^2-Bab+Ca^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

$$-ix+y+ix_c-y_c=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

$$ix+y-(ix_c+y_c)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

Для того, чтобы три прямые (22) (23) и (24) пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} a(a^2+b^2, & b(a^2+b^2, & Ab^2-Bab+Ca^2 \\ -\,i\;, & 1\;, & ix_c-y_c \\ i\;, & 1 & -(ix_c+y_c) \end{vmatrix} = O \quad . \; . \; . \quad (25)$$

Раскрыв этот определитель, мы по сокращении на—2i получим:

$$A\,(3b^2-a^2)-4Bab+C\,(3a^2-b^2)$$

Обозначим $A(3b^2-a^2)-4Bab+C(3a^2-b^2)$ через $\triangle_2$ . . . . (26)

Свойство ассимптот кривой пересекаться в одной точке очевидно не зависит от системы координатных осей, и следовательно выражение $\triangle_2$ представляет собою ортогональный инвариант циркулярной кривой.

Этот инвариант, также 3 порядка, назовем *ассимптотическим инвариантом* циркулярных кривых.

Обращение в 0 $\triangle_2$ свидетельствует о том, что три ассимптоты кривой пересекаются в особенном фокусе ее.

Ассимптотический инвариант $\triangle_2$ также может быть представлен в виде определителя третьего порядка, строками которого будут коэффициенты трехчленов:

$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$; $\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y}$ и $\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$ где Φ левая часть уравнения циркулярной кривой: $\Phi(x,y)=(ax+by)(x^2+y^2)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ (27)

Действительно, из последнего уравнения находим:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=3ax+by+A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (28)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y}=bx+ay+\frac{B}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (29)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=ax+3by+C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30)$$

$$\triangle_2=\begin{vmatrix} 3a, & b, & A \\ b, & a, & \frac{B}{2} \\ a, & 3b, & C \end{vmatrix}$$

Раскрыв этот определитель по элементам третьей колонны, мы и получим выражение (26).

Пример:

Рассмотрим кривую § 26 главы I.

Ее уравнение: $(x+2)(x^2+y^2)+x+6y-1=0$.

Здесь $a=1$; $b=0$; $C=A=2$; $B=0$; $D=1$; $E=6$; $F=-1$ . . . (31)

$$8\delta.\quad \triangle_1=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} -4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -4 . -2 . -1 = 8$$

$$\delta=1;\ \Delta_1=-1.$$

$$\Delta_1 \neq 0$$

След. особенный фокус кривой (31) не лежит на кривой.

Пример 2.

Возьмем кривую: $(2x-2y)(x^2+y^2)+x^2-y^2+3x+5y-26=0$. (32)

Составим для нее выражение инварианта $\triangle_2$

Здесь $a=2$; $b=-2$ $A=1$; $C=-1$; $B=0$; $D=3$; $E=5$; $F=-26$.

$$\triangle_2=1.(3.4-4)-4.\ 0.\ 2.(-2)-1(3.\ 4-4)=8-8=0.$$

Следовательно все три ассимптоты кривой (32) должны пройти через одну и ту же точку (особенный фокус).

§ 6. Для вывода двух остальных ортогональных инвариантов циркулярных кривых обратимся к последнему § главы 3-й. Мы показали, что в случае

$$I_2=0$$

двойное отношение пучка касательных эквиангармонично.

Но

$$I_2 = -\frac{4}{3}\,(-6AF + 4A^2D + 3E^2 - A^4 - D^2) \quad . \;.\; . \quad (33)$$

Так как свойство эквиангармоничности двойного отношения пучка касательных не зависит от изменения координатных осей, то мы имеем четвертый ортогональный инвариант циркулярных кривых:

$$4A^2D + 3E^2 - A^4 - D^2 - 6AF \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (34)$$

Обозначим его буквою 81.S, тогда

$$I_2 = -108{,}S \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (35)$$

Если

$$S = \frac{4A^2D + 3E^2 - A^4 - D^2 - 6AF}{81} = 0 \quad .\;.\;.\;.\;. \; (36)$$

то двойное отношение пучка касательных из какой-либо точки циркулярной кривой обладает свойством эквиангармоничности.

S есть ничто иное, как первый Аронгольдовский инвариант проективного преобразования, конечно он же будет и ортогональным инвариантом, ибо ортогональные преобразования суть частный случай проективных.

Тождественность правой части равенства (36) с Аронгольдовским инвариантом S легко проверить по общим формулам, полученным Аронгольдом на основании теории инвариантов кубичных форм (См. Salmon, Courbes planes II ed § 220).

Инвариант S относительно коэффициентов уравнения циркулярной кривой будет четвертой степени.

§ 7. В § 14 главы 3-ей было показано, что если $I_3 = 0$, то двойное отношение пучка четырех касательных к циркулярной кривой гармонично.

Мы показали, что

$$I_3 = -4F^2 + \frac{16ADF - 8A^2F - 8E^2D + 4A^2E^2}{3} + \frac{16A^4D - 20A^2D^2}{9} - \frac{8A^6 + 8D^3}{27} \;.\;.\;.\;.\;.\; (37)$$

или

$$I_3 = -27\left[\frac{4}{27}F^2 - \frac{16ADF - 8A^2F - 8E^2D + 4A^2E^2}{81} - \frac{16A^4D - 20A^2D^2}{243} + \frac{8A^6 + 8D^3}{27^2}\right] \;.\;.\;.\;.\; (38)$$

Так как свойство гармоничности двойного отношения также не зависит от положения координатных осей, то выражение, стоящее в квадратных скобках равенства (38) можно принять за пятый ортогональный инвариант циркулярных кривых. Он тождествен с проективным инвариантом T. Aronhold'a. Это легко может быть проверено по общей формуле для инварианта T. (Salmon, Courbes planes § 221).

Инвариант

$$T = \frac{4}{27} F^2 - \frac{16ADT - 8A^2F - 8E^2D + 4A^2E^2}{81} - \frac{16A^4D - 20A^2D^2}{243} +$$

$$+ \frac{8A^6 + 8D^3}{27^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (39)$$

Инвариант T для циркулярных кривых в форме уравнения (46) главы 3 будет содержать девять членов. Порядок его шестой.

Связь между Аронгольдовскими инвариантами S и T и Клебшевыми инвариантами биквадратичной формы $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$ устанавливается при помощи формул:

$$\dot{I}_2 = -108 S \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (40)$$

$$\dot{I}_3 = -27 T \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (41)$$

Таким образом если $T=0$, то двойное отношение пучка четырех касательных проведенных из какой-либо точки циркулярной кривой к ней гармонично.

§ 8. Наконец, в случае равенства нулю дискриминанта кубического уравнения:

$$\theta^3 - 36\dot{I}_2\theta - 432\dot{I}_3 = 0$$

два из значений ангармонического отношения равны нулю, как было показано в конце главы 3-ей.

В этом случае, как известно из теории ангармонического отношения пара касательных пучка совпадает друг с другом, и кривая следовательно имеет двойную точку.

Условие, чтобы кривая имела двойную точку в инвариантах Клебша, уже было нами получено:

$$\dot{I}_2 - 27 . \dot{I}_3^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (42)$$

При помощи формул (40) и (41) условие (42) можно выразить в зависимости от S и T.

Несложное вычисление дает, что

$$\dot{I}_2 - 27\dot{I}_3^2 = -27^3 . (64 S^3 + T^2)$$

Так как двойная точка кривой сохраняется при всяком преобразовании координат, то мы получаем так называемый *инвариант двойной точки циркулярной кривой*:

$$64S^3 + T^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (43)$$

Этот инвариант, как показывает выражение (43), уже не является независимым, выражаясь через Аронгольдовы инварианты.

Аналитическое условие наличности двойной точки у циркулярной кривой будет таким образом:

$$64S^3 + T^2 = 0.$$

(Продолжение следует).

А. Круталевіч

Разьвязаньне лікавых раўнаньняў спосабам дэдукцыйнай ітэрацыі

§ 1—*Да гісторыі пытаньня.*

Як вядома, альгебрычны аналіз на працягу сталецьцяў выпрацаваў некалькі спосабаў прыбліжанага вылічэньня разьвязкаў лікавых альгебрычных раўнаньняў.

Першым з іх па часу быў індускі спосаб „фальшывага правіла“ („*regula falsi*“), прыстасаваны ў пачатку XVI сталецьця італьлянскім матэматыкам *Карданам* да вылічэньня разьвязкаў кубічнага раўнаньня. Аднак, гэты мэтод, які заключаецца ў інтэрполяцыі значэньняў зьменнай x па пропорцыянальных частках, быў у руках Кардана яшчэ вельмі грубым. Удасканаленьне яго выпала на долю *Франсуа Віэта* (канец XVI ст.), які ў сваёй працы „*In artem analyticam isagoge*“ дае альгорытм, амаль-што цалкам супадаючы з пазьнейшым мэтодам Ньютона.

Ідучы хронолёгічна далей, мы ўбачым у канцы XVII сталецьця „мэтод каскад“, запрапанаваны *Рольлем*, які заключаецца ў выбары такой падстаноўкі, пры якой знакі раўнаньня чаргуюцца. Посьле выкананьня гэтай опэрацыі разьвязкі знаходзяцца па прынцыпу „*regula falsi*“.

У пачатку XVIII сталецьця *Ньютон* дае вядомы мэтод пасьледаўных прыбліжэньняў“, удасканалены потым *Жозэфам Фур'е* (у сэнсе знаходжаньня для шуканага разьвязка адначасна абедзьвюх граніц заместаднэй Ньютонаўскай), а таксама *Вільлямам Горнэрам*.

У канцы XVIII сталецьця *Лягранж* выпускае сваю працу „*Résolution des équations numériques*“, дзе дае спосаб, які заключаецца ў раскладзе рачавістых разьвязкаў раўнаньня з рацыянальнымі коэфіцыентамі у неперарыўны дроб.

Урэшце, у 1826 годзе францускі мала вядомы матэматык *Дандэлен* дае ідэю, распрацаваную швайцарскім матэматыкам *Грэффэ* (і удасканаленую потым астрономам *Энке* для выпадку ўяўных разьвязкаў).

Вось і ўсе (я не ўспамінаю спосабаў *номографічных*) мэтоды прыбліжанага вылічэньня разьвязкаў лікавых раўнаньняў, вядомыя нашай навуцы, як клясычныя.

З іх практычную каштоўнасьць маюць толькі спосаб Ньютона з папраўкамі Фур'е і спосаб Дандэлена (або Грэффэ),—бо толькі яны дазваляюць вылічыць разьвязкі з наперад заданай дакладнасьцю. Першы спосаб, г. зн. спосаб Ньютона,—больш выгодны для знаходжаньня адных толькі рачавістых разьвязкаў, але затое вымагае папярэдняга аддзяленьня разьвязкаў. Другі-ж спосаб не вымагае аддзяленьня разьвязкаў і больш зручны для адшуканьня ўяўных разьвязкаў, але затое патрабуе адначаснага вылічэньня абсолютна ўсіх разьвязкаў, з якіх некаторыя бываюць для практычных мэтаў зусім непатрэбны.

§ 2.—Мэтоды індукцыйнай ітэрацыі.

Калі мы разгледзім усе, як поўныя, гетак і элемэнтарныя курсы вышэйшай альгебры, як напрыклад: *Вэбэра, Сэррэ, Сальмона, Гравэ, Сохоцкага, Чэзаро, Сомава, Вашчэнка-Захарчэнка, Млодзееўскага* і інш., а таксама спэцыяльныя монографіі па прыбліжаных вылічэньнях, як напрыклад: лекцыі акад. *Крылова, Рунге* („*Praxis der Gleichungen*" і „*Separation und Approximation der Wurzeln*") і інш., то нідзе ня знойдзем іншых способаў, апрача пералічаных вышэй.

І толькі ў *Б. Млодзееўскага* у яго спэцыяльнай монографіі „Решение численных уравнений" (Москва, 1923), у *Уайтэйкера* у яго „*Calculus of observations*" (Лёндан, 1924) і ў *А. Гаўрылава* ў яго „Практике вычислений" (Ленінград, 1926) мы ўбачым абмежаваныя прыстасаваньні да разьвязаньня лікавых раўнаньняў так званага „мэтоду ітэрацыі".

Як вядома, мэтодам „ітэрацыі" або „паўтарэньня" у матэматыцы называецца способ, пры якім невядомая шукаецца шляхам паўтарэньня аднэй і той самай опэрацыі над пасьледаўнымі прыбліжэньнямі гэтай невядомай.

Разгледзім прыстасаваньне гэтага мэтоду, якое прыводзіцца ў памянёнай монографіі Млодзееўскага (стар. 85—87).

Даўшы спачатку тэорэтычные абаснаваньне, Млодзееўскі для ілюстрацыі бярэ раўнаньне:

$$x^3-3x-1=0$$

і, аддзяліўшы рачавісты разьвязак яго ў граніцах 1 і 2, прадстаўляе раўнаньне ў выглядзе:

$$x=x-a(x^3-3x-1)$$

дзе a—сталы лік, які выбіраецца потым.

Абазначаючы правую частку апошняй роўнасьці праз $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=x-a(x^3-3x-1)$$

і знаходзячы выводную яе:

$$\varphi'(x)=1-a(3x^2-3),$$

аўтар паказвае, што, пры $x=2$, $\varphi'(x)$ зьвяртаецца ў $1-9a$, і дзеля гэтага дапускае $a=\frac{1}{9}$, і першае прыбліжэньне разьвязка прымае за $x_1 \doteq 2$ ($\doteq$ знак прыбліжанай роўнасьці).

Посьле гэтага ітэрацыя дае (пры 5 знаках):

$$x_2 \doteq 2-\frac{\varphi(x_1)}{9} \doteq 2-\frac{8-6-1}{9} \doteq 2-\frac{1}{9} \doteq 1,8889$$

$$x_3 \doteq 1,8889-\frac{\varphi(x_2)}{9} \doteq 1,8889-\frac{1,8889^3-3.1,8889-1}{9} \doteq 1,8889-0,0081 \doteq 1,8808$$

$$x_4 \doteq 1,8808-\frac{\varphi(x_3)}{9} \doteq 1,8808-0,0012 \doteq 1,8796$$

$$x_5 \doteq 1,8796-\frac{\varphi(x_4)}{9} \doteq 1,8796-0,0002 \doteq 1,8794$$

і ўрэшце: $$x_6 \doteq 1,8794-\frac{\varphi(x_5)}{9} \doteq 1,8794-0,0000 \doteq 1,8794$$

Роўнасьць апошняй папраўкі нулю, а, значыцца, супадзеньне двох апошніх прыбліжэньняў x-а, паказвае на канец процэсу і дае значэньне невядомай з дакладнасьцю да 0,0001.

Як бачым, у гэтым мэтодзе першае прыбліжэньне шукаецца шляхам папярэдняга аддзяленьня разьвязкаў, а другое прыбліжэньне— шляхам дыфэрэнцыяваньня штучна ўтворанай функцыі x-а. І толькі, пачынаючы ад трэцяга прыбліжэньня, уваходзіць у сілу мэтод сапраўднай ітэрацыі.

Гэта дае нам права назваць даны мэтод - мэтодам індукцыйнай і у той-жа час частковай ітэрацыі. Індукцыйнай —таму, што ў ім выходзяць з часнага выпадку прыбліжэньня, частковай—таму, што апрача яе тутака прымаюць удзел такія опэрацыі, як: аддзяленьне разьвязкаў, утварэньне асаблівай функцыі невядомай і дыфэрэнцыяваньне апошняй.

У кожным выпадку спосаб гэты па сваёй практычнай каштоўнасьці мае права на далучэньне да памянёных мэтолаў Ньютона і Дандэлена, бо ў ім разьвязкі могуць быць вылічаны з наперад заданай дакладнасьцю.

Што тычыцца мэтоду Гаўрылава (а таксама і Уайтэйкера), то ён таксама павінен быць названы індукцыйнай ітэрацыяй, бо вымагае папярэдняга аддзяленьня разьвязкаў. Заключаецца ён у ізоляцыі першай ступені невядомага і ў наступных прыбліжэньнях, першае з якіх, па выразу самога аўтара, „ищется скорее интуицией вычислителя, чем по правилам“.

Бяручы раўнаньне

$$x^3-5x+0,1=0$$

аўтар разьвязвае яго адносна x у першай ступені:

$$x=\frac{0,1}{5}+\frac{x^3}{5}=0,02+0,2x^3$$

Дапускаючы першае прыбліжэньне x роўным $0,1$, атрымліваем:

$$x_2\doteq 0,02+0,0002\doteq 0,0202$$

$$x_3\doteq 0,02+0,0000016\doteq \underline{0,0200016}$$

$$x_4\doteq 0,02+0,0000016\doteq 0,0200016$$

Адкуль x можа быць прынятым з дакладнасьцю да 2.10^{-8} роўным $0,02$. Прыстасаваньне гэтага спосабу абмяжоўваецца толькі выпадкам, калі x ёсьць малы дроб; прычым, калі вольны член раўнаньня больш-менш вялікі, то прыстасаваньне гэтага мэтоду робіцца цяжкім, а вельмі часта і проста немагчымым.

§ 3.—Метод дэдукцыйнай ітэрацыі.

Мэтод дэдукцыйнай ітэрацыі (я яго называю так таму, што ён не вымагае ніякіх іншых опэрацый апрача чыстай ітэрацы) і грунтуецца на вельмі элемэнтарным факце:

Кожнае раўнаньне, прыведзенае да выгляду

$$x=\varphi(a,x)$$

дзе a ёсьць якая-небудзь сталая велічыня, можа быць прадстаўлена і гэтак:

$$x=\varphi[a,\varphi(a,x)]$$

або далей так:

$$x=\varphi\{a,\varphi[a,\varphi(a,\ldots\ldots\ldots)]\}$$

г. зн. як бяскрайны лік ідэнтычных опэрацый.

Хай, напрыклад,

$$x=a+f(x),$$

тады маем:

$$x=a+f[a+f(x)]=a+f\{a+f[a+f(a+...)]\}$$

Перарываючы такі рад бяскрайных опэрацый у пэўным месцы, мы атрымліваем прыбліжанае значэньне аднаго з шуканых разьвязкаў.

Альгебрычнае раўнаньне n-ай ступені

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n=0$$

заўсёды можна прадставіць у выглядзе

$$x^n=a_n+a_{n-1}x+...+a_1x^{n-1} \qquad (A)$$

посьле чаго, дабываючы корань n-ай ступені, атрымаем:

$$x=\sqrt[n]{a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+...+a_1x^{n-1}} \qquad (B)$$

Ясна, што першым прыбліжэньнем аднаго з рачавістых разьвязкаў будзе

$$x_1\doteq\sqrt[n]{a_n+a_{n-1}\sqrt[n]{a_n}+a_{n-2}\sqrt[n]{a_n^2}+...+a_1\sqrt[n]{a_n^{n-1}}}$$

Цяпер другім прыбліжэньнем будзе

$$x_2\doteq\sqrt[n]{a_n+a_{n-1}x_1+a_{n-2}x_1^2+...+a_1x_1^{n-1}}$$

і г. д.

Урэшце, m-ым прыбліжэньнем, якое супадзе з $(m-1)$-ым і дасьць нам прыбліжанае значэньне x з заданай дакладнасьцю, будзе:

$$x_m\doteq\sqrt[n]{a_n+a_{n-1}x_{m-1}+a_{n-2}x_{m-1}^2+...+a_1x_{m-1}^{n-1}}$$

Для ілюстрацыі возьмем ужо разгледжанае раўнаньне Млодзееўскага:

$$x^3-3x-1=0,$$

адкуль:

$$x=\sqrt[3]{1+3x}$$

Ітэрацыя дасьць нам (з 5 знакамі[1]):

$$x_1\doteq\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{1}}\doteq\sqrt[3]{4}\doteq1,5874$$

$$x_2\doteq\sqrt[3]{1+3\,.\,1,5874}\doteq\sqrt[3]{5,7622}\doteq1,7928$$

$$x_3\doteq\sqrt[3]{1+3\,.\,1,7928}\doteq\sqrt[3]{6,3784}\doteq1,8546$$

$$x_4\doteq\sqrt[3]{1+3\,.\,1,8546}\doteq\sqrt[3]{6,5638}\doteq1,8723$$

$$x_5\doteq\sqrt[3]{6,6169}\doteq1,8774$$

$$x_6\doteq\sqrt[3]{6,6322}\doteq1,8788$$

$$x_7\doteq\sqrt[3]{6,6364}\doteq1,8792$$

$$x_8\doteq\sqrt[3]{6,6376}\doteq\underline{1,8793}$$

і

$$x_9\doteq\sqrt[3]{6,6379}\doteq1,8793$$

[1]) Пры помачы табліц лёгарытмаў.

Увага.—Калі-б заданая дакладнасьць была абмяжована толькі 4 знакамі, то адказ $x \doteq 1{,}879$ мы-б знайшлі не на 7-ай ітэрацыі (як гэта можа здавацца на першы погляд), а на 5-ай.

Для знаходжаньня другога рачавістага разьвязка (калі толькі раўнаньне яго мае) дзелім раўнаньне (А) на x і дабываем з абедзьвюх яго частак корань (n—1)-ай ступені [1]). Тады атрымаем:

$$x = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{x} + a_{n-1} + a_{n-2}x + \ldots + a_1 x^{n-2}}$$

або

$$x = \sqrt[n-1]{a_{n-1} + \frac{a_n}{x} + a_{n-2}x + \ldots + a_1 x^{n-2}}$$

Першае прыбліжэньне гэтага разьвязка будзе:

$$x_1 \doteq \sqrt[n-1]{a_{n-1} + \frac{a_n}{\sqrt[n-1]{a_{n-1}}} + a_{n-2}\sqrt[n-1]{a_{n-1}} + \ldots + a_1 \cdot \sqrt[n-1]{a_{n-1}^{n-2}}}$$

Другім прыбліжэньнем будзе:

$$x_2 \doteq \sqrt[n-1]{a_{n-1} + \frac{a_n}{x_1} + a_{n-2} \cdot x_1 + \ldots + a_1 \cdot x_1^{n-2}} \quad \text{і г. д.}$$

Трэці рачавісты разьвязак знойдзем пры помачы дзяленьня раўнаньня (А) на x^2 і дабываньня корня (n—2)-ай ступені. Тады атрымаем

$$x = \sqrt[n-2]{\frac{a_n}{x^2} + \frac{a_{n-1}}{x} + a_{n-2} + a_{n-3} \cdot x + \ldots + a_1 \cdot x^{n-3}}$$

або

$$x = \sqrt[n-2]{a_{n-2} + \frac{a_n}{x^2} + \frac{a_{n-1}}{x} + a_{n-3}x + \;.\;\;.\;\;.\; + a_1 x^{n-3}} \quad \text{і г. д.}$$

Лёгка відаць, што калі толькі лік рачавістых разьвязкаў, напр. κ, менш за ступень раўнаньня, то пэўныя κ опэрацый дадуць нам κ рачавістых разьвязкаў, а пазасталыя дадуць нам некаторыя з знойдзеных раней значэньняў. Гэта пакажа, што пазасталыя разьвязкі-уяўныя.

У гэтым выпадку прыходзіцца ўводзіць у вылічэньне першпачатковыя корні n-ай ступені з 1, г. зн. разьвязкі двучленнага раўнаньня

$$\alpha^n - 1 = 0,$$

а іменна:

$$\alpha_k = cs\frac{2\kappa\pi}{n} + i\; sn\frac{2\kappa\pi}{n}$$

Тады першым прыбліжэньнем будзе:

$$x_1 \doteq \alpha_k \sqrt[n]{a_n + a_{n-1} \cdot \alpha_k \sqrt[n]{a_n} + a_{n-2}\alpha_k^2 \sqrt[n]{a_n^2} + \ldots + a_1\, \alpha_k^n - \sqrt[n]{a_n^{n-1}}}$$

Другім прыбліжэньнем будзе:

$$x_2 \doteq \alpha_k \sqrt[n]{a_n + a_{n-1}\, x_1 + a_{n-2} x_1^2 + \ldots + a_1\, x_1^{n-1}} \quad \text{і г. д.}$$

[1]) У выпадку раўнаньня цотнай ступені для знаходжаньня другога разьвязка лепей браць корань n-ай ступені з знакам мінус. Напр. для раўнаньня $x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x - 13 = 0$ узяць $x = -\sqrt[4]{13 + 3x - x^2 - 2x^3}$ адкуль першае прыбліжэньне будзе:

$$x_1 \doteq -\sqrt{13 - 3\sqrt[4]{13} - \sqrt[4]{13^2} + 2\sqrt[4]{13^3}}$$

Такім шляхам мы вылічым усе ўяўныя разьвязкі, калі толькі данае раўнаньне мае іх. У праціўным выпадку ўвесь шэраг такіх опэрацый прывядзе нас ізноў да значэньня першага (або першых двух) рачавістага разьвязку[1]).

§ 4. Лікавы прыклад.

Для ілюстрацыі вылажанага мэтоду дэдукцыйнай ітэрацыі разьвяжам раўнаньне, дадзенае Б. Кояловічам у яго лекцыях (1923, стар. 85):

$$x^5-5x+1=0$$

На аснове формулы (*B*) маем:

$$x=\sqrt[5]{-1+5x}$$

Першым прыбліжэньнем першага рачавістага разьвязку будзе (з 4 знакамі):

$$x_1\doteq\sqrt[5]{-1+5\sqrt[5]{-1}}\doteq\sqrt[5]{-1-5}\doteq\sqrt[5]{-6}\doteq-\sqrt[5]{6}\doteq-1{,}431$$

Далей пойдуць:

$$x_2\doteq\sqrt[5]{-1-5.\ 1{,}431}\doteq-\sqrt[5]{8{,}155}\doteq-1{,}522$$

$$x_3\doteq\sqrt[5]{-1-5.\ 1{,}552}\doteq-\sqrt[5]{8{,}610}\doteq-1{,}538$$

$$x_4\doteq\sqrt[5]{-1-5.\ 1{,}538}\doteq-\sqrt[5]{8{,}690}\doteq-1{,}541$$

$$x_5\doteq\sqrt[5]{-1-5.\ 1{,}541}\doteq-\sqrt[5]{8{,}705}\doteq-1{,}542$$

і, урэшце:

$$x_6\doteq\sqrt[5]{-1-5.\ 1{,}542}\doteq-\sqrt[5]{8{,}710}\doteq-1{,}542$$

(Большая дакладнасьць дае —1,541652)

Другі рачавісты разьвязак знойдзем наступным чынам:

$$x^5=5x-1$$

$$x^4=5-\frac{1}{x}$$

$$x=\sqrt[4]{5-\frac{1}{x}}$$

$$x_1\doteq\sqrt[4]{5-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}}\doteq\sqrt[4]{5-0{,}669}\doteq\sqrt[4]{4{,}331}\doteq1{,}442$$

$$x_2\doteq\sqrt[4]{5-\frac{1}{1{,}442}}\doteq\sqrt[4]{5-0{,}694}\doteq\sqrt[4]{4{,}306}\doteq1{,}440$$

і, урэшце

$$x_3\doteq\sqrt[4]{5-\frac{1}{1{,}440}}\doteq\sqrt[4]{5-0{,}694}\doteq\sqrt[4]{4{,}306}\doteq1{,}440$$

(Большая дакладнасьць дае 1,440499).

---

[1]) На практыцы гэта выліваецца ў наступную форму. Нейкае *m*-ае прыбліжэньне будзе:

$$x_m\doteq(\alpha+\beta i)\sqrt[n]{A+Bi}\doteq(\alpha+\beta i)\ .\ (M+Ni)\doteq\alpha M-\beta N+(\beta M+\alpha N)\,i.$$

прычым выраз ($M\beta+\alpha N$) будзе прадстаўляць 0 цэлых і столькі нулёў пасьля коскі, якая ступень дакладнасьці, г. зн. уяўная частка прападае і застаецца толькі рачавістая.

Для адшуканьня трэцяга рачавістага разьвязка ізолюем x у першай ступені.

Тады маем:

$$x=\frac{1}{5}+\frac{x^5}{5}$$

$$x_1 \doteq \frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^5 \doteq 0{,}2+0{,}2^6 \doteq 0{,}2+0{,}000064 \doteq 0{,}2$$

Ясна, што 0,2 і будзе шуканым значэньнем трэцяга разьвязка, бо x_2 дасьць паўтарэньне яго.
(Большая дакладнасьць дае *як-раз* 0,200064).

Чацьвёрты і пяты разьвязкі данага раўнаньня будуць пэўна ўяўнымі, бо пры дзяленьні яго на x^2 і на x^3 мы не атрымліваем вольнага члена. Для знаходжаньня гэтых разьвязкаў выпішам першапачатковыя корні пятай ступені з I.

Яны будуць:

$$\alpha=cs72^0+i\ sn72^0$$
$$\alpha^2=-cs36^0+i\ sn36^0$$
$$\alpha^3=-cs36^0-i\ sn36^0$$
$$\alpha^4=cs72^0-i\ sn72^0$$

Тады будзем мець *(для чацьвёртага разьвязка)*:

$$x=\alpha\sqrt[5]{-1+5\alpha\,.\,x}$$

Першае прыбліжэньне дасьць:

$$x_1 \doteq \alpha\sqrt[5]{-1+5\alpha\sqrt[5]{-1}} \doteq (cs72^0+i\ sn72^0)\sqrt[5]{-1-5\,(cs\,72^0+i\,sn72^0)} \doteq$$

$$\doteq (cs72^0+i\,sn72^0)\sqrt[5]{-1-5(0{,}3090+0{,}9511\ i)} \doteq$$

$$\doteq (cs72^0+i\ sn72^0)\sqrt[5]{-2{,}545-4{,}755\ i}$$

Хай $\sqrt[5]{-2{,}545-4{,}755\ i}=\rho(cs\varphi+i\ sn\varphi)$

Тады $\rho \doteq \sqrt[5]{\sqrt{2{,}545^2+4{,}755^2}} \doteq \sqrt[10]{29{.}07} \doteq 1{,}401$

$$tg\ 5\varphi \doteq \frac{4{,}755}{2{,}545};\ 5\varphi \doteq 61^0 51';\ \varphi \doteq 12^0\ 22'$$

Адсюль

$x_1 \doteq \rho[cs\ (72^0+\varphi)+i\ sn\ (72^0+\varphi)] \doteq 1{,}401\ (cs\ 84^0\ 22'+i\,sn\ 84^0\ 22')$

Паўтарыўшы гэткую опэрацыю пару разоў, атрымаем канчаткова

$$x_4 \doteq 1{,}500.\ (cs\ 91^0\ 53'+i\ sn\ 91^0\ 53').$$

Адкуль спрэжаны разьвязак:

$$x_5 \doteq 1{,}500\ (cs\ 91^0\,53'-i\ sn\ 91^0\ 53')$$

Большая дакладнасьць дае:

$$x_{4,5} \doteq 1{,}500256.\ (cs91^0 53' 21'' \pm i\,sn91^0 53' 21''\ ]$$

Раўнаньне разьвязана.

§ 5. Заключэньне.

Як бачым, з пункту погляду *мэтодолёгічнага* мэтод дэдукцыйнай ітэрацыі валадае некаторымі плюсамі, якія заключаюцца ў поўнай дэдукцыйнасьці, у неабавязковасьці рацыянальных і цэлых коэфіцыентаў у неабавязковасьці прыведзенай формы, у неабавязковасьці аддзяленьня разьвязкаў і, урэшце, у вылічэньні з наперад заданай дакладнасьцю.

З пункту погляду *мэтодычнага* гэты мэтод валадае плюсам, які заключаюцца ў яго элементарнасьці (прынамсі ў стасунку да вылічэньня рачавістых разьвязкаў).

Затое з пункту погляду *практычнага* гэты спосаб, наагул кажучы, менш выгодны, чымся спосаб Ньютона і Дандэлена, бо аднімае больш часу, асабліва ў разе знаходжаньня ўяўных разьвязкаў. У адным толькі выпадку мэтод гэты зьяўляецца больш выгодным, чымся памянёныя спосабы—гэта ў выпадку неабходнасьці знайсьці толькі рачавістыя разьвязкі няпоўнага раўнаньня (асабліва, калі апошняе мае вялікія коэфіцыенты). Тутака аддзяленьне разьвязкаў па спосабу, напрыклад, Штурма і наступныя опэрацыі Ньютонаўскага спосабу аднімаюць вельмі многа часу, тады як мэтод дэдукцыйнай ітэрацыі ў гэтым выпадку хутчэй прыводзіць да супадзеньня прыбліжэньняў.

A. Kroutalevitch

Résolution approchée des équations numériques d'après la méthode de l'itération déductive

Resumé

L'objet de cette note est l'application d'une méthode, que l'auteur a nommée l'itération déductive, pour la résolution approchée des équations numériques algébriques.

Cette méthode se base sur le fait très simple suivant.

Chaque équation, présentée sous la forme

$$x = \varphi\ (a, x)$$

oú a est une grandeur constante, peut être représentée aussi comme

$$x = \varphi\ [a, \varphi' a, x)]$$

ou

$$x = \varphi\{a, \varphi[a, \varphi\ (. \ . \ . \ . \ . \ .)]\},$$

c'est à dire comme un nombre infini d'opérations identiques, qui se repètent.

Par exemple, soit

$$x = a + \varphi(x)$$

Alors nous avons

$$x = a + \varphi[a + \varphi(x)] = a + \varphi\{a + \varphi[a + \varphi(. \ . \ . \ . \ . \ .)]\}$$

Interrompant cette série d'opérations sur un point certain, nous avons une valeur approchée de x.

Chaque équation algébrique de la grade n peut être représentée sous la forme

$$x^n = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \ . \ . \ . \ . \ . \ + a_1 x^{n-1}$$

ou

$$x = \sqrt[n]{a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \ . \ . \ . \ . \ . \ + a_1 x^{n-1}}$$

Il est clair, que la première approximation de x est

$$x_1 \doteq \sqrt[n]{a_n + a_{n-1}\sqrt[n]{a_n} + a_{n-2}\sqrt[n]{a_n^2} + \ . \ . \ . \ . \ . \ + a_1\sqrt[n]{a_n^{n-1}}}$$

La 2-me approximation est

$$x_2 \doteq \sqrt[n]{a_n + a_{n-1}x_1 + a_{n-2}x_1^2 + \ . \ . \ . \ . \ . \ + a_1 x_1^{n-1}} \qquad \text{etc.}$$

L'auteur illustre cette idée par des exemples numériques.

Einige Vereinfachungen des geometrischen Axiomensystems von Oswald Veblen

und das Problem seiner weiteren Unvereinfachbarkeit

von

Cz. Dąbrowski in Minsk

Die Axiome der Geometrie von O. Veblen („Transactions of the American Mathematical Society", vol. 5, number 3, July 1904, Artikel: „A system of axioms for geometry") sind die folgenden:

I. Es existieren zum mindesten zwei verschiedene Punkte.

II. Wenn A ein Punkt, B ein Punkt, C ein Punkt in der Ordnung ABC ist, so sind sie in der Ordnung CBA.

III. Wenn A ein Punkt, B ein Punkt, C ein Punkt in der Ordnung ABC ist, so sind sie nicht in der Ordnung BCA.

IV. Wenn A ein Punkt, B ein Punkt, C ein Punkt in der Ordnung ABC ist, so ist A verschieden von C.

V. Sind A und B irgend zwei verschiedene Punkte, so existiert ein Punkt C, sodass A, B, C in der Ordnung ABC sind.

VI. Wenn wir definieren: „Die Gerade AB ($A \neq B$) ist die Vereinigung von A, B und von allen Punkten X in einer der möglichen Ordnungen ABX, AXB, XAB", – und wenn die Punkte C und D ($C \neq D$) auf der Geraden AB liegen, so liegt A auf der Geraden CD.

VII. Existieren drei verschiedene Punkte, so existieren drei Punkte A, B, C in keiner der Ordnungen ABC, BCA, CAB.

VIII. Liegen irgend drei verschiedenen Punkte A, B und C nicht auf ein und derselben Geraden und sind D und E zwei Punkte in den Ordnungen BCD und CEA, so existiert ein Punkt F in der Ordnung AFB und zwar ein solcher, dass D, E, F in ein und derselben Geraden liegen.

IX. Wenn wir definieren: „Die Punkte X in der Ordnung AXB ($A \neq B$) bilden die Strecke AB. A und B sind die Endpunkte der Strecke. Drei verschiedene Punkte A, B, C, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, sind die Ecken eines Dreiecks ABC, dessen Seiten die Strecken AB, BC, CA sind und dessen Umriss von seinen Ecken und den Punkten seiner Seiten gebildet ist. Punkte, die in ein und derselben Geraden liegen, werden kollinear genannt (loc. cit., Seite 355). Wenn A, B, C ein Dreieck bilden, so ist die Ebene ABC von allen mit irgend zwei Punkten der Seiten dieses Dreiecks kollinearen Punkten gebildet"—und wenn drei nicht in ein und derselben Geraden liegende Punkte existieren, so gibt es eine Ebene ABC, sodass ein Punkt D existiert, der nicht in der Ebene ABC liegt.

X. Wenn wir definieren: „Ein Punkt O ist in der Fläche eines Dreiecks, wenn er auf einer Strecke liegt, deren Endpunkte Punkte verschiedener Seiten dieses Dreiecks sind. Die Gesamtheit dieser Punkte O ist die Fläche des Dreiecks. Sind A, B, C und D vier nicht in ein und

derselben Ebene liegende Punkte, so bilden sie ein Tetraëder ABCD, dessen Wände die Flächen der Dreiecke ABC, BCD, CDA, DAB sind (wenn diese Dreiecke existieren), dessen Ecken die vier Punkte A, B, C und D sind und dessen Kanten („edges") die Strecken AB, BC, CD, DA, AC, BD sind. Sind A, B, C, D Ecken eines Tetraëders, so besteht der Raum ABCD aus allen mit irgend zwei Punkten der Wände dieses Tetraëders kollinearen Punkten",—und wenn vier Punkte existieren, die weder in ein und derselben Geraden, noch in ein und derselben Ebene liegen, so existiert ein Raum ABCD, sodass kein mit irgend zwei Punkten des Raumes ABCD nichtkollinearer Punkt E existiert.

XI. Existiert eine unendliche Menge („an infinitude") von Punkten, so existiert ein gewisses Paar von Punkten AC, ein solches, dass, wenn [ς] irgend eine unendliche Menge von Strecken der Geraden AC ist, die die Eigenschaft hat, dass jeder Punkt, der A, C oder ein Punkt der Strecke AC sein kann, ein Punkt einer der Strecken ς ist,—dann existiert eine endliche Teilmenge $\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_n$ mit derselben Eigenschaft.

XII. Ist a irgend eine Gerade von irgend einer Ebene α, so existiert ein gewisser („some") Punkt C von α, durch welchen es nicht mehr als eine Gerade der Ebene α gibt, die a nicht schneidet.

O. Veblen hat (loc. cit.) die Unabhängigkeit all seiner Axiome bewiesen. Ich werde hier nur die Proben der Unabhängigkeit der Axiome III, V, VI, VII und VIII nach O. Veblen anführen. Diese Proben sind „finite", d. h. mit Hilfe von endlichen Punktmengen K durchgeführt.

Er nimmt folgende Systeme:

S $\{3, 2, 5\}$:

123, 234, 345, 451, 512 : 135, 352, 524, 241, 413,
321, 432, 543, 154, 215 : 531, 253, 425, 142, 314.

S [3, 2, 7]: 7 Dreien:

013, 124, 235, 346, 450, 561, 602.

S [5, 2, 21]: 21 Fünfen:

0	1	6	8	18,
1	2	7	9	19,
2	3	8	10	20,
3	4	9	11	0,
4	5	10	12	1,
5	6	11	13	2,
6	7	12	14	3,
7	8	13	15	4,
8	9	14	16	5,
9	10	15	17	6,
10	11	16	18	7,
11	12	17	19	8,
12	13	18	20	9,
13	14	19	0	10,
14	15	20	1	11,
15	16	0	2	12,
16	17	1	3	13,
17	18	2	4	14,
18	19	3	5	15,
19	20	4	6	16,
20	0	5	7	17.

Die Probe des VIII. Axioms gibt O. Veblen mit Hilfe von K_8 aus 21 Elementen des Systems S [5, 2, 21], wobei in jeder Fünf alle Permutationen vom Typus S {3, 2, 5} als „Ordnungen" gelten. Die Punkte 0, 1, 2 liegen nicht in ein und derselben Fünf („Gerade"). Wenn im Texte des Axioms VIII A=0, B=1, C=3 sind, so sind D=13, E=9. Der Schnittpunkt F der Geraden DE und AB ist 18, sodass A, B, F in der Ordnung FAB sind.

K_7 ist eine Gesamtheit von 5 Punkten 1, 2, 3, 4, 5. Die Punkte A, B, C sind in der Ordnung ABC stets und nur, wenn sie eine Drei ABC im System S {3, 2, 5} bilden.

K'_7—eine andere Probe der Unabhängigkeit des Axioms VII—ist eine Gerade mit gewöhnlichen Ordnungsbeziehungen.

K_6 ist eine Gesamtheit von 26 Punkten P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Die Punkte ABC sind in der Ordnung ABC stets und nur, wenn sie eine Drei in einer der Dreienmengen:

P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, geordnet nach S {3, 2, 5},

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, geordnet nach S [5, 2, 21], wie in der Probe des Axioms VIII,

$P_i\ h\ P_j$ ($i, j=1, 2, 3, 4, 5, i \neq j, h=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$),

$h\ P_i\ k$ ($h, k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, h \neq k, i=1, 2, 3, 4\ 5$)
bilden.

Somit existieren die Ordnungen OP_11 und $1P_12$, nicht aber 012, 120, noch 201.

K_5 ist nur aus zwei Punkten 1 und 2 gebildet, wobei die Punkte A, B, C in der Ordnung ABC gelten, wenn $A \neq B \neq C \neq A$.

Von den drei von Oswald Veblen gegebenen Proben der Unabhängigkeit des Axioms III erwähne ich nur zwei:

K'_3 besteht aus 7 Punkten 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, wobei die Punkte A, B, C in der Ordnung ABC gelten, wenn sie verschieden sind und eine Drei aus dem System S [3, 2, 7] bilden. Die „Gerade" wird eine Drei von Punkten sein. Die „Ebene" 123 besteht aus den kollinearen Punkten 4, 5, 0. Das Tetraëder 0124 hat als Wände die Flächen der Dreiecke 012, 024, 041 (nicht aber 124); diese Flächen bestehen aus den Dreien 364, 165, 325. Der Raum 0124 enthält alle 7 Punkte.

K''_3 besteht aus allen Punkten der gewöhnlichen projektiven Geometrie, wobei die Punkte A, B, C in der Ordnung ABC gelten, wenn sie verschieden sind und ein und derselben projektiven Geraden angehören.

Im Jahre 1911 hat Oswald Veblen in einem Artikel der populären Schrift u. d. T. „Monographs on topics of Modern Mathematics relevant to the elementary field", herausgegeben von J. W. A. Young in New-York, sein Axiom IV noch in folgender Weise verstärkt (loc. cit., II, „Assumption I"): „Wenn die Punkte A, B, C in der Ordnung { ABC } sind, dann sind sie verschieden".

Dann gelang es ihm, sein Axiom II als ein Theorem (loc. cit., Seite 6, Theorem 1) mit Hilfe der Axiome VI, III und der „Assumption 1" zu beweisen. Er hat auch sein Axiom VII durch Weglassen der vorangestellten Voraussetzung verstärkt und in diesem Zusammenhang natürlich auch sein Axiom I (s. oben) weggelassen.

Meine Untersuchungen bewegten sich dagegen in anderer Richtung.

Wir können nicht nur das Axiom VII, sondern auch die Axiome VI und VIII in folgender Weise ein wenig verändern (und damit verstärken):

„6′. Wenn wir definieren: „Die Punkte A, B, C in einer der Ordnungen ABC, CAB, BCA, CBA, BAC, ACB heissen kollinear („Cl" nach Peano)", und wenn die Punkte A, B, C Cl sind und A, B, D Cl sind, $C \neq D$, so gibt es eine der Ordnungen DCA, CDA oder CAD.

7′. (vgl. Veblen, Art. in „Monographs", „Assumption VI", Seite 6),— Es existieren drei nichtkollineare Punkte.

(Ohne vorangestellte Voraussetzung von VII).

8′. Sind die Punkte A, B, C ($A \neq B$) nicht kollinear, und sind D, E Punkte in den Ordnungen BCD und CEA, so existiert ein Punkt F in der Ordnung AFB und zwar ein solcher, dass D, E, F ein und derselben Geraden angehören".

(Die Definition der Geraden bleibt die vorige).

Dann können wir nicht nur die Axiome I und II, sondern auch das Axiom IV als ein Theorem beweisen:

1) Das Axiom I ist offenbar eine Folge von 7′.

2) Aus 6′ folgt unmittelbar:

Sind A, B, C Cl und A, B, D Cl, $C \neq D$, so sind C, D, A Cl.

3) Gehören Punkte X, Y, Z ein und derselben Geraden an und sind sie voneinander verschieden, so sind sie Cl.

In der Tat, wenn diese Punkte einer Geraden AB angehören und wenn:

a) weder A noch B mit einem der Punkte X, Y, Z zusammenfällt, so sind A, B, X Cl, A, B, Y Cl, A, B, Z Cl, $X \neq Y \neq Z \neq X$, folglich nach 2) sind X, Y, A Cl, sowie auch Y, Z, A Cl, und da $X \neq Z$, so sind wieder nach 2) : X, Y, Z Cl.

b) $A = X$, $Y \neq B \neq Z$. Dann sind X, B, Y Cl und X, B, Z Cl, wobei $Y \neq Z$, folglich nach 2): Y, Z, X Cl.

c) $A = X$, $B = Y$. Dann sind A, B, Z Cl, d. i. X, Y, Z Cl.

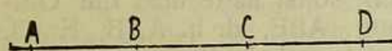
Folglich ist 3) immer wahr.

4) Die Ordnung AAA ist unmöglich.

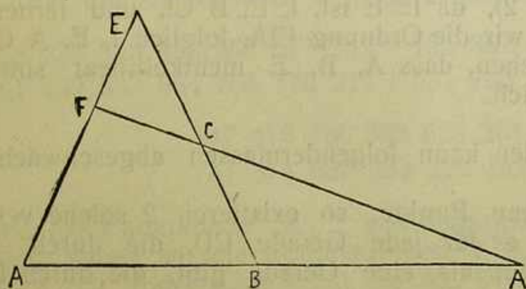
In der Tat, sie widerspricht dem Axiom III.

5) Das Axiom II ist bei $B \neq C \neq A$ wahr.

In der Tat, in diesem Falle bedingt die Ordnung ABC folgendes: nach dem Ax. V existiert ein Punkt D in der Ordnung BCD, der nach dem Ax. III von A verschieden ist. Dann sind nach 2) : A, D, B Cl, sowie auch A, D, C Cl. Aber $B \neq C$, folglich, nach 6′, gibt es eine der Ordnungen CBA, BCA oder CAB. Bei der Ordnung ABC aber widersprechen die Ordnungen BCA und CAB dem Ax. III, folglich existiert die Ordnung CBA, was zu beweisen war.



6) Die Ordnung AAB ist unmöglich.



In der Tat, im Falle $A = B$ haben wir schon ihre Unmöglichkeit in 4) gesehen, und in dem Falle $A \neq B$ hat sie, nach 5), die Ordnung BAA zur Folge, welche mit ihr nach dem Axiom III unvereinbar ist.

7). Die Ordnung ABA bei $A \neq B$ ist unmöglich.

Nehmen wir das Gegenteil an, soexistiert nach 7 ein Punkt C, verschieden von A und von B und mit denselben nichtkollinear. Nach dem Ax.V existiert ein Punkt E in der Ordnung BCE.

Die Punkte A, B, E sind nicht Cl. Sonst wäre bei B, E, C Cl, B, E, A Cl und bei $C \neq A$, nach 2), C, A, B Cl, was gegen unsere Annahme ist.

Der Punkt E ist von A verschieden (wir wissen aber noch nicht, ob er von B verschieden ist). Sonst wäre die Ordnung BCA und folglich A, B, C Cl, was gegen die Annahme ist.

Wir können folglich das Ax. 8′ anwenden, wonach wir einen Punkt F in der Ordnung EFA haben, der mit C und A auf ein und derselben Geraden liegt.

Es ist $F \neq C$, sonst hätten wir infolge der Ordnung EFA die Ordnung ECA und folglich A, C, E Cl. Aber A, C, E Cl ist unmöglich, weil bei B, C, E Cl und $A \neq B$ sie nach 2) A, B, C Cl geben würde, was gegen die Annahme ist.

Ferner haben wir $C \neq A$ und $F \neq A$ (da A, A, E Cl bei $E \neq B$ nach 2) E, B, A Cl geben würde, und wir schon die Unmöglichkeit von A, B, E Cl bewiesen haben). Folglich sind, nach 3), F, C, A Cl.

Dann aber sind A, F, E Cl und A, F, C Cl, $E \neq C$, folglich nach 2): E, C, A Cl, was unmöglich ist, wie wir schon oben gesehen haben.

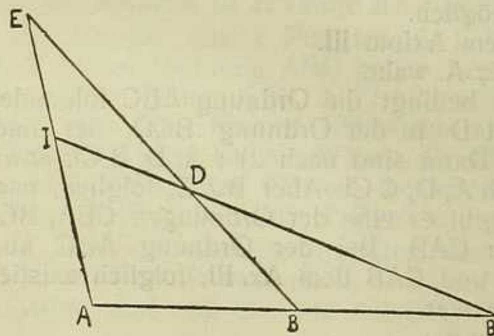
In diesem Beweise ist, da E mit B zusammenfallen kann, die neue Formulierung von 2) in Vergleich mit Ax. VI O. Veblens wesentlich, da in dem letzten $A \neq B$ ist und folglich im Falle A, B, E Cl, C, B, E Cl, $A \neq C$, aber $B = E$ man aus VI keine Schlüsse ziehen könnte.

7) und 4) beweisen das Axiom IV O. Veblens vollständig.

8) Die Ordnung ABB bei $A \neq B$ ist unmöglich.

Bei den neuen Formulierungen und ohne Ax. II kann dies nicht so einfach, wie in dem Artikel von O. Veblen von 1904 (auf Grund der Axiome II und III) bewiesen werden.

Nehmen wir doch die Ordnung ABB an. Dann nach 7′ existiert ein Punkt D, verschieden von A und von B und mit ihnen nichtkollinear. Nach Ax. V existiert ein Punkt E in der Ordnung BDE. Es ist $E \neq A$, sonst wären A, D, B Cl. Die Punkte A, B, E sind nicht kollinear, sonst wären nach 2) A, D, B Cl. Nach 8′ existiert ein Punkt I, in der Ordnung EIA, der mit den Punkten D und B ein und derselben Geraden angehört. Es ist $I \neq B$, sonst hätte man die Ordnung ABE, d. h. A, B, E Cl. Es ist auch $I \neq D$, sonst wären nach 2) infolge der Ordnung ADE, d. h. E, D, A Cl, auch A, B, D Cl. Folglich sind nach 3): I, D, B Cl. Dann sind, nach 2), da $I \neq E$ ist, I, E, B Cl, und ferner, wieder nach 2), A, B, E Cl (da wir die Ordnung EIA, folglich I, E, A Cl haben). Aber wir haben oben gesehen, dass A, B, E nichtkollinear sind. Endlich $I = E$ ist nach 6) unmöglich.

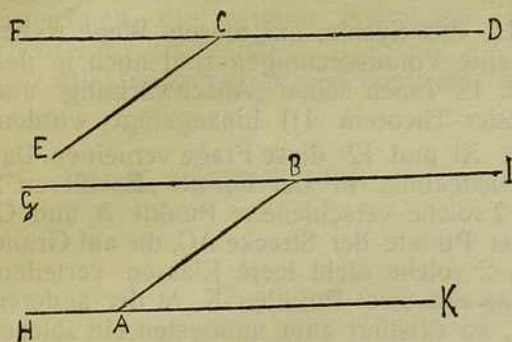


Das Axiom XII von O. Veblen kann folgendermassen abgeschwächt werden:

„12′. Existieren 2 verschiedene Punkte, so existieren 2 solche verschiedene Punkte A und B, dass es für jede Gerade CD, die durch A geht, in der Ebene BCD nicht mehr als eine Gerade gibt, die durch B geht und CD nicht schneidet“.

Denn da durch jeden Punkt, der ausser der Ebene CDB liegt, auch nur eine Parallele (im Sinne Gauss') zu CD geht, was leicht nach Bonola

(Artikel in den „Questioni riguardanti la geometria elementare" unter der Red. von Enriques, 1900, II Teil) bewiesen werden kann,—so ist es auch für den ganzen Raum für alle Gerade der Richtung von CD wahr. Und dann ist es noch—um das vorige Ax. XII abzuleiten—nur für die Gerade AB selbst und irgend einen ausser ihr liegenden Punkt C zu beweisen.



Nehmen wir an, dass durch C zwei Parallelen CD zu AB und CE zu BA (der Richtung nach) gehen. CF sei die Verlängerung von CD, BG—die Parallele zu CF durch B, und AH—durch A, BI—die Verlängerung von BG, und AK—die Verlängerung von **AH.**

Dann ist AH parallel zu BG, also nach 12′ auch AK zu BI. Da AH≠BA (der Richtung nach) ist (wäre AH=BA, so wären CF parallel zu BA und CE parallel zu BA, was in ein und derselben Richtung nicht möglich ist),—so ist AK≠AB. Auch ist nach obigem CD parallel zu AK, aber CD ist parallel zu AB, also AB=AK—ein Widerspruch mit dem oben Bewiesenen.

Es geht also auch durch irgend einen Punkt ausser der Geraden AB nur eine Parallele zu dieser Geraden AB, was noch zu beweisen war.

Die Unabhängigkeitsproben, die O. Veblen für die Axiome VIII und VII gegeben hat, gelten auch für 8′ und 7′. Die oben erwähnten Proben von III mittels K'_3 und K''_3 behalten auch ihre Geltung. Aber die Veblenschen Proben der Ax. VI und V gelten nicht mehr. Denn K_5 enthält nur 2 verschiedene Punkte, und nach 7′ existieren 3 verschiedene Punkte. In K_6 gehören alle Punkte der Geraden P_1 P_2 an und somit ist die Bedingung des Ax. VIII nicht erfüllt, die Punkte 0, 1, 2 sind aber nicht nach der neuen Definition kollinear und somit ist die Bedingung des Ax. 8′ erfüllt, und doch ist dieses Axiom selbst nicht wahr, genauwie in K_8. Folglich muss man andere Unabhängigkeitsproben für Ax. V und 6′ bringen.

Für Ax. V nehmen wir K'_5 aus 4 Punkten ohne jede Ordnungsbeziehung. In der Tat ist die Existenz dieser Beziehung in der Punktklasse gerade nur vom Axiom V postuliert,—die übrigen Axiome enthalten diese Beziehung schon in den Bedingungen (Prämissen).

Fur 6′ nehmen wir ein System „S {3, 7}" aus 7 Elementen nach dem Muster des Veblenschen S {3, 2, 5} mit den „Ordnungen":

123 234 345 456 567 671 712 : 135 357 572 724 246 461 613 :
321 432 543 654 765 176 217 : 531 753 275 427 642 164 316 :

147 473 736 362 625 251 514
741 374 637 263 526 152 415

und die Punktklasse „K'_6" aus denselben 7 Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Dann haben wir die Kollinearitäten 2, 3, 1 Cl, 2, 3, 4 Cl, nicht aber 1, 2, 4 Cl (oder 1, 3, 4 Cl). Im Ax. IX besteht die „Ebene" 124 nur aus 1, 2, 4 und 7, folglich gehört ihr z. B. der Punkt 5 nicht an.

Alle 7 Punkte gehören dem „Raume" (nach der „tetraëdrischen" Definition von O. Veblen—das Tetraëder 1245 hat nur zwei „Wände" 124

und 245) 1245 an und jeder von ihnen ist mit seinen zwei Punkten, in Uebereinstimmung mit dem Axiom X von O. Veblen, kollinear.

Uns ist es gelungen, das Axiom IV von O. Veblen zu beweisen, u. a. dadurch, dass wir die vorangestellte Voraussetzung „Existieren 3 verschiedene Punkte, so...“ im Axiom VII von O. Veblen weggelassen haben.

Es entsteht also die Frage: Ist das System auf diesem Wege weiter vereinfachbar? Aehnliche vorangestellte Voraussetzungen sind noch in den Ax. IX, X, XI geblieben und in Ax. 12′ (nach seiner „Abschwächung“ und in Verbindung mit dem Axiom I oder Theorem 1)) hinzugefügt worden.

Wir müssen in Bezug auf IX, XI und 12′ diese Frage verneinen. Das Axiom XI kann durch das Axiom Dedekinds in der Form: „Existieren 2 verschiedene Punkte, so existieren 2 solche verschiedene Punkte A und C, dass, wenn wir die Gesamtheit aller Punkte der Strecke AC, die auf Grund aller übrigen Axiome existieren, in 2 solche nicht leere Klassen verteilen, dass kein Punkt H der einen Klasse mit zwei Punkten K, M der anderen Klasse in der Ordnung KHM liegt, so existiert zum mindesten ein solcher Punkt P, dass zwei Punkte X und Y der Strecke AC, die in der Ordnung XPY liegen, verschiedenen Klassen der gemachten Teilung angehören“— ersetzt werden.

Nach solcher Ersetzung können wir die Axiome 7′, IX, 12′ und das Axiom Dedekinds in ein Postulat mit vier Subpostulaten vereinigen:

„Es existieren 4 solche verschiedene Punkte A, B, C, D, dass:

1) die Punkte A, B, C nicht kollinear sind,

2) der Punkt D nicht der Ebene ABC angehört“;

als 3) folgt das Ax. 12′ für die Punkte A und B, ohne vorangestellte Voraussetzung,

als 4) folgt das Axiom von Dedekind für die Punkte A und C (oder A und B), ohne vorangestellte Voraussetzung.

Das Ax. X von O. Veblen könnte auch als ein fünftes Subpostulat in das obige Postulat (Axiom) eingehen. Aber wir können es gänzlich weglassen, wenn wir unser System zu einem explizite definitorischen machen, z. B. in folgender Weise (diesen Gedanken verdanke ich zum Teil meinem Warschauer Nachfolger Heinrich Kapłański):

1. In der Ordnung ABC liegend nennen wir die Objekte A, B, C, wenn sie in einer Beziehung bestehen, die folgenden 2 Postulaten genügt:

1,1. Ax. III ohne Prämissen: „Ist A ein Punkt“ u. s. w.

1,2. Ax. 6′ mit Ersetzung des Worts „Punkt“ durch das Wort „Objekt“ (im Allgemeinen).

2. Punktklasse nennen wir eine Menge, die folgenden 3 Postulaten genüge leistet:

2,1. Ax. V mit Ersetzung des Wortes „existiert“ durch die Worte: „der Punktklasse angehört“.

2,2. Ax. 8′ mit derselben Ersetzung.

2,3. Das obige Postulat mit 4 Subpostulaten, mit derselben Ersetzung.

3. Definition des Raumes nach O. Veblen.

Dann ist das Ax. X überflüssig, da wir nur die Geometrie des tetraëdrischen „Raums“ aufbauen und uns zur Zeit gar nicht mit der Frage der Existenz der ausser ihm liegenden Punkte beschäftigen. Bei solcher Anordnung wird die Definition 3 das Axiom X ersetzen.

Es werden formell nur 5 Axiome bleiben.

Ausserdem wird die Geometrie des tetraëdrischen Raums (in sich) **apodiktisch** und nicht mehr hypothetisch sein, da wir, anstatt zu sagen: „die Theoreme sind wahr, wenn die Axiome es sind", jetzt sagen können: „alle Theoreme sind unbedingt wahr, da ihre Objekte (Punkte, Gerade, Ebenen, Ordnungen u. s. w.) **nur** die Gegenstände und Beziehungen bezeichnen, die unseren Postulaten (Axiomen), und folglich auch den Theoremen genügen".

Dies wird logisch viel bequemer sein.

Minsk, den 28-XI 1927.

Н. Прилежаев

Органические галоидоокиси: Окисление перекисью бензоила хлор-1-гептен-1 и хлор-2-октен-2*)

Органические галоидоокиси с галоидом вне окисного кольца, хотя и немногочисленны по своим представителям, но изучены довольно подробно. Они являются вполне устойчивыми соединениями.

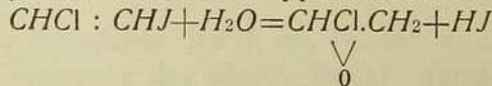
Окиси же с галоидом в самом окисном кольце до сих пор неизвестны. Попытки их получения производились не раз. Так Вюрц[1]) пытался получить бромокись этилена действием брома на окись этилена. Вещество, полученное им при этой реакции и принятое им за невполне обромленную окись этилена, давало при действии щелочи уксусную к. и камедеобразное вещество, окислявшееся в щавелевую к. Он полагает, что в руках имелась не вполне чистая бромокись этилена:



$$CH_2-CHBr+KOH=CH_3\ COOK+KBr+H_2O.$$
$$\underset{O}{\vee}$$

Однако Демоль[2]), повторяя опыты Вюрца, нашел, что бромокись Вюрца представляет сложную смесь, в которой не было бромокиси. Возможно, что Демоль и получил эту бромокись, видоизменив реакцию Вюрца. Он действовал $BrOH$ на $C_2\ H_3\ Br$ с дальнейшей обработкой полученного соединения едкой щелочью. Продукт реакции не изменялся от щелочей, восстанавливал раствор Фелинга и имел состав $C_2\ H_3\ Br\ O$. Незначительные выходы продукта заставили его прекратить дальнейшие опыты.

Сабанеев[3]), при нагревании с водой $C_2\ H_2\ JCl$ до 160^0, получил, по его словам, хлорокись этилена по уравнению:



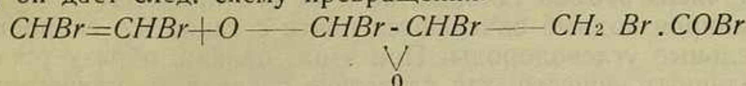
$$CHCl : CHJ+H_2O=CHCl.CH_2+HJ$$
$$\underset{O}{\vee}$$

Хлорокись не растворялась в воде и не восстанавливала аммиачного раствора окиси серебра. Однако, Сабанеев не приводит дальнейших доказательств своего предположения.

Бессон[4]), действуя озоном на тетрахлор-этилен, получил на ряду с другими продуктами и хлорокись состава CCl_2-CCl_2, вещество сильно взрывающее на воздухе. Однако и эта хлорокись ближе не была исследована. Автор лишь замечает, что количество углерода хорошо

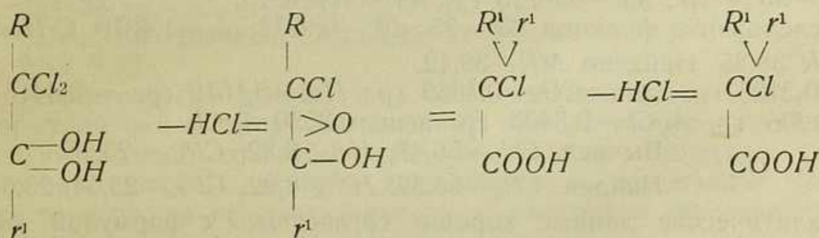
*) B. 59, 194, (1926)
1) An. Chem. Phys. (3), 69, 325;
2) B. 9, 51:
3) An. 216, 268
4) C. r 118, 1347.

отвечает формуле хлорокиси. Галоидоокиси этого порядка рассматриваются как соединения весьма нестойкие. Такому мнению много способствовали работы Демоля[5]) над окислением некоторых непредельных галоидопроизводных кислородом воздуха. По его данным реакция всегда приводила к галоидангидридам, как результат изомеризации первичного продукта по схеме: $CHBr{=}CHBr$ —— $CHBr:C+$ $+HBr+O$ —— $CH_2\,Br\,.\,C{\scriptstyle =O \atop \scriptstyle -Br}$; так как в этих условиях необходимо участие водорода, то Демоль делает заключение, что вполне галоидированные соединения типа $CGl_2:CGl_2$ окисляться не способны. Однако Анри[6]) показал, что $CCl\,(OCH_3):CCl_2$ чрезвычайно жадно поглощает кислород воздуха и дает $CCl_2\,(OCH_3).COCl$ омыляемое водой в щавелевую кислоту. Проводя аналогию между превращениями охлоренных простых и сложных эфиров под влиянием нагревания и охлоренными окисями, он дает след. схему превращения:

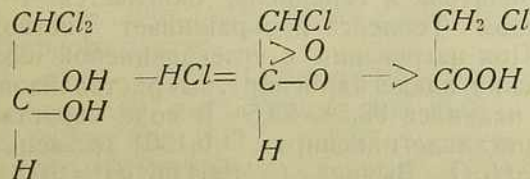


Таким образом бромокись рассматривается им как непрочный промежуточный продукт, изомеризующийся в галоидангидрид. Взгляд Анри, подкрепленный исследованиями Бессона над вполне галоидированными производными этилена и лег в основу представления, что при окислении подобно построенных соединений, образующиеся галоидоокиси, вследствие своей нестойкости, изомеризуются в галоидангидриды.

Этот вывод был широко использован А. Фаворским[7]) при исследовании реакции щелочей на охлоренные альдегиды и кетоны, где галоидоокиси допускаются как промежуточные фазы на пути превращения их в кислоты акрилового ряда по схеме для кетонов



и для альдегидов:



Это все, что до сих пор известно относительно галоидоокисей. Из обозрения видно, что опыты получения галоидоокисей ограничивались только галоидопроизводными самого этилена. Ни один из этих опытов не привел к безукоризненным результатам, поэтому и все заключения относительно свойств галоидоокисей нужно считать в значительной степени необоснованными.

---

[5]) B. 11, 315, 1302 (1878)
[6]) B. 12, 1838 (1879)
[7]) Ж. 26, 590, 27, 8

Настоящее исследование, являясь естественным продолжением моих работ над окислением непредельных соединений гидроперекисью бензоила, имеет в виду проверить на галоидированных этиленовых соединениях с галоидом при двойной связи схему окисления, данную раньше, установить химический характер галоидоокисей в случае их получения, а равным образом и их превращения под влиянием различных реагентов.

В качестве первых примеров, мною взяты монохлор-1-гептен-1 $C_5H_{11}CH:CHCl$ и монохлор-3-октен-2. $C_5H_{11}CCl:CH.CH_3$

Как и нужно было ожидать, окисление этих соединений протекает значительно медленнее соответствующих непредельных углеводородов. Вступлению отрицательного кислорода препятствует отрицательный же галоид. Равным образом опыт показывает, что скорость окисления колеблется в очень широких пределах в зависимости не только от числа атомов галоида, но и от его природы.

Бромопроизводные окисляются почти с такой же скоростью как и непредельные углеводороды. При этом, однако, образуется сложная смесь различных веществ, как следствие распада и кон'югации первичных неустойчивых бромокисей.

Экспериментальная часть

Окисление хлор—1 гептен—1, $C_5H_{11}.CH:CHCl$.

Исходный углеводород был получен действием пяти-хлористого фосфора на энантол с последующим отнятием HCl посредством щелочи. Т. к. 149°—150° при 733 мм. 37 гр. хлор-гептена были окислены в хлороформенном растворе 4,5 гр. актив. кислорода гидроперекиси бензоила. Реакция закончилась через 25 суток. Выделенный продукт профракционирован при 50 мм. Получены следующие фракции: 90°—93: 4 гр.; 93°—95°: 13 гр.; 95°—97°: 6 гр.

Исследование фракции 93°—95: $d_4^{16°}$—0,9874; n_D —1,4370. $C_7H_{13}OCl$. Выч. MR 38,85. Найдено MR—39,42.

— 0,2105 гр. вещ.: CO_2—0,4359 гр.; H_2O—0,1679 гр.; — 0,4418 гр. вещ: 0,4206 гр. $AgCl$; — 0,3403 гр. вещ.: 0,3250 $AgCl$.

$C_7H_{13}OCl$ < Вычисл. $C\%$—56,47; $H\%$ 8,82; $Cl\%$—23,86.
Найден. $C\%$—56,39; $H\%$ 8,92; $Cl\%$—23,54; 23,63.

Аналитические данные хорошо согласуются с формулой окиси хлоргептена. Хлорокись представляет бесцветную жидкость, с интенсивным запахом энантола и гераниола; окисляется 1% $KMnO_4$, дает зеркало с реактивом Толленса и окрашивает раствор фуксиносернистой кислоты. При нагревании с углекальциевой солью хлорокись дает кристаллический альдегидроспирт: выкристаллизованный из смеси эфир-лигроин он плавился 98,5°—99,5°. В воде нерастворим. Соединение дает все реакции альдегидоспирта. — 0,1801 гр. вещ.: 0,4255 гр. CO_2; 0,1771 гр H_2O. $C_7H_{14}O_2$. Вычисл.: $C\%$—64,56; $H\%$ 10,84.

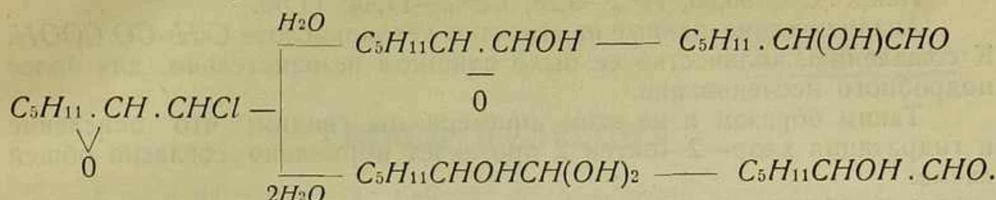
Найдено: $C\%$—64,44; $H\%$—10,92.

Воднощелочный раствор не исследовался. Однако, сравнительно небольшой выход альдегидоспирта заставляет предполагать, что действие щелочи идет не в одном только направлении.

Таким образом приведенные данные показывают, что реакция между гидроперекисью бензоила и хлор—1—гептен—1 протекает нормально и отвечает данной раньше схеме.

Скорость реакции значительно меньше, чем при окислении непред. углеводородов, благодаря чему и выход хлорокиси не превосходит 40%, так как значительная часть перекиси, очевидно, разру-

шается непроизводительно. При действии щелочи, хлорокись подвергается гидратации и дегидратации, или же гидратации и изомеризации в альдегидо-спирт по схеме:



Окисление хлор—2.—октен—2.

Хлор—2 октен—2 получен действием пятихлористого фосфора на метил—гексил кетон, при дальнейшей обработке щелочью.

Так как литературно хлор-октен не известен, то привожу его физические константы: Т. к. 84°—86° (50 мм); d^{16}_{16}—0,8923; n_D—1,4424 $C_8H_{15}Cl$. Выч. *MR* 43,38. Найд. *MR* 43.49.

— 0,2826 гр. вещ.: 0,2696 гр. $AgCl$. $C_8H_{15}Cl$. Вычисл.: Cl%—24,19. Найдено: Cl% 23,95.

90 гр. хлор-октена были окислены 10 гр. активного кислорода гидроперекиси. Реакция кончилась чрез 16 суток. Таким образом в этом случае скорость реакции была значительно больше, чем при хлор-гептене. Продукт реакции профракционирован при 21 мм., при чем получены след. фракции: 65°—75; 75°—81°: 10 гр.; 81°—82°: 25 гр. 83°—86°: 10 гр. Кроме того, значительный остаток не перегоняющийся без разложения.

Исследование фракции 81°—82°: $d^0_4$0,9755, d^{16}_4—0,9609, n_D—1,4359 $C_8H_{15}OCl$. Выч. *MR* 43,45. Найд. *MR* 43,22.

— 0,2228 гр. вещ.: 0,4953 гр. CO_2, 0,1920 гр. H_2O; — 0,2127 гр. вещ.: 0,4634 гр. CO_2 і 0,1791 гр. H_2O.

$C_8H_{15}OCl$. Вычисл. C% 59,20, H% 9,30. Найд. C% 59,20, 59,42; H% 9,35, 9,36.

Аналитические данные и в этом случае хорошо согласуются с формулой окиси хлор—2—октен—2. Вещество представляет бесцветную жидкость со слабым запахом исходного продукта. Оно медленно окисляется 1% $KMnO_4$, дает зеркало с аммиачным раствором окиси серебра, но не дает окраски с раствором фуксино-сернистой кислоты.

При нагревании 7 гр. хлорокиси с 10% K_2CO_3 получено 4 гр. кетоноспирта с т. кип. 120°—122° (50 мм.) Он жидок, золотистожелтого цвета и эфирного запаха.

d^{16}_4—0,9299; n^{16}_d — 1,4378. Семикарбазон плавится 179,5° — 180° $C_8H_{15}O(OH)$. Вычисл. *MR* 40,63. Найд. *MR* 40,66. — 0,2481 гр. вещ.: : 0,6058 гр. CO_2, 0,2512 гр. H_2O; — 0,2227 гр. вещ.: 0,5437 гр. CO_2, 0,2231 гр. H_2O. $C_8H_{15}O(OH)$. Выч.: C% 66,62, H%—11,19.

Найд.: C%—66,60; 66,58; H%—11,29; 11,13.

Анализ семикарбазона: 0,2021 гр. вещ. 36 кст N (19°, 743 мм.). $C_9H_{19}O_2N_3$. Выч. N% 20,93. Найд. N% 20,96.

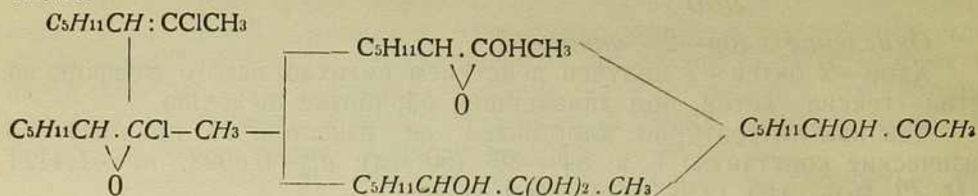
Уксусный эфир кетоноспирта кипит при 115°—120° (14 мм.) Водно-щелочный раствор после отгонки кетоноспирта был подкислен и экстаргирован эфиром. Была извлечена нерастворимая в воде кислота. Кальциевая соль ее кристаллизуется в иглах. Соль лучше растворима в холодной воде, чем в горячей. При нагревании насыщенного на холоду раствора этой соли, выпадает тяжелое масло, вновь переходящее в раствор при охлаждении. Кислота предельна. — 0,2016 гр.

вещ. : 0,4168 гр. CO_2; 0,1683 гр. H_2O, 0,0338 гр. CaO; — 0,2303 гр. вещ. : 0,0901 гр. $CaSO_4$ $(C_6H_{13}CO \cdot COO)_2Ca$. Выч. $C\%$ 54,24; $H\%$ 7,40, $Ca\%$ 11,30.

Найд. : $C\%$ 56,38, $H\%$—9,28; $Ca\%$—11,44; 11,50.

Аналитические данные не отвечают кетонокислоте $C_6H_{13}CO\ COOH$. К сожалению, количество ее было слишком незначительно для более подробного исследования.

Таким образом и на этом примере мы видим, что окисление и гидратация хлор—2—октен 2 протекает нормально согласно общей схеме:

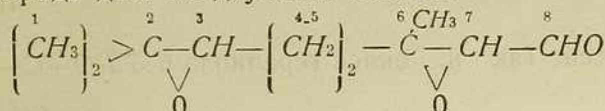


Из вышеизложенного следует, что хлорокиси с атомом хлора в окисном кольце вполне устойчивые соединения. При действии щелочей они не дают продуктов изомеризации, а нормальные альдегидо, или кетоно-спирты.

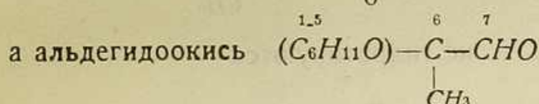
Н. Прилежаев

Окись пулегона *)

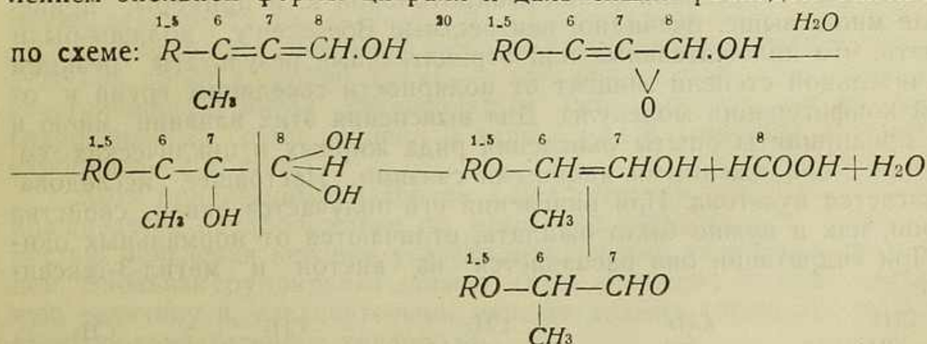
Еще в первых своих работах об окислении непредельных соединений гидроперекисью бензоила мною было замечено, что соединения с сопряженной системой двойных связей типа: $-CH:CH-CH:CH-$ и $-CH:CH-\overset{1}{C}=O$ отклоняются от общей схемы окисления. Это выражается с одной стороны в меньшей скорости окисления, а с другой—в свойствах получающихся окисей, значительно уклоняющихся от свойств типичных окисей. Так цитраль [1]), при окислении двумя атомами кислорода дает не двуокись состава:



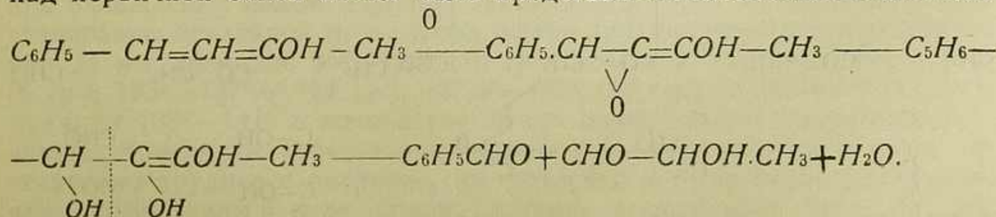
а альдегидоокись



Отщепление восьмого углеродного атома можно об'яснить окислением энольной формы цитраля и дальнейшим распадом окиси энола по схеме:



Бензилиден-ацетон [2]) $C_6H_5CH{=}CH{-}CO{-}CH_3$ дает при окислении весьма нестойкую окись, частично распадающуюся уже в момент окисления на бензойный альдегид и метил-глиоксаль. И здесь распад первичной окиси может быть представлен схемой окисления энола



---

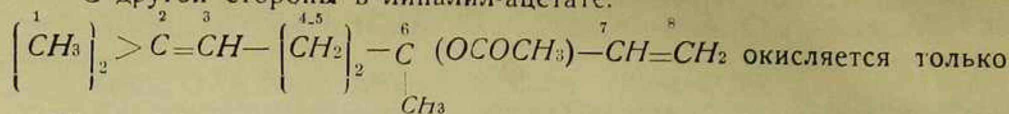
*) Bul. (4), 41 687 1927

[1]) Ж. 44,6 30 (1912)

[2]) Ж. 44,638;C 83, 2091 (1912)

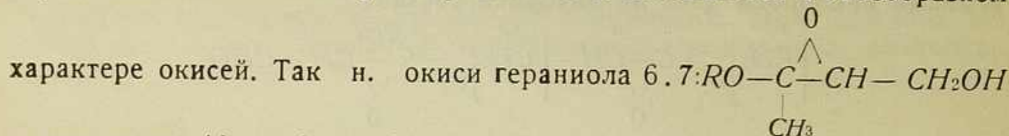
[3]) ibd. 627 стр.

С другой стороны в линалил-ацетате:

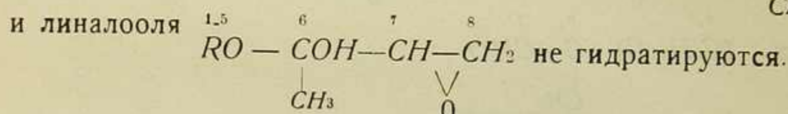


двойная связь в положении 2.3, положение 7.8 остается нетронутым. Также относится к окислению коричная кислота $C_6H_5—CH=CH—COOH$. Таким образом накопление кислорода в положении 2.3 в некоторых случаях, очевидно, может останавливать реакцию окисления.

J. Böeseken [4]) произвел ту же реакцию по отношению к фумаровой кисл., ангидриду малеиновой к. и ее этиловому эфиру и получил отрицательные результаты. Также отрицательно относились к гидроперекиси кротоновая к., акролеинацетат и кетоны общей формулы— $—CH=CH—CO—$, но фенил-изокротоновая к. окислялась. Т. обр. эти результаты показывают, что двойная связь $\alpha\beta$, находясь под влиянием электроотрицательных групп, не окисляется. Взаимное влияние кислородных группировок в указанном положении сказывается и в том случае, когда окисление уже произошло и сказывается в своеобразном

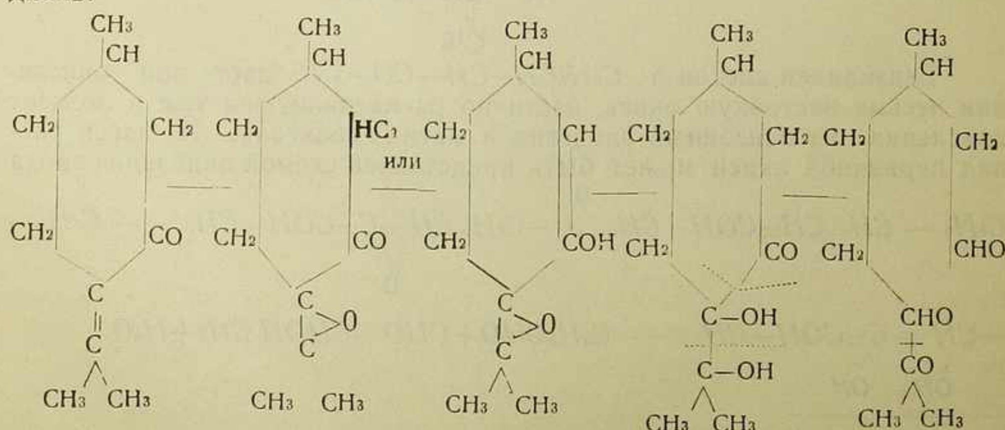


характере окисей. Так н. окиси гераниола 6.7:



и линалооля не гидратируются.

При всем том было бы преждевременно делать общие заключения. Уже факт окисления фенил-изокротоновой к. и примеры, приведенные мною выше, очевидно, неизвестные Böeseken'у, должны были показать, что положительные или отрицательные результаты реакции в значительной степени зависят от полярности соседящих групп и от общей конфигурации молекулы. Для выяснения этих влияний мною и были предприняты опыты окисления ряда жирных и циклических соединений с сопряженными двойными связями. Настоящее исследование касается пулегона. При окислении его получается окись, свойства которой, как и нужно было ожидать, отличаются от нормальных окисей. При гидратации она распадается на ацетон и метил-3-гександиаль:

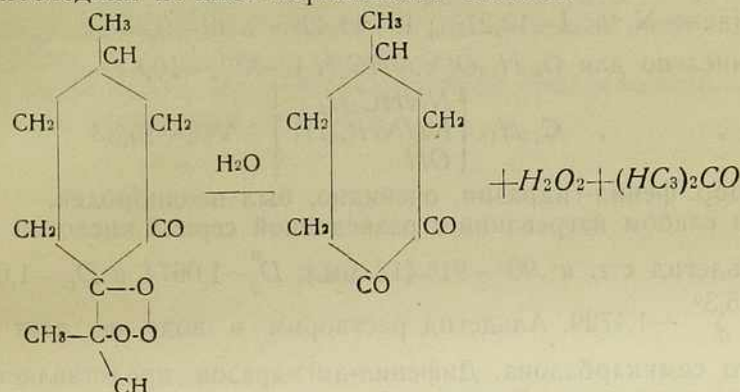


Последний при окислении дает β метил-адипиновую кислоту.

[4]) C. 1927 г. 725 стр.

Та же кислота с почти количественными выходами получается при окислении пулегона раствором перманганата[5]). Это обстоятельство указывает, что главное направление реакции и здесь идет между 3 и 4 углеродными атомами.

Аналогичную картину распада пулегона наблюдал Гарриес[6]) при разложении его озонида. Вместо нормальных продуктов—метилциклогександиона и ацетона он получил „eine Aldehydische Substanz die beim Stehen an der Luft in wenigen Minuten anscheinend in Methyladipinsäure übergeht. Das ist sehr merkwüradig". Замечает автор. Очевидно и в этом случае „eine Aldehydische sudstanz" было ничем иным, как метил—3—гександиалем. Его образование из озонида заставляет предполагать, что последний не имел нормального состава.



Так как превращение дикетона в диальдегид в условиях разложения, действительно, являлось бы удивительным.

Причина неустойчивости нормального продукта гидратации окиси пулегона кроется, нужно думать, в его пинаконной группировке. Эта неустойчивость могла увеличиваться своеобразным распределением гидроксильных групп по цепи и ядру с одной стороны и соседством карбонила—с другой.

Хотя приведенный материал и недостаточен, но само собой напрашивается предположение об известной зависимости между скоростью окисления кетонов указанного строения и степенью их энолизации. Энольная группировка должна иметь меньшую электроотрицательную величину и, следовательно, меньше должна тормозить вхождение электроотрицательного кислорода.

Экспериментальная часть

86 гр. пулегона с т. к. 110°—112° (21 мм) и $\alpha+27°,61$ окислены 9 гр. активного кислорода. Окисление велось в эфирном растворе, при охлаждении льдом. Реакция закончилась через сутки. После нейтрализации бензойной к. и отгона эфира продукт реакции перегонялся при 24 мм. фракции; 95°—120° (10 гр.); 120°--130° (10 гр.); 130°—135° (8 гр.); 135°—137°,5° (24 гр.); 137,5°—139° (20 гр.); 139°—141° (12 гр.); фракции 135°—141° в количестве 56 гр. почти нацело закристаллизовались. Кристаллы хорошо растворимы в спирте, эфире и бензоле, но несколько труднее в лигроине, из которого и были перекристаллизованы. Кристаллы в виде призм, длиною в несколько сант. Т. пл. 43°—44°; Минеральным хамелеоном вещество не окисляется, растворяется в воде и вытесняется из нее поташем в неизмененном виде.

---

[5]) Земмлер—В. 25, 3516; Сперанский—Ж. 34, 12.
[6]) А, 343, 334 (1905).

Т. к. 137° — 138° (24 мм)

Количество С и Н—Вещ. О, 2142 гр. CO_2—0,5592 гр.;—H_2O О, 1844 гр. С—% 71,20; Н—% 9,56. Выч. для $C_{10}H_{16}O_2$; С% 71,38; Н% 9,59.

Окись не дает кристаллических соединений ни с гидраксил-амином, ни с семикарбазидом, ни с бром-фенил-гидразином. Фенил гидразин выпадает в виде масла рубинового цвета. После долгого хранения он кристаллизуется в оранжевого цвета иголках с т. пл. 56,6°—56,5°. Кристаллы растворимы в большинстве растворителей, гигроскопичны и непостоянны, что и видно из аналитических данных:

Количество азота: I. Вещ.—0, 26,31 гр., N—30 кст,; при 17° и 743 мм.; II. Вещ.—0, 3623 гр. азота 34,9 кст. при 13° и 755 мм.; III. Вещ.—0, 3657 гр. азота 29,5 кст. при 18° и 750 мм.

Найдено N %: I—13,21%; II—11,42% и III—9,33%.

Вычислено для $G_{10}H_{16}O(N.NHC_6H_5)$—N%—10,84.

$$\text{„} \quad \text{„} \quad C_{10}H_{16}\begin{Bmatrix} NNHC_6H_5 \\ NHNHC_6H_5 \\ OH \end{Bmatrix} - N\%—15,33$$

Т. обр. фенил-гидразин, очевидно, был неоднороден.

При слабом нагревании с разведенной серной кислотой окись дает ди-альдегид с т. к. 90° — 91° (13 мм.); D^0_0—1,0674 и D^{15}_{15}—1,0556. $n^{15,3^0}_d$ —1,4729. Альдегид растворим в воде, не дает кристаллического семикарбазона. Дифенил-дигидразон представляет рубинового цвета кристаллы. Плавится без разложения 138° — 139°. Хорошо растворим в эфире. Из смеси эфира и лигроина выпадает в виде желтого порошка.

Колич. *С* и *Н*—Вещ.—0,2233 гр.; CO_2 - 0,5351 гр.; H_2O—0.1896 гр. вещ.—0,2331 гр.: CO_2 - 0,5607 гр.; H_2O—0,1970 гр.

Найдено *С*% 65,36; 65,60; *Н*% 9,43; 9,39.

Вычислено $C_7H_{12}O_2$—*С*% 65,57; *Н*%—9,44.

Таким образом альдегид был ди-альдегидом. Окисленный влажной окисью серебра он дал кристаллическую кислоту, хорошо растворимую в эфире. Выкристаллизована из бензола с т. пл. 87,5°—88,5° Колич. *С* и *Н*: Вещ.—0,2328 гр.; CO_2—0,4467 гр.; H_2O—0,1576 гр.; получено *С*%—52,40; *Н*%—7,53. Вычислено C_5H_{10} $(COOH)_2$: *С*%—52,47, *Н*%—7,55.

Таким образом по т. плавления и из аналитических данных ясно, что полученная кислота есть метил-адипиновая. Арт дает для нее т. пл. 86°—87,5°. Эта кислота является нормальным продуктом окисления пулегона. В зависимости от ее оптической деятельности температура ея плавления у различных авторов [7]) колеблется в пределах 78°—91°.

В водном растворе после нагревания окиси с кислотой иодоформной реакции обнаружен ацетон.

Окись является веществом сравнительно малоустойчивым. При длительном хранении даже в запаянном сосуде она переходит в жидкую модифакцию. Равным образом замечено, что при повторных фракционировках при разрежении, при нагревании до 200° и при перегонке под обыкновенным давлением (при 762 мм. она кипит 242° - 243°)

---

[7]) Б. Марковников—78°—83°; С. 1903, II, 288.
Сперанский—91°—С. 1902 I, 1222.
Байер—89°—В. 29, 30; —86°—87,5₀ (6), 7
Земмлер—84,5°—В, 25, 3516.

она частично изомеризуется в жидкое вещество с т. к. 123^0—124^0 (25 мм.). Оно не растворимо в воде, непредельно, дает семикарбазон с т. п. $210{,}5^0$—$211{,}5^0$; трудно растворимый во всех растворителях D_0^0—1,0153; D_{16}^{16}—1,0038. Аналитические данные показывают состав аналогичный окиси пулегона.

Колич. C и H: Вещ.: 0,23,55 гр; CO_2—0,6172 гр.; H_2O—0,2039 гр. Найд. $C\%$—71,48; $H\%$—9,62. Выч. $C_{10}H_{16}O_2$;—$C\%$—71,38; $H\%$—9;59.

Возможно, что при нагревании окись изомеризуется по типу, разработанному Tiffeneau[8]). К сожалению, оба эти случая превращения окиси пулегона не исследованы вследствие недостатка материала.

Таким образом приведенный материал показывает, что и кетоны с αβ двойной связью могут окисляться, но их окиси имеют характер, уклоняющийся от нормальных окисей.

Для дальнейшего развития этой темы предположено окислить камферфорон, карвенон и карвон.

---

[8]) Bull. 39—40 (4) 763, (1926).

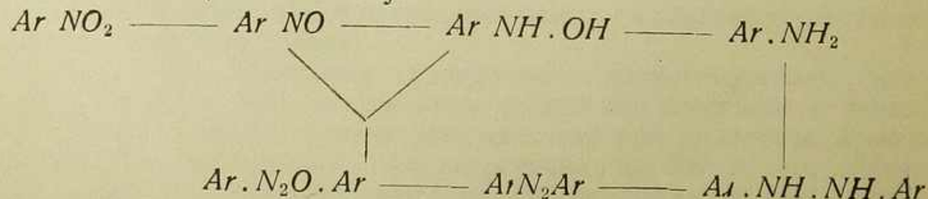
Н. Прилежаев, В. Вершук и Л. Тир

Окисление гидроперекисью бензоила органических соединений, содержащих остаток аммиака: окисление первичных ароматических аминов.

Окисление ароматических аминов имеет длинную историю, начинающуюся с 1873 года. Сюда относятся первые работы Бардзиловского[1]) над окислением о—,м—и п—толуидинов раствором $KMnO_4$. При этой реакции он получил соответствующие азотолуолы. Так как при той же реакции был получен азотолил, то он делает заключение, что окисление аминов в слабокислой или щелочной среде идет в первую очередь с образованием гидразосоединений, последние окисляясь дают далее азосоединения.

G. Hoogewerff[2], повторяя ту же реакцию по отношению к анилину и о—и р—толуидинам, лишь подтвердил данные Бардзиловского. A. Leeds[3]) применил в качестве окислителя перикись водорода. Он окислял дифенил-амин, диметил-анилин, ксилидин и р-толуидин. Только из р-толуидина им был получен азотолуол. Остальные амины давали при окислении лакообразные продукты.

Механизм окисления ароматических аминов во всех деталях был выяснен Е. Бамбергером[4]). Он окислял аиилин и его гомологи раствором перманганата, реагентом Каро, хлорноватистой кисл. и перекисью водорода. На основании результатов, при этом полученных, он дает следующую схему окисления: (см. схему на стр. 2) детали этой схемы были выяснены при окислении промежуточных соединений—гидрокисламина и нитрозо-соединения, в различных условиях. Сущность схемы сводится к двум главным направлениям реакции – мономолекулярному и бимолекулярному. Первое через гидроксиламиннитрозо приводит к нитросоединению, второе кончается или на азокси, или на азосоединении. Ни то, ни другое дальше не окисляется и этим схема окисления отличается от схемы восстановления нитросоединений, где оба направления. как мономолекулярное, так и бимолекулярное приводят к одной и той же цели—к амину:



1) Ж. 5, 353 (1873); 7, 179, 221, (1875); 10, 35, 81; 17, 38 (1885); 19, 132 (1887).
2) B. 10. 1936 (1877); 11, 1202 (1878).
3) B. 14, 1382 (1881).
4) B. 31,1522 (1898); 26, 496; 30, 2278; 32, 1527; 33, 272; 35, 1608; 1902; 32, 1675; B. 33. 120, 1940, 3605.

Таково состояние этого вопроса.

Главная цель настоящего исследования—подойти к проблеме биохимического дезаминирования белков. В интересах последовательности реакцию окисления аминов гидроперекисью бензоила решено предварительно изучить на жирных и ароматических представителях

$$C_6H_5 . NH_2 \longrightarrow C_6H_5 . NHOH \longrightarrow C_6H_5 . NO \longrightarrow C_6H_5 . NO_2$$

$C_6H_5 . NH_2$

$C_6H_5 . NH_2$

$C_6H_5 . NHOH$

$C_6H_5N_2 . C_6H_5$

$C_6H_4 <^{NH_2}_{OH}$ $\quad$ $C_6H_4 <^{NH_2}_{NH . C_6H_5}$

$C_6H_5 . N_2O . C_6H_5$

$C_6H_4 {=O \atop =O}$ $\quad$ $C_6H_4 {=NH \atop -NH . C_6H_5}$

$N . C_6H_5$

$\|$

C

$C_6H_5 . NH$ $\quad$ $NH . C_6H_5$

$\|$

$N\ C_6H_5$

этого ряда. Здесь являлась возможность выяснить, насколько при действии этого окислителя реакция отклоняется или совпадает со схемой окисления Бамбергера.

Для этой цели были окислены: анилин, о—,м-и р-толуидины; о-,м и р-хлоранилины; о-,м и р-нитротолуидины. Окисление всех препаратов велось в одинаковых условиях: один атом кислорода на молекулу амина, растворитель—эфир, температура ниже нуля. Результаты окисления, сведенные в таблицу, показывают, что окисление ароматических аминов гидроперекисью доходит только до стадии образования нитрозосоединений. Нитросоединения не были найдены ни в одном случае. Поверочные опыты окисления р-хлоранилина тремя атомами кислорода и нитрозоанилина тем же окислителем привели к отрицательным результатам: р-хлоранилин дал азокси и незначительное количество нитрозосоединения, нитрозоанилин вернулся в неизмененном

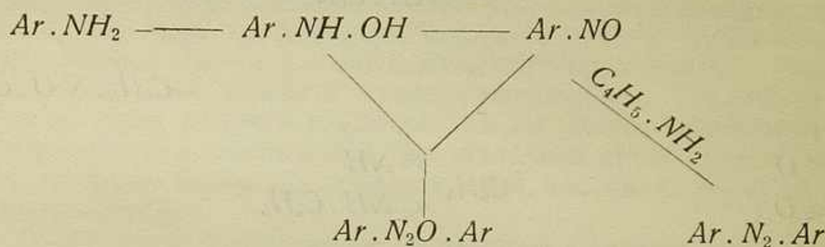
виде. Таким образом нитрозосоединения являются пределом мономолекулярной фазы окисления. Этим гидроперекись отличается от раствора КМnО, где реакция доходит до образования нитросоединений.

Однако свободные нитрозосоединения в заметных количествах были выделены лишь для о-соединений. Для м—и р-соединений главное направление реакции по бимолекулярному типу, в сторону образования азоксисоединений, а для анилина—азосоединения.

Выход этих соединений почти теоретический.

Поверочные опыты окисления азоксибензола и азо-бензола показали, что азокси гидроперекисью не окисляется, но окисление азанилина идет. Продукт окисления исследуется. Есть основания предполагать, что в этом случае окисление связано с переходом одного из трехвалентных атомов азота в пятивалентный.

Таким образом бимолекулярная фаза останавливается на образовании азоксисоединений, нитросоединений не образуется и здесь. Схема окисления будет иметь следующий вид:



Е. Бамбергер[5]) рассматривает реакцию образования азоксисоединений, как реакцию окисления. Окислителем является нитрозосоединение, само восстанавливающееся до азокси. Исходя из этого положения была окислена молекулярная смесь анилина и нитрозоанилина. Предполагалось, что анилин, окислившись в гидроксил-амин, вступит в реакцию с нитрозо—и даст азоксианилин. Однако, результат получился совершенно неожиданный. Прежде всего скорость реакции оказалась чрезвычайно пониженной. Анилин обычно окисляется почти с неизмеримой скоростью, на этот раз реакция продолжалась 6 дней. В результате весь нитрозоанилин был возвращен в неизмененном виде, но анилин, видимо, окислился по другой схеме. Таким образом было очевидно, что нитрозоанилин затормозил реакцию окисления. Это наблюдение подтверждается данными Moureu[6]), который нашел, что нитрозосоединения являются стабилизаторами процесса окисления. Интересно, что и азобензола, обычно весьма легко образующегося из нитрозо—и анилина, тоже не было найдено. Очевидно, что нитрозоанилин или образовал комплекс с окислителем (хотя зеленый цвет эфирного раствора против этого предположения) и тем парализовал как реакцию окисления, так и конденсацию в азосоединение, или же нужно предположить, что форма *Ar. No* является пассивной, активность же связана с переходом в форму $Ar.\ N(oH)_2$.

На скорость окисления аминов значительное влияние оказывают боковые группы: толуидины окисляются весьма легко, несколько хуже cl-анилины, еще медленнее нитро-толуидины. Таким образом, введение отрицательных групп задерживает окисление.

Неравенство в скоростях окисления аминов и тормозящее влияние нитрозо групп особенно ясно выступает в реакции окисления-молеку-

[5]) B. 30, 2278.
[6]) C. 1927, 397; C. 183, 823.
[7]) B. 36, 3818.

лярных смесей аминов (см. таблицу). Особенно низко скорость окисления падает для о-соединений. Приведенными опытами имелось в виду также выяснить возможность получения смешанных азокси—или азосоединений. Бамбергер[7]) получал их конденсацией нитрозо—и производных гидроксиламина. Результаты реакции показывают, что на успешность ее влияют электрохимический характер боковых групп и их положение по отношению к группе NH_2. При прочих равных условиях пара—положение является наиболее выгодным.

Результаты исследования являются лишь руководящей схемой для дальнейших работ в этом направлении, которые и продолжаются (см. табл. на стр. 8).

Экспериментальная часть.

Окисление аминов велось в одинаковых условиях—растворитель эфир, температура ниже нуля, количество кислорода—один—атом на молекулу амина. По окончании реакции нейтрализация щелочью.

о-Толуидин: для окисления взято 20 гр. амина (19,3 гр. теор.) с т. кип. 201° и 2,7 гр. активного кислорода. При приливании окислителя наблюдалась смена цветов—золотисто-желтый, коричневый и темнокоричневый. Реакция шла весьма энергично. По окончании ее (приблизительно через сутки) из эфирного раствора было выделено 10,8 гр. азокситолуидина с т. пл. 59°—60°[1]); из маслянистого остатка с водяным паром было отогнано нитрозосоединение в количестве 1,5 гр. с т. пл. 72,5°[2]). Оба соединения литературно известны.

м-Толуидин: Окислено 25 гр. амина (28 гр. теор.) с т. к. 203°, активного кислорода 4,2 гр. Смена цветов—от зеленого до темно-коричневого. По окончании реакции (через сутки) было выделено: 2 гр. амина не вошедшего в реакцию; 19 гр. азокситолуидина с т. пл. 39°[3]). Из остатков после кристаллизации отогнано с водяным паром ничтожные следы нитрозо. Азокси—литературно—известно.

р-Толуидин: окислено 12 гр. амина (14 гр. теорет.) с т. пл. 45° 2,1 гр. активного кислорода. Смена цветов—светло-желтый, зеленый, коричневый. По окончании реакции выделено азокситолуидина 9,5 г. с т. пл. 70—71°[4]), следы нитрозотолуидина и не вошедшего в реакцию амина 1,8 гр. Азокси—литературно—известно.

о-Хлоранилин: окислено 10 гр. амина (9,7 теор.) с т. к. 211° 1,23 гр. активного кислорода. Реакция идет мало энергично. Смена цветов—от светло-желтого до коричнево-красноватого. Через 1,5 суток продукт реакции выделен. Получено—6,5 гр. азокси—с т. пл. 56°[5]) 4 гр. некристаллизующегося смолистого вещества не перегоняющегося без разложения и следы нитрозо.

м-Хлоранилин: окислено 10 гр. амина (9,7 гр. теор.) с т. к. 230°, 1,23 гр. кислорода. Реакция мало энергична. Смена цветов—от зеленоватого до золотистого. По окончании реакции выделено: азокси хлоранилина 6,5 гр.[6]) с т. пл. 96,5°—97°—светло-желтые иглы из метилового спирта. Смолы 0,3 гр.

р-Хлоранилин: окислено 10 гр. амина (9,7 гр. теор.) с т. п. 70° 1,23 гр. кислорода. Реакция идет мало энергично. К концу реакции выпал кристаллический осадок в количестве 1 гр., оказавшийся азо-

---

[1]) B. 18, 2553; 20, 2016.
[2]) B. 28, 249; An. 316, 279; B. 32, 1677.
[3]) B. 22, 835; 30, 2278; 35, 3697, 870.
[4]) B. 32, 210; 59, 870.
[5]) B. 59, 870 (2) 67, 148;
[6]) B. 8, 1621; 17, 464; 59, 870.

Количество кислорода в %, вошедшее в реакцию

для образования	NO	N_2O	N=N	T
о-толуидин	15	85	—	1 сутки
м—толуидин	—	96	—	1 „
р-толуидин	—	99	—	1 „
о- хлоранилин	—	95	—	1,5 „
м—хлоранилин	—	95	—	1,5 „
р-хлоранилин	—	95	—	1,5 „
о-нитротолуидин (1. 2. 3.)	48	—	—	4 „
м—нитротолуидин (1. 2. 5.)	—	99	—	2 „
р-нитротолуидин (1. 4. 2.)	—	93,5	—	2 „
Анилин	—	—	94	
CH_3 NH_2	22	51	—	5 „
NO_2 NH_2 CH_3 (1. 2. 3.)			—	
Cl NH_2		56	—	5 „
NO_2 NH_2 CH_3 (1. 2. 3.)	13		—	
Cl NH_2				18 „
NO_2 NH_2 CH_3 (1. 2. 3.)	17			
Cl NH_2		12		3 „
NO_2 NH_2 (1. 2. 5.) CH_3		20		
C_6H_4ClN / $C_6H_3CH_3NON$ > O		7		

ксисоединением. Общее его количество 6,5 гр. т. пл. 156⁰[7]). Смолистого вещества 1 гр.

о-Нитротолуидин 1. 2. 3: Окислено 10 гр. амина (11,5 гр. теор.) т. пл. 97⁰, 1,22 гр. кислорода. Выделено 3 гр. нитрозосоединения с т. пл. 121⁰, 7 гр. не вошло в реакцию. Окисление закончилось через 4 дня. Кристаллы светло-желтого цвета с зеленоватым оттенком, ромбической формы. В эфире и спирте раствор. очень плохо. Раствор. в ледяной уксусн. кислоте и хлороформе. Очень хорошо растворяются в ацетоне. Выкристаллизованы из ацетона. Анализ N: Вещ. 0,1306 гр.: получено 18,5 к ст. при 747 мм и 11⁰. Найдено N⁰/₀ 16,74. $C_6H_3NO_2NOCH_3$. Вычислено N⁰/₀16,86⁰/₀.

м-Нитротолуидин 1. 2. 5: Окислено 20 гр. (11,5 гр. теор.) амина с т. пл. 132⁰—1,22 гр. кислорода. Окисление закончилось через 2 дня. Цвет раствора золотисто-желтый. Выделено 8 гр. азоксисоединения; из ацетона т. пл. 191⁰—192⁰. Амина не вошедшего в реакцию 1 гр. Кристаллы желтого цвета с чуть зеленоватым оттенком, мелкоигольчатой формы. В спирте и эфире растворяется плохо. Растворяется в ледяной уксусной кислоте и хорошо в ацетоне. Выкристаллизованы из ацетона.

Определение азота: Вещества: 0,1122 гр.: 17,1 к ст. при 746. мм и 13,5⁰. Получено N⁰/₀ 17,80 $(C_6H_3NO_2CH_3)_2\ N_2O$. Выч. N⁰/₀ 17,72.

р—нитротолуидин 1.4.2: Окислено 11 гр. амина (11,5 гр. теор.) с т. п. 78⁰ 1,22 гр. кислорода. Реакция закончилась через два дня. Выделено 7,5 гр. азокси-соединения, невошедшего в реакцию амина 0,4 гр. Кристаллы желтого цвета с коричневатым оттенком, мелкоигольчатой формы. В эфире и спирте растворяются плохо, хорошо в ацетоне. Выкристаллизованы из ацетона.

Определение азота: Вещ. 0,1259 гр : 19,3 кст. N при 740 мм. и 12⁰. Получено 17,87⁰/₀ N для $(C_6.H_3.CH_3.NO_2)\ _2N_2\ O$. Выч. N % 17,72

Анилин: Окислено 17 гр. амина, 3 гр. кислорода. Реакция проходит весьма энергично и заканчивается вместе с приливанием окислителя. Выделено 16 гр. азобензола с т. пл. 68⁰ и незначительное количество нитрозо.

Приведенные результаты показывают, что реакция окисления замещенных анилина, как и самого анилина, протекает главным образом по бимолекулярному типу. В целях выяснения, в какой мере это направление зависит от количества кислорода, был окислен р—хлоранилин в расчете три O на 1 мол. амина: взято 3 гр. р-хлоранилина и 1,2 гр. кислорода. Раствор принял зеленый цвет. Выделено 3 гр. азокси—с т. пл. 156⁰ и нитрозосоединение с т. пл. 85,5⁰—86,5. К сожалению, его количество было недостаточно для анализа, но запах и цвет растворов не оставляют сомнения в том, что это было нитрозосоединение. При окислении в таких же условиях анилина получено нитрозо—и азокси—, но превалирующее количество азосоединения. Эти опыты таким образом показывают, что реакция не идет до нитросоединений, и что для замещенных анилина конечной стадией окисления являются соответствующие азокси-соединения, а для анилина—азоанилин.

На основании этих данных являлась возможность опытным путем проверить сравнительную скорость окисления замещенных анилина, окисляя их молекулярные смеси. При этом предполагалось, что при различной скорости окисляться будет один из компонентов, при одинаковой же будет возможна конденсация с образованием азокси—или азосоединений смешанного типа.

---

[7]) B. 5, 910—915; B. 30, 2278; 59, 870.

Для этой цели были окислены следующие смеси:

p-Толуидин и о-нитротолуидин: Взято 6 гр. p-толуидина с т. п. 45° 8,5 гр. о-нитротолуидина с т. п. 97° и 1,8 гр. акт. кислорода. Реакция окончилась чрез 5 дней Каждый амин в отдельности окислялся—толуидин 1 день, нитротолуидин 3 дня. Из реакционной смеси выделено: нитрозо-p-толуидина 1,5 гр. с т. пл. 52°, азокси-p толуидина с т. пл. 70°—71°—4,3 гр. и неокислившегося о-нитротолуидина 8 гр Таким образом скорости окисления p-толуидина значительно больше о-нитротолуидина, но общая скорость окисления оказывается весьма пониженной. Продукта конденсации не выделено.

p-Хлор-аналин и о-нитротолуидин: Окислено 6,3 гр. p-хлоранилина с т. п. 70° и 7,3 гр. о-нитротолуола с т. п. 97°, 1,6 гр. кислорода. Реакция продолжалась 5 дней. Из реакционной смеси выделено: 1 гр. нитрозо нитротолуола с т. пл. 121° и 6,5 гр. неокислившегося анилина; 5 гр. азоксихлоранилина с т. пл. 156° и неокислившегося 0,5 гр. Таким образом и здесь скорость окисления о-нитротолуола значительно меньше хлоранилина, но последний окисляется медленнее p-толуидина. Продукта конденсации и здесь не выделено.

О-хлоранилин с т. к. 211° и *О-нитротолуидин* с т. пл. 97°, взято 6,3 гр. 0-хлоранилина, 7,6 гр. О-нитротолуидина и кислорода 1,6 гр. Реакция продолжалась 18 дней. Выделено нитрозо-о—нитротолуидина 1,4 гр. с темп. пл. 121°; 5,5 гр. неокислившегося о-нитротолуидина и 5,2 гр. некристаллизующегося смолистого вещества. Конденсации и здесь не произошло.

p-Хлоранилин и м-нитротолуидин 1.2.5: Окислено 6,3 гр. хлоранилина (т. пл. 70°) и м-нитротолуидина 1.2.5 (т. пл. 132°). Кислорода 1,6 гр. Реакция закончилась через 3 дня. Выделение продуктов реакции оказалось необыкновенно трудным, так как исходные вещества и их продукты окисления оказались хорошо растворимы во всех растворителях. Образовавшуюся эвтектику частично удалось раскристаллизовать, кристаллизуя из водного ацетона. Таким путем было зыделено: азокси-м-нитротолуидина 2,5 гр. (т. пл. 191°—192°), азокси-м-хлоранилина 1 гр. (т. пл. 156°) и азокси-смешанного типа с т. пл. 173,5°—174,5°, в виде длинных шелковистых нитей золотисто-желтого цвета в колич. 0,5 гр.

Определение: Вещества—0,0882 гр.: *N* 11 кст. при 738 мм. и 13°

Получено *N* %—14,41. ($C_6H_4ClN_2O$.) ($C_6H_3NO_2CH_3$)

Вычислено *N*%—14,46.

Таким образом p-положение при равнополярных заместителях оказалось наиболее благоприятным для условий конденсации. Е. Бамбергер, обсуждая условия образования азокси-соединений и нитрозо, пришел к заключению, что это зависит от скорости перехода *Ar NH₂* ——— *Ar NH. OH*———*Ar. No.*

Если скорость образования нитрозо очень велика и оно не успевает, таксказа ть, вступить в реакцию с гидроксиламином, то преимущественно образуется нитрозо. Эта скорость характерна для о-соединений. В противном случае образуется азокси. И действительно на примерах окисления одиночных аминов, кроме о-хлоранилина, это подтверждается. Однако при окислении молекулярных смесей аминов, как видно из таблицы, это не всегда имеет место.

Исследование продолжается.

П. А. Мавродиади

Созревание и оплодотворение у нематоды Cystoopsis acipenseri N. Wagn[1]).

(Из Гистологического Института Белорусского Госуд. Университета в Минске).

Причины, побудившие меня взяться за изучение полового процесса у нематоды *Cystoopsis acipenseri* N. Wagn.[2]), находятся в непосредственной связи с сущностью выполненной работы и заключаются в следующем.

Еще в 1916 г., изучая эмбриональное развитие *Cystoopsis*, я обратил внимание на то, что кариокинетические фигуры, встречающиеся в бластомерах дробления, содержат неодинаковое количество хромозом. В типичных случаях число их равнялось трем, и такие типичные картины мы видим на рис. 1 в, с. Но наряду с этим, в более редких случаях, кариокинетические фигуры содержали иное число хромозом—4 (рис. 1 а), 5, 6 (рис. 16 и 17). Возникал вопрос, какое вообще число хромозом принадлежит *Cystoopsis'y* и чем обусловлено наблюдаемое мною непостоянство их числа. Ответа на этот вопрос естественнее всего было искать в явлениях созревания и оплодотворения, а потому и приходилось обратиться к изучению этих процессов.

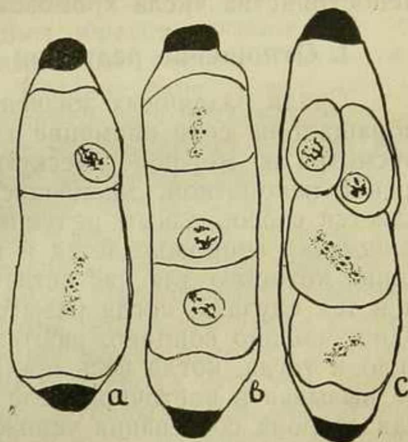


Рис. 1. Первые стадии дробления яйца Cystoopsis

Это было в 1916 г. Тогда я только что закончил свою работу относительно инфузории *Heterocineta* (n. g.), изучение кон'югации которой заставило меня задуматься над сущностью созревания и оплодотворения, и в результате, в особенности в отношении созревания, притти к выводам, отличным от тех, которые являются общепринятыми. Именно, в противоположность обыкновенно различаемым двум делениям созревания—я, как в созревании, так и оплодотворении увидел один кариокинез, в середину которого вклинены особые ядерные

---

[1]) Настоящая работа была доложена на II-м С'езде Зоологов, Анатомов и Гистологов в Москве 8 мая 1925 г.

[2]) Пузыревидка Cystoopsis acipenseri N. Wagn. принадлежит к круглым червям и паразитирует в коже волжской стерляди, на брюшке которой возле брюшных щитков образует характерные опухоли. В каждой опухоли находится самец и самка. Тело самки шарообразно, диаметром около 5-6 мм. и снабжено тонким хоботком; самец—червеобразен и гораздо меньше самки, достигая в длину лишь 2-2½ мм. при толщине в ¼ мм.

процессы: для созревания—расхождение хромозом (редукция), для оплодотворения—их соединение; в случае созревания это вклинивание создает кажущуюся картину двух делений (редукционного и эквационного), чего в действительности нет. Как показало мне затем ознакомление с литературой, к подобным же выводам еще раньше меня пришел Грегуар[1], и теперь интересно было проверить эти заключения на других об'ектах, что и было второй причиной, заставившей меня заняться созреванием и оплодотворением у *Cystoopsis*.

Сначала мною был изучен сперматогенез. Несмотря на малую величину об'екта, характер протекания этого процесса был для меня убедительным подтверждением правильности моих и Грегуара выводов относительно сущности созревания, и в 1918 г. мною были опубликованы по этому поводу отдельными брошюрами две статьи [2]).

Так как эти статьи имели характер предварительных сообщений, да и изданные отдельными брошюрами они мало кому известны, то я считаю необходимым изложить сейчас как свои взгляды на половой процесс, так и более подробно те результаты, к которым я пришел при изучении сперматогенеза у *Cystoopsis*. Эти данные я пополняю в настоящей статье описанием изученного мною в последнее время созревания яиц у *Cystoopsis* и, наконец, оплодотворения. Последние исследования снова подтвердили мой взгляд на сущность цитологических картин полового процесса и, кроме того, об'яснили мне то явление непостоянства числа хромозом, о котором я говорил выше.

I. Отношение редукции и оплодотворения к кариокинезу

Среди различных жизненных явлений созревание половых клеток обращает на себя внимание такими особенностями, сущность которых, несмотря на морфологическую их простоту, остается для нас совершенно непонятной. Заключаясь в редукции хромозом, что осуществляется своеобразным редукционным делением, оно в то же время *неизменно* сопровождается и вторым делением—эквационным, назначение которого для нас остается полной загадкой. Так обстоит дело и в тех случаях, когда разыгрывающиеся теперь ядерные процессы одновременно сопровождаются делением клеточного тела; так обстоит дело и тогда, когда весь процесс совершается исключительно в ядрах, не вызывая в клеточном теле каких-нибудь изменений. Эта непонятная сторона созревания усложняется еще одной особенностью, свойственной редукционному делению: после окончания его, ядра по правилу не переходят в состояние покоя, несмотря на то, что в огромном большинстве случаев теперь имеет место деление клеточного тела.

Загадочность указанных сторон созревания еще более оттеняется обилием тех телеологических об'яснений, к которым мы прибегаем для того, чтоб раз'яснить себе внешние стороны протекания этого важного процесса, и которые всегда являются суб'ективными. В сущности для нас здесь все телеологично: самое созревание, как мы думаем, служит для той цели, чтоб предотвратить при оплодотворении бесконечное суммирование хромозом (О. Гертвиг) или противодействовать накоплению наследственных свойств (Вейсман), хотя, конечно, свойства эти все-таки накопляются; ядро после окончания редукционного деления для того-де не переходит в состояние покоя, чтоб поме-

---

[1]) Grégoire. Les Cinéses de maturation dans les deux régnes.—La Cellule, Tome XXVI, 1910.—стр. 383—384.

[2]) а. Мавродиади, П. — Редукция и оплодотворение.—Ростов н/Д—1918 г.
в. Мавродиади, П. — Сперматогенез у Cystoopsis acipenseri N. Wagn.—Ростов н/Д—1918.

шать росту хромозом и накоплению хроматина; эквационное деление, по Гольдшмидту, обслуживает цели наследственности, умножая количество хромозом как носителей наследственных факторов.

Эти непонятные стороны созревания и обилие телеологических об'яснений заставили меня в 1916 г. задуматься над тем, правильно ли мы толкуем этот процесс, и размышления по этому поводу, как и изучение литературного материала показало мне, что в суждениях о процессе созревания мы допускаем две основные ошибки.

Первая наша ошибка заключается в характере оценки тех ядерных процессов, которыми сопровождается редукция хромозом; нельзя не видеть, что применение к ним термина „деление“ совершенно произвольно и никоим образом не может быть оправдано фактической стороной дела. Редукция разводит *цельные* хромозомы, и этот своеобразный процесс не только, что не имеет ничего общего с делением, но прямо *противоречит сущности этого процесса*, которым наследственные факторы не раз'единяются, но *равномерно* распределяются между дочерними ядрами, имеем ли мы дело с митозом, амитозом или хромидиальным размножением ядер.

Итак, для того, чтоб считать редукцию делением, мы со стороны ядра не получаем никаких оснований, и наши суждения в данном случае совершенно произвольны.

Можно ли эти основания получить со стороны поведения клеточного тела? На этот вопрос мы обыкновенно отвечаем утвердительно, и в этом заключается наша вторая ошибка.

Хотя ядро и клеточное тело теснейшим образом связаны друг с другом, однако эта связь не лишает их известной самостоятельности, и это в особенности в процессе деления. Деление ядра может совершенно не сопровождаться делением клеточного тела, что приводит к существованию постоянных или временных многоядерных клеток. Таким же образом и деление клеточного тела не требует одновременного деления ядра, что мы видим на примерах плазмотомии. Отсюда следует, что оценивать характер поведения ядра с точки зрения поведения клеточного тела—это значит допускать ничем не оправдываемое произвольное обращение с фактами; в частности же—говорить о редукции, как о делении, на том основании, что в это время клетка путем почкования или равномерного деления может делиться на-двое —это значит искажать то, что существует в природе. Это тем более, что существуют созревания (напр., у одноклеточных организмов), которые протекают исключительно на ядрах и ни в малейшей степени не отражаются на клеточном теле.

Результаты такой неправильной оценки фактов на лицо. Они выражаются в упомянутых выше непонятных сторонах созревания и в необходимости пользоваться телеологическими об'яснениями для того, чтоб хоть сколько-нибудь осветить непонимаемое нами явление.

Положение дела однако резко изменяется, как только мы откажемся от явно произвольного утверждения, что редукция есть деление, и посмотрим на нее как на *своеобразный ядерный процесс*, отводящий друг от друга цельные и, повидимому, качественно сходные хромозомы (отцовские и материнские). В этом случае картина созревания тотчас же проясняется, все непонятное становится крайне простым и очевидным, а телеологические об'яснения уступают свое место каузальным обоснованиям.

Для конкретного примера возьмем хорошо изученное созревание половых клеток у *Ascaris*—все равно, яиц или сперматозоидов. Раз редукция не деление, а лишь процесс, оперирующий с хромозомами, то для

нас должно быть совершенно очевидным, что сама по себе она не может осуществляться в клетках, так как в покоющихся ядрах мы не наблюдаем хромозом [1]). Следовательно, для возможности осуществления редукции ей должен быть предпослан процесс, образующий хромозомы. Таким процессом, по нашим сегодняшним сведениям, является только профаза кариокинеза. Действительно, как во взятом примере *Ascaris*, так и во всех других случаях мы наблюдаем в начале созревания профазу кариокинеза, правда не в чистом виде, но с видоизменениями, безусловно вызванными влиянием приближающейся редукции. Важнейшими из этих видоизменений являются очень частые случаи группировок хромозом в пары, что составляет явление так называемой их „кон'югации". Часто свойственное и нормальной профазе раннее разделение хромозом на дочерние части может наблюдаться и сейчас, и последнее обстоятельство вместе с „кон'югацией" обусловливает появление тетрад. В других случаях мы наблюдаем различные фазы видоизменений клубка, что заставляет нас говорить о синаптеновой, лептотеновой, пахитеновой и других стадиях. Конечно, все эти привходящие детали не должны скрывать от нас главной сущности разыгрывающегося процесса, а именно—образования хромозом, что, как это ясно, является принадлежностью профазы кариокинеза.

Однако начавшийся кариокинез и долженствующий в дальнейшем перейти в метафазу и анафазу—при созревании прерывается наступающей редукцией. Раз хромозомы образованы, то этим созданы в условия для осуществления редукции, и вместо продолжения кариокинеза мы видим, что цельные хромозомы (у *Ascaris* каждая часто и виде двух дочерних половинок) начинают отходить друг от друга, расходясь к различным полюсам. В это время клетка перешнуровывается на две части, что и производит на нас впечатление деления. Деления однако нет, так как оно характеризуется не поведением клеточного тела, *а поведением ядра*, а в последнем начавшийся кариокинез дошел только до середины и был прерван редукцией, которая цельную и характерную для данного вида группу хромозом разбила на две группы. Только с окончанием редукции прерванный кариокинез может развиваться дальше, что мы в действительности и наблюдаем в виде так называемого второго или эквационного деления. Нельзя не видеть, что при взгляде на него как на самостоятельное деление, оно не менее оригинально, чем все другие стороны созревания при их обыденном толковании, и оригинальность заключается здесь в отсутствии начальных стадий. Наоборот, при проводимом здесь взгляде, само собой очевидно, что эти стадии прошли в самом начале созревания, были прерваны редукцией, и их дальнейшим развитием являются метафаза, анафаза и телофаза, которые и свойственны для так называемого эквационного деления. Вместе с тем, действительное своеобразие второй половины кариокинеза созревания заключается в том, что, благодаря редукции, она протекает на двух группах хромозом, у *Ascaris* даже в двух различных клетках. В каждой из этих групп нормальным образом проходит метафаза, анафаза и телофаза, которые заканчивают истинное деление ядра (а часто и клетки) на две части. Не отделяя профазы кариокинеза от редукции и об'единяя их в 1-ое или редукционное деление, мы анафазу и телофазу считаем 2-ым делением, или эквационным. В действительности различаемых нами двух делений—нет. Все созревание представляет собою один кариокинез, в середину

[1]) Причины здесь безусловно сложнее, но в настоящее время мы должны пользоваться этими простыми об'яснениями.

которого (между профазой и метафазой) вклинена редукция хромозом. Оно таким образом проходит по схеме: 1-ая половина кариокинеза—редукция—2-ая половина кариокинеза.

При таком взгляде на созревание не остается места ни для каких неясностей.

Сущность этого процесса заключается в редукции хромозом [1]) (созревание есть редукция), и это явление может происходить только на основах кариокинеза, во время которого хромозомы образуются. Кариокинез, другими словами, является тем условием, при котором возможна редукция. Весь процесс можно сравнить с тем, какой происходит, когда мы открываем дверь. Мы нажимаем дверную ручку, или создаем условия для открытия двери (профаза кариокинеза), затем толкаем дверь вперед, осуществляя таким образом центральный пункт всего процесса (редукция), после чего опускаем дверную ручку, приводя дверной механизм в первоначальное состояние (метафаза, анафаза и телофаза).

Нам незачем придумывать те или иные цели, которые яко-бы преследует природа при созревании. Как всюду в природе, так и здесь мы имеем дело лишь с самой строгой причинностью, и в данном случае она весьма проста и выступает с полной очевидностью. Вполне вероятно, что редукция назревает исподволь, на протяжении ряда делений предшествующих клеточных поколений. Когда потребность ее назреет окончательно, наступает созревание, и очередный кариокинез теперь приобретает характер кариокинеза созревания. О причинах образования тетрад мы уже говорили выше. Что касается других неясных сторон созревания, то нельзя не видеть, что ни одна из них при данном толковании не вызывает каких-либо вопросов.

Для нас должно быть совершенно очевидным то обстоятельство, что не наблюдающийся по правилу после редукции покой ядра в действительности и *не должен теперь иметь места*, так как кариокинез в это время дошел только до середины, а покой ядра является завершением кариокинеза. Наоборот, для нас должны быть особенно интересны те случаи, когда после редукции мы наблюдаем хотя бы частичный переход ядер в покоющееся состояние, так как эти случаи показывают, что те изменения, которые претерпевает клеточное тело, могут в той или иной степени отражаться и на ядре.

Таким же образом, как при данном толковании отпадает вопрос об отсутствии покоя ядра после редукции, теперь отпадает вопрос и о причинах существования так называемого эквационного деления. Оно оказывается ничем иным, как второй половиной прерванного редукцией кариокинеза, и его неизбежное сопутствование редукции вполне очевидно.

Рассматривая таким образом созревание состоящим из 3-х частей (1-ая половина кариокинеза, редукция, 2-ая половина кариокинеза), мы легко можем понять, что из указанных частей может быть удалена только одна—именно, редукция. Тогда останется один чистый кариокинез, уменьшения числа хромозом не произойдет и в случае яйцевой клетки выделится только одно полярное тельце. Такие случаи мы и наблюдаем при партеногенезе [2]).

---

[1]) Центриоли также подвергаются в это время изменениям, и это обстоятельство является крайне важным, так как с ним нам придется считаться при более детальном обосновании созревания. Пока мы не можем сделать этого.

[2]) В этом отношении различные случаи партеногенеза могут быть распределены на три группы: 1) партеногенез при отсутствии оплодотворения, по наличии созревания в неизмененном виде; детский организм в этом случае будет обладать половинным (гоп-

Вот эта выясненность всех сторон созревания для меня лично делает изложенное толкование особенно привлекательным. Десятилетние размышления над этим вопросом и учитывание различных литературных данных, которые были в моем распоряжении, показывают мне (как, по крайней мере, мне кажется), что против изложенного об'яснения явлений созревания можно сделать только три возражения. Одно из них может основываться на том, что при созревании мы не наблюдаем чистой профазы, так как оно начинается с явлений кон'югации хромозом, чем обнаруживается связь этой части созревания с редукцией. По этому поводу я только что уже говорил. Действительно, чистой профазы при созревании нет, так как эта часть кариокинеза теперь находится под сильным влиянием наступающей редукции. Однако вообще профаза не представляет собой процесса, который протекал бы по определенным путям, а сущность ее теперь на лицо: она заключается в образовании хромозом, очень часто—в клубках, что мы неизменно и наблюдаем при созревании. Что же касается вопроса о кон'югации хромозом и о связи этого явления с редукцией, то мне кажется, что вообще такое заключение еще недостаточно разработано, и явления различной валентности хромозом вряд ли можно ставить в связь только с редукцией, чему подтверждением служат и описываемые мною ниже ядерные картины у *Cystoopsis*.

Второе возражение может основываться на встречающихся иногда частичных переходах ядер после редукции в состояние покоя. Выше об этом уже говорилось. Аналогичные делению переживания клеточного тела естественным образом могут отражаться на ядре, а потому те или иные картины покоя, в виде разрыхленных хромозом, образования ядерной оболочки и т. п., не могут считаться фактом опровергающим наши выводы.

Более существенным является третье возможное возражение. Очевидно, что высказанное мною толкование явлений созревания применимо всюду, где только мы до сих пор имели возможность первое деление считать редукционным, а второе—эквационным. Однако в некоторых случаях мы имеем явные доказательства тому, что первое деление может быть эквационным. Таков случай у *Anasa tristis*, где гетерохромозома делится при первом делении, или у *Phrynotettix*, где кон'югирующие хромозомы неравной величины, а потому можно констатировать, что при первом делении расходятся их дочерние части [1]. Возможное об'яснение этому явлению мною дано еще в моей статье 1918 г. Я допускаю, что 4 хромозомы тетрады, образующиеся от двух кон'югантов, в некоторых случаях становятся настолько самостоятельными, что в ответ на распадение клеточного тела при первом „делении“ клетки к различным полюсам расходятся дочерние части хромозом. Это может иметь место тем более потому, что на сущности созревания такое нетипичное поведение хромозом не может отразиться: четыре хромозомы тетрады все равно должны быть размещены между четырьмя клетками, а потому безразлично, произойдет ли их раз'единение сначала по линии, отделяющей цельные хромозомы, а затем по

лоидным) числом хромозом; 2) партеногенез при отсутствии и оплодотворения и созревания, но от последнего остается лишь деление клеточного тела по типу почкования, вследствие чего от яйца отделяется одно полярное тельце и 3) партеногенез при утрате всех следов полового процесса, даже в отношении деления клеточного тела, которое является равномерным. В обоих последних случаях число хромозом в детском организме будет нормальным (диплоидным).

[1]) О Phrynotettix говорю на основании книги Т Моргана „Структурные основы наследственности“.

линии, отделяющей их дочерние части, или будут иметь место обратные отношения.

Таким образом все указанные возражения отпадают.

Между тем высказанный на созревание взгляд получает новое, хотя и косвенное подтверждение в том, что и оплодотворение, следующее за созреванием, таким же образом складывается из трех соответствующих частей.

Отношения здесь, конечно, будут обратными.

Если в начале созревания мы имеем дело с одной цельной группой хромозом, которая этим процессом разбивается на две группы, то перед оплодотворением пред нами находятся две группы этих элементов, соединяющиеся в течение процесса в одну группу.

Однако формы протекания оплодотворения те же, что и созревания. В виде конкретного примера возьму в данном случае классический пример *Ascaris*.

В обоих ядрах, мужском и женском, процесс начинается с образования хромозом, т. е. с первой половины кариокинеза; когда хромозомы образованы, наступает своеобразный ядерный процесс, параллельный, но и прямо противоположный редукции. Мужские и женские хромозомы притягиваются друг к другу, образуя в конце концов цельную кариокинетическую фигуру—экваториальную звезду. Подобно редукции этот процесс соединения двух групп хромозом прерывает на время естественный ход начавшегося кариокинеза, и только с окончанием соединения—кариокинез продолжается дальше в виде его анафазы и телофазы и заканчивается делением клетки на-двое. Таким образом здесь, в противоположность созреванию, кариокинез начинается в двух ядрах и заканчивается в одном ядре. Важным, однако, является то обстоятельство, что и акт соединения хромозом, подобно редукции, вклинен в кариокинез, который и в данном случае является тем условием, при котором осуществляется этот процесс.

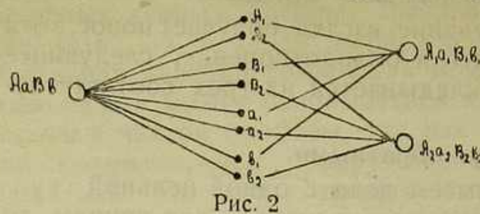
Из сказанного следует, что и созревание и оплодотворение можно схематически представить в следующем виде (вверху и внизу обозначены общепринятые представления, а посредине—курсивом—излагаемый мною взгляд):

Редукционное деление		Эквационное деление
1-я половина кариокинеза (профаза)	*Редукция (раз'единение хромозом) Оплодотворение (соединение хромозом)*	*2-ая половина кариокинеза (мета,—ана—и телофаза).*
Соединение мужского и женского ядер		Деление

Конечно, это только схема, раз'ясняющая нам сущность дела. В той или иной степени она может осуществляться и в жизни, но, само собою разумеется, трудно и ожидать, чтоб всякое созревание и оплодотворение представляло точную ее копию. Наоборот, жизнь как всюду, так и здесь сказывается в изменениях, изучение которых составляет особый научный интерес.

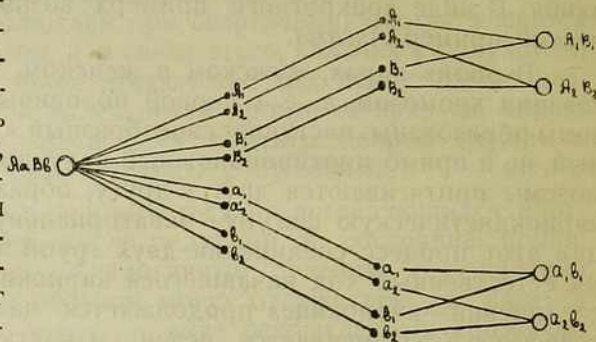
Мне кажется, что следить за этими изменениями удобнее всего на графических построениях, которые и были мною предложены в 1918 г.

Если мы зададимся целью графически представить течение обыкновенного кариокинеза (для схемы возьмем его при четырех хромосомах), то наш чертеж примет следующий вид (рис. 2):


Рис. 2

Покоющееся ядро (Aa Bb) во время 1-ой половины кариокинеза (профазы) даст четыре пары дочерних хромозом, которые во время второй половины кариокинеза (метафазы, анафазы и телофазы) распределятся между двумя дочерними ядрами—$A_1 a_1 B_1 b_1$ и $A_2 a_2 B_2 b_2$.

Применяя тот же прием для изображения созревания, мы получим более сложное построение благодаря вставочной части—редукции (рис. 3).

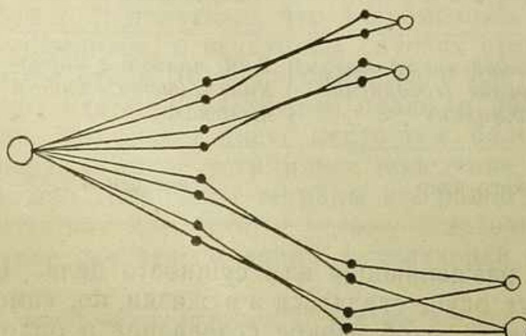

Рис. 3

Первая половина кариокинеза может пройти нормально и даст 4 пары дочерних хромозом. Последние, однако, прежде чем разойтись между дочерними ядрами, претерпевают процесс редукции: две пары расходятся в одну сторону, а две другие—в другую. После окончания редукции наступает вторая половина кариокинеза, которая благодаря редукции протекает в двух отдельных группах хромозом. Таким образом весь чертеж распадается на три части соответственно трем частям созревания.

Эта основная схема может видоизменяться в различных направлениях.

В случае выпадения редукции, как об этом уже говорилось, останется один чистый кариокинез (рис. 2), а деление клеточного тела по типу почкования даст одно полярное тельце.

В некоторых случаях образовавшиеся дочерние половинки хромозом могут снова сливаться друг с другом *(Ophryotrocha)*, раз'единяясь лишь к концу редукции и при том первое полярное тельце не делится. Графически эти особенности могут быть представлены рис. 4-ым.


Рис. 4

Если переживания клеточного тела будут в значительной степени отражаться на ядре, то после редукции, во время перешнурования клетки, хромозомы могут разрыхляться и сливаться, что создаст картину покоя ядра, хоть бы частичного, и профаза вместе с редукцией примут обманчивый вид законченного деления. Такое пр отеканиесозревания представляет собой как бы дальнейшее развитие предыдущего случая (временного частичного слияния хромозом) и при 16 хромозомах может быть представлено рис. 5.

Видоизмененный таким образом процесс интересен в том отношении, что он дает об'яснение чрезвычайно своеобразному течению „созревания" при сперматогенезе у пчелы. Число хромозом здесь гаплоидно, а потому для редукции (созревания) условий нет, и его не может быть. Наблюдающиеся теперь ядерные превращения представляют собой лишь отголосок когда-то бывшего созревания.

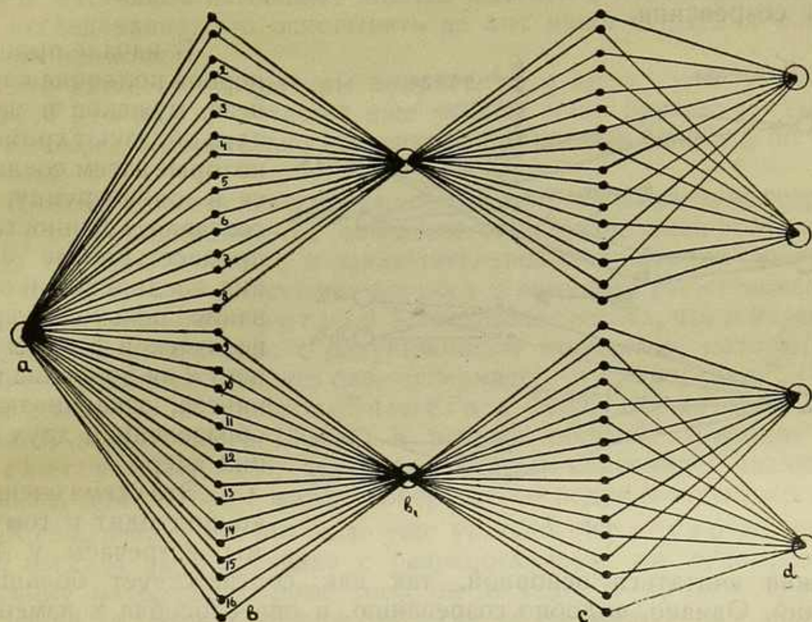


Рис. 5

Если в рис. 5-м мы представим себе гаплоидное число хромозом, то нам придется отбросить одну половину чертежа, напр. верхнюю. В этом случае, при оставшейся одной нижней части чертежа, мы увидим, что образовавшиеся от *a* до *b* хромозомы (во время профазы), не произведя никаких перемещений, снова соберутся в покоющееся ядро (от *b* до b^1); после этого начальная часть кариокинеза снова должна будет осуществиться (от b^1 до *c*), а вслед за нею кариокинез нормально закончится (*c*—*d*).

Наблюдения над сперматогенезом у пчел показывают, что изложенные ядерные превращения могут сопровождаться своеобразным явлением со стороны клеточного тела. Именно, в момент, соответствующий когда-то бывшей редукции (от *b* до b_1), от клетки отделяется без'ядерное тельце; после этого клетка нормально почкованием делится на две части.

Весь процесс, соблюдая точное число хромозом (8), может быть передан следующим чертежом (рис. 6).

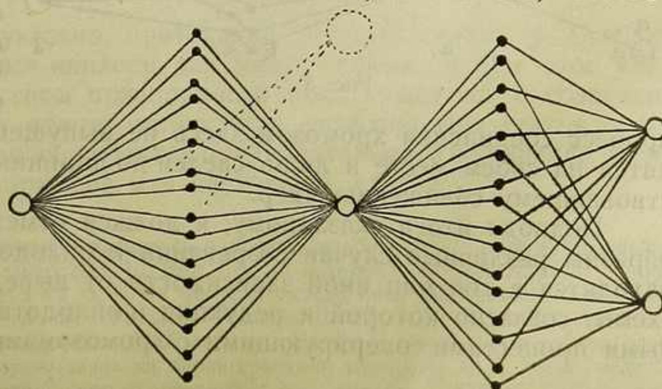


Рис. 6

Нас бы слишком далеко завело описание тех различных изменений, которые способна претерпевать наша основная схема[1]). Все эти изменения большею частью касаются тех или иных деталей, представляющих собой приспособление клетки к условиям ее существования.

Сказанное относится и к оплодотворению.

Основная схема протекания этого процесса может быть представлена рис. 7, на котором процесс оплодотворения сопоставлен с процессом созревания.

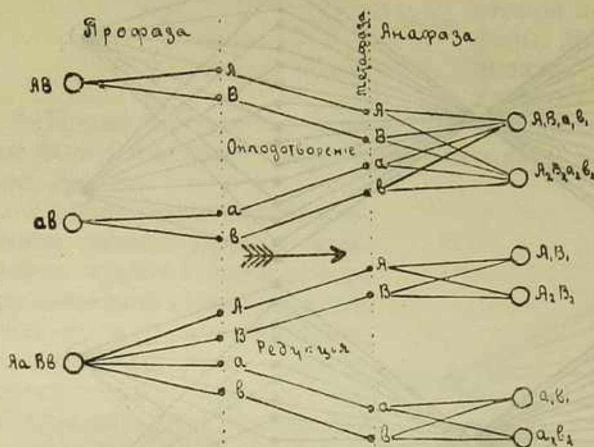


Рис. 7

В начале процесса, в первой половине кариокинеза, мужское и женское ядра образуют хромозомы, которые затем соединяются в одну группу, что и составляет сущность этого процесса; после окончания соединения и образования цельной кариокинетической фигуры наступает 2-ая половина кариокинеза, заканчивающаяся образованием двух дочерних ядер.

Эта схема очень близко подходит к тому, что мы встречаем у *Ascaris*, и должна считаться основной, так как соответствует большинству описаний. Однако, подобно созреванию, и она способна к изменениям, что мы видим хотя бы на примере морского ежа. Последний пример интересен в том отношении, что в нем как бы выпущен центральный момент всего процесса—соединение хромозом (собственно момент оплодотворения), так как ядра еще до начала кариокинеза тесно соприкасаются одно с другим (рис. 8).

Конечно, подобные случаи при созревании невозможны. Однако, несмотря на явную перестановку частей всего процесса, и этот пример не противоречит нашей схеме, так как и в нем после первой половины кариокинеза (от a_1 до b) по крайней мере физиологически можно различать тот момент (от b до c), когда составные части двух ядер становятся составными частями одного ядра.

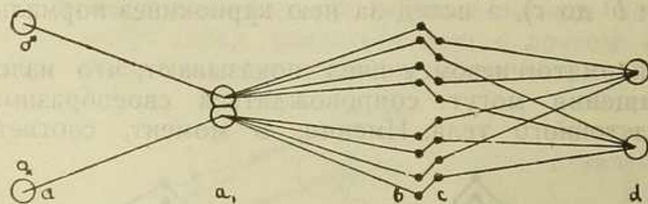


Рис. 8

С этой точки зрения, процесс соединения хромозом здесь не выпущен совершенно, но находится на своем месте и лишь сведен до minimum'а благодаря предшествовавшему сближению ядер.

Подводя итоги сказанному, я должен отметить, что как ни своеобразны различные случаи созревания и оплодотворения, они всегда находятся в той или иной зависимости от выведенной нами основной схемы, согласно которой и редукция и оплодотворение являются ядерными процессами, оперирующими с хромозомами, а потому для своего

[1]) Они собраны в двух больших работах Grégoire'a. La Cellule—1905 и 1910 г.

выполнения они строятся на основах кариокинеза, вклиниваясь в него между его профазой и метафазой.

Какие бы то ни было явные исключения из этого правила мне неизвестны, но исключения сомнительного характера можно бы найти в литературе. Я говорю, напр., об описаниях слияния ядер во время оплодотвореения у Protozoa. Такого рода данные настолько поверхностны и настолько оставляют желать многого в отношении более точного исследования, что основывать на них наши суждения о процессе вряд ли возможно.

Что касается литературы вопроса, то я выше уже указывал на работу Грегуара, который еще раньше меня пришел к тем же самым выводам относительно созревания, не касаясь вопроса об оплодотворении.

В обоих своих книгах, посвященных вопросу о явлениях созревания, Грегуар придерживается обыденного подразделения этого процесса на два деления, и только в заключительной части второй книги (1910 г. стр. 383—384), при выяснении вопроса о причинах существования двух делений созревания, Грегуар высказывает взгляд, что в явлениях созревания мы имеем дело с редукционным процессом, который „вклинен в последний кариокинез ово,—спермато,—и спорогенеза“. При этом автор ссылается на работы Farner'a и Moore'a, которые внушили ему этот взгляд еще в 1904 г, а равным образом приводит мнение Rueckert'a и Boveri, согласно которым кариокинез является тем условием, при котором может совершиться редукционный процесс.

К сожалению, как это было уже указано, Грегуар не применил этого взгляда на созревание к разработанному им огромному фактическому материалу. Кроме того, он не стал и на путь каузальных об'яснений различных сторон процесса, а, наоборот, дал еще новые телеологические предположения. По его мнению, связь редукционного процесса с кариокинезом преследует ту цель, чтоб клетка не могла избежать этого важного для нее процесса, а последнее было бы возможно, если б редукционный процесс происходил сам по себе. Такой взгляд совершенно противоречит нашему пониманию, согласно которому как редукция, так и оплодотворение суть акты, оперирующие с хромозомами, а потому и осуществление их возможно только на основах кариокинеза.

Иллюстрацией ко всему сказанному являются нижеприводимые данные относительно протекания процессов созревания и оплодотворения у *Cystoopsis acipenseri* [1]).

II. Сперматогенез у Cystoopsis acipenseri.

Как уже было указано, протекание сперматогенеза у *Cystoopsis acipenseri* в свое время явилось для меня первым и при том убедительным доказательством правильности моих суждений о созревании, и в 1918 г. по этому поводу мною была опубликована статья отдельной брошюрой, имевшая характер предварительного сообщения. Нельзя не повторить этого примера и в настоящей статье.

---

[1]) Когда настоящая статья отдавалась в печать (ноябрь 1927 г.), мною был получен очередный номер Anat. Bericht (Bd. 10, Heft 1/3), по которомў я ознакомился с кратким содержанием работы Ekman'a G. (Über den Unterschied zwischen Reduktions—und Äquationsteilung in: Ann. Soc. Zool. Bot. Fennicae Vanamo, 6, Nr. 1, 1—36, 3 Fiq. 1927). Как видно из передаваемого содержания этой работы, Ekman, исходя из других соображений, чем я, а именно основываясь на характеристике хромозом до и после редукции, в результате приходит в отношении созревания к выводам, по существу тождественным с моими.

Мужские половые органы самца *Cystoopsis* представляют непарную трубку, извивающуюся сначала по направлению к переднему концу тела, а затем поворачивающую и с такими же извивами достигающую заднего конца, где она оканчивается слепо. Этим слепым концевым отделом начинается семенник, на долю которого приходится большая часть половой трубки; за ним следует отдел, служащий для собирания семени; наконец, последнюю часть составляет открывающийся наружу ductus ejaculatorius.

Стенки семенника снаружи покрыты слоем эпителия, от которого внутрь идут четыре-пять клеточных слоев, служащих для образования семени. Наиболее поверхностные слои (первый и второй), прилегающие к оболочке, состоят из сперматогониев и отчасти сперматоцитов 1-го порядка; два другие слоя, ближайшие к просвету трубки, заключают в себе последние стадии образования сперматозоидов. Таким образом процесс сперматогенеза наблюдается на протяжении всей трубки семенника и идет от оболочки к просвету трубки.

Величина всех клеточных элементов весьма незначительна. Наименьшими из них являются сперматогонии, которые имеют в длину лишь 3-5 μ; в сравнении с ними сперматоциты несколько больших размеров, и на поздних стадиях их длинная ось достигает до 8-9 μ.

Процесс размножения сперматогониев проходит совершенно нормально, но, повидимому, с большими промежутками, так как на срезах огромное большинство ядер находится в покоющемся состоянии. При наступлении кариокинеза в их небольших ядрах, с поперечником в 1-$2^1/_2$ μ, на место одного—двух ядрышек появляется много мелкой хроматиновой зернистости, постепенно заполняющей все ядро (рис. 9 b); эта зернистость затем исчезает за исключением 3-5 зернышкообразных хромозом. Последние вскоре входят в состав кариокинетической фигуры миниатюрных размеров с двумя еле видимыми центриолями и протянутым между ними веретеном (рис. 9 c). Число хромозом от 3 до 5. После этого совершенно нормально следует стадия анафазы (рис. 9 d), приводящей ядра снова в состояние покоя.

От этих картин размножения процесс созревания резко отличается отсутствием центриоль и веретена.

Созревание. 1-ая половина кариокинеза *(профаза).* В начальных стадиях созревания еще нельзя обнаружить каких-либо характерных отличительных особенностей от тех же стадий кариокинеза. Среди типичных сперматоцитов, уже претерпевающих процесс редукции, там и сям находятся клетки то с покоющимися ядрами, то с ядрами, в которых, как и в начале деления, вместо ядрышек находится много мелкой зернистости. Это обстоятельство можно толковать только таким образом, что начальные стадии созревания (профаза) вполне совпадают с таковыми же стадиями кариокинеза деления.

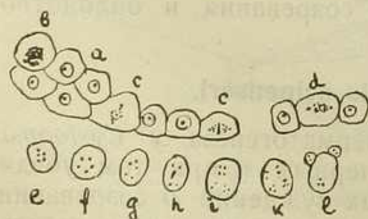


Рис. 9. Деления сперматогониев и образование сперматозоидов у Cystoopsis, увел. 1000

Однако потребность в редукции уже назрела, и во многих об‘ектах это особенное состояние клетки сказывается в различных видоизменениях клубков или кон‘югации хромозом. У *Cystoopsis* всего этого нельзя обнаружить, и в более поздних стадиях профазы, когда ядро освобождается от хроматиновой зернистости, можно лишь констатировать отсутствие центриоль и несколько большую, чем обычно, величину хромозом, появляющихся в числе 5 на месте исчезнувшего ядра. Никаких

следов ахроматинового веретена также не удается заметить. Хромозомы, как указано, вырисовываются более резко благодаря несколько большей своей величине, при этом все они вполне одинаковы, и половая хромозома среди них ничем не выделяется. (Рис. 9 e).

На этом заканчивается профаза кариокинеза созревания, сущность которой сводится к образованию хромозом. Она, как видно, почти вполне совпадает с профазой кариокинеза деления, за исключением лишь исчезания центриоль.

Теперь, однако, ход начавшегося кариокинеза прерывается назревшей редукцией.

Вставочная часть *(редукция)*. При наступлении редукции сперматоциты уже хорошо отличаются от сперматогониев. Помимо отсутствия центриоль и веретена самое расположение хромозом теперь весьма характерно, так как в самом же начале процесса три из них располагаются по направлению к одному полюсу, а две другие—к другому. В общем они образуют пятиугольник, в углах которого и находятся (рис. 9 f).

Эта кратковременная стадия затем сменяется рядом новых картин вследствие постепенного расхождения друг от друга обоих групп хромозом (рис. 9 g). Не редко теперь можно распознать и гетерохромозому. Хотя обычно все хромозомы по величине совершенно одинаковы, но в некоторых случаях гетерохромозома вытягивается в длину, принимая палочковидную форму, как бы притягиваясь и к одному и к другому полюсу (рис. 9 h).

Обыкновенно клетка теперь удлиняется, достигая по большой оси от 5 до 8 μ, *но деления клеточного тела не происходит.* Само собой понятно, что это обстоятельство является важным, так как оно лишний раз подчеркивает, что обычно наблюдающееся при редукции деление клетки представляет собой привходящее явление, а потому и не может обусловливать собой наших суждений о сущности процесса.

2-я половина кариокинеза *(метафаза, анафаза, телофаза)*. После того, как редукция закончилась, и одна группа в 3 хромозомы стала у одного полюса клетки, а другая в 2 хромозомы—у другого, начавшийся кариокинез и дошедший только до середины продолжает свое дальнейшее развитие. Нормально теперь должна следовать метафаза, во время которой каждая группа хромозом располагается к различным полюсам своими дочерними частями, и как показывает дальнейшее развитие процесса (см. ниже) эта стадия теперь и имеет место. Но благодаря малой величие об'екта, в данный момент совершенно невозможно уловить ориентировку хромозом. Дальнейшее развитие процесса видно только по тому, что расщепившиеся на дочерние половины хромозомы начинают расходиться в различные стор оны Другими словами, теперь начинается анафаза (рис. 9 i). Если незадолго перед этим в некоторых случаях можно было узнать гетерохромозому по ее палочковидной форме, то сейчас это отличие уже никогда не наблюдается, и все хромозомы совершенно одинаковой величины. Это обстоятельство имеет общее значение, так как говорит нам об изменчивости форм хромозом, а потому и не позволяет связывать сущности этих элементов с какой-либо их формой, напр., палочковидной[1]).

Особый интерес имеет самый характер передвижения хромозом в клетке. Обе группы этих элементов движутся к поверхности клетки не в одной плоскости, а в двух плоскостях, взаимно перпендикулярных

[1]) По этому вопросу я подробно высказался в своей статье „Сущность хромозом и их отношение к явлениям наследственности". Записки Белор. Гос. Инст. Сел. и Лесн. Хоз., 1925 г.

друг к другу (рис. 10). Вследствие этого очень редки случаи, когда на срезах клетка ориентирована таким образом, что почти одновременно видны все 4 группы хромозом (рис. 9к); обычно же при данной установке видны только три или две группы, а остальные скрываются Это обстоятельство, помимо своеобразия, имеет для нас то значение, что позволяет установить присутствие метафазы в начале второй половины кариокинеза. Непосредственно, ввиду незначительной величины об'екта, это сделать не удается, по наличие движения дочерних хромозом в других плоскостях, чем это было во время редукции, с очевидностью говорит, что после окончания редукции имела место свойственная метафазе перегруппировка в расположении хромозом.

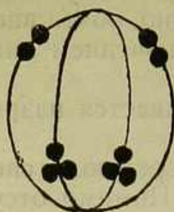


Рис. 10

Вместе с приближением каждой группы дочерних хромозом к соответствующему месту поверхности клетки, вокруг них обособляются небольшие участки плазмы, и таким образом от клетки отшнуровываются четыре сперматиды, две из которых заключают по три хромозомы, а две другие — по две. От клетки остается без'ядерное „остаточное тело", которое вначале красится нормально плазменными красками, а затем постепенно буреет и в нем появляются капли вещества, окрашивающегося железным гематоксилином в черный цвет (рис. 9-l).

Это „остаточное тело" выпадает в просвет семенника и здесь постепенно разрушается.

Что касается сперматид, то они без каких-либо преобразований становятся сперматозоидами и выпадают в просвет семенника вместе с остаточными телами. Затем они собираются в следующем о т д е л е половой трубки, где лежат сплошной массой. Характерно то, что соединение хромозом в одно зернышко (телофаза) происходит очень медленно. В просвете семенника еще можно отличать оба вида сперматозоидов, и только в выносящих протоках у большинства происходит слияние хромозом и образуется покоющееся зернышкообразное ядро. Однако у некоторых сперматозоидов хромозомы остаются раз'единенными еще очень долго и в таком состоянии могут быть констатированы даже в половых органах самки.

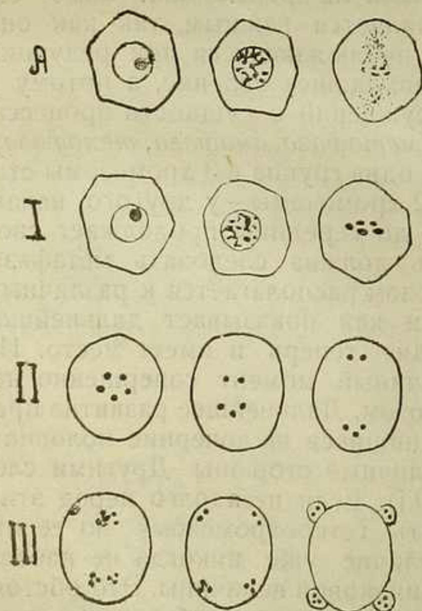


Рис. 11. А. Начальные стадии кариокинеза деления
I—III Созревание
I.—1-ая половина кариокинеза
II.—Редукция
III.—2-я половина кариокинеза

Подводя итоги сделанному описанию, нельзя не обратить внимания, что процесс созревания семенных клеток у *Cystoopsis* проходит таким образом, что обычное толкование этого процесса здесь явилось бы натяжкой; и это благодаря тому, что редукция не сопровождается делением клеточного тела. Наоборот, развиваемое в настоящей статье представление о созревании весьма убедительно иллюстрируется этим примером, при рассмотрении которого сами собой

отпадают вопросы и о причинах отсутствия покоя ядра после редукции и о причинах существования так называемого „эквационного деления“. Как показывает ниже прилагаемая схема (рис. 11), весь процесс сперматогенеза сам собою распадается на те три части, о которых говорилось в первой главе настоящей статьи и на которые может быть разложено всякое созревание. Помимо отсутствия деления клеточного тела после редукции, иллюстративности здесь косвенно содействует еще сходство начальных стадий созревания с типичной профазой кариокинеза деления и образование дочерних хромозом только после редукции.

III. Созревание яйцевых клеток Cystoopsis.

Наружный вид самок *Cystoopsis* весьма характерен. Их тело шарообразно и спереди вытягивается в хоботок; по своим размерам они значительно больше самцов, и ими обусловлены характерные опухоли на брюшке зараженных этим паразитом волжских стерлядей.

В каждой опухоли помещается самец и самка, заключенные в общей капсуле, всегда закономерно расположенной по отношению к брюшным щиткам стерляди в толще corium'a.

Половые органы самки, как и самца, представляют собой непарную трубку, которая, сообразно большим размерам самки, достигает значительной длины—до 1 метра и больше.

По длине эта трубка распадается на обычные отделы—яичник, яйцевод, матку и, наконец, влагалище. В отличие от семенников, овогонии занимают не всю окружность стенок яичниковой трубки, но лишь некоторой длины лентообразный участок. Размножение клеток, повидимому, происходит у самой поверхности яичника, где расположены самые маленькие клетки (около 2-3 μ в поперечнике), постепенно затем растущие и отодвигающиеся к просвету трубки, куда и выпадают после достижения определенной величины, а именно около 20-25 μ. Однако каких-либо картин деления овогониев мне не удалось видеть.

Продвигаясь из яичника в яйцевод, овоциты продолжают расти, принимая в то же время овальную форму, и при достижении в длину 35-40 μ подвергаются процессу созревания. Последний обладает здесь другим характером, чем при сперматогенезе. И наличие кон'югации хромозом в начале процесса, и выделение 1-го полярного тельца после редукции затрудняет должное понимание этого процесса, а имеющие теперь место запутанные числовые соотношения хромозом еще более усложняют вопрос. Как бы там ни было, несмотря на все эти отрицательные стороны, полная возможность видеть во всем ходе процесса кариокинез с вклиненной в него редукцией делает для меня ценными созревание яйца *Cystoopsis*; этот процесс здесь кроме того интересен и целым рядом оригинальных особенностей [1]).

Созревание. 1-ая половина кариокинеза (*профаза*). Готовый к созреванию овоцит овальной формы и окружен тонкой

---

[1]) У самок Cystoopsis мною констатировано наличие двух типов ядерных процессов как в соматических, так и половых клетках. По всей вероятности, это явление связано с возрастными изменениями организма, и сейчас составляет предмет моих исследований. В настоящей статье я сообщаю только об одном типе, а именно том, который я провизорно отношу к более старым организмам. Такой мой выбор обусловлен тем, что в настоящей статье я почти исключительно интересуюсь вопросом о конструкции процессов созревания и оплодотворения и не хочу углубляться в тонкости строения центриоле-хромозомного аппарата клетки, что составляет мою вторую задачу при изучении Cystoopsis'a. В указанном отношении ядерные процессы у старых организмов более благоприятны, так как по своей внешности они проще, чем у молодых, и не заставляют отклоняться в сторону других цитологических вопросов.

клеточной оболочкой. Расположенное посередине ядро почти шарообразно и поперечник его равен около 8 μ. Внутри ядра хорошо выделяется большое ядрышко, в котором заключен почти весь хроматин ядра. Кроме того, при окраске железным гематоксилином в ядре изредка обнаруживается еще одно—два красящихся зернышка, относительно природы которых трудно сказать что-либо определенное (рис. 12 а).

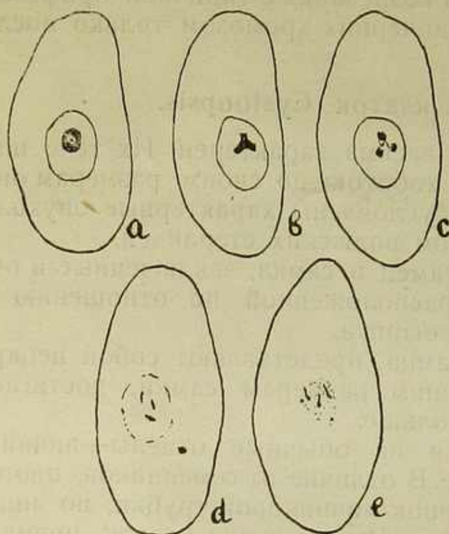


Рис. 12 Профаза созревания в яйце Cystoopsis. Увел. 1000

По своему строению ядрышко не однородно, и на более раскрашенных препаратах в нем можно видеть одно или несколько мелких зернышек, некоторые из которых отсвечивают характерным блеском. Это—nukleoluli[1]).

С началом профазы созревания ядрышко начинает резко изменяться. Оно теряет свои округлые формы и превращается в неправильно угловатый комок, при том особенно часто приобретает вид характерной трехосной фигуры (рис. 12 в). Этой формой определяется распадение ядрышка на три точечных тельца (рис. 12 с), которые, принимая палочковидную форму, становятся хромозомами (рис. 12 d).

Таким образом на этом примере очень показательна связь хромозом с ядрышком.

Как показывает дальнейшее изучение созревания, три образовавшиеся хромозомы являются бивалентными и при редукции распадаются на свои унивалентные части. Здесь таким образом, как это вообще характерно для профазы созревания, имеет место явление „кон'югации“ хромозом.

Уже в средних стадиях профазы ядерная оболочка становится все менее заметной и ко времени образования хромозом исчезает совершенно. Вместе с тем ядро теряет свои правильные очертания и превращается в гомогенный, неправильной формы островок, на котором и лежат образовавшиеся хромозомы.

Что касается центриолей, то вопрос об их образовании для меня остается неясным. Судьба иногда замечаемых в ядрах зернышек мною не выяснена, а попытки найти следы образования центриолей в протоплазме не увенчались успехом, так как вследствие рассеянных в протоплазме сильно красящихся мельчайших зернышек желтка условия для наблюдения здесь весьма неблагоприятны. Нельзя впрочем не отметить, что на более поздних стадиях возле гомогенного островка, образовавшегося на месте бывшего ядра, иногда можно заметить два зернышка, часто окруженных светлым полем. Может быть, они и являются диплозомой.

С уверенностью о центриолях можно говорить только тогда, когда они находятся уже в области островка в виде двух мелких то-

[1]) В последнее время мною произведены более детальные исследования нуклеолюлей и показано, что они являются основой для образования хромозом: P. Mawrodiadi:—Zur Theorie der Choromosomenzentren—Anat. Anz. Bd. 63 - 1927

чек, расположенных на довольно далеком расстоянии друг от друга (рис. 12 е).

Этой стадией заканчивается профаза, во время которой, как обычно, ясно выступают хромозомы и центриоли. Теперь может иметь место редукция, но картины, которые мы теперь наблюдаем при созревании яйца, в высшей степени не ясны и сбивчивы.

Вставочная часть *(редукция)*. Начинается редукция с того, что центриоли становятся по полюсам гомогенного островка. В экваторе между ними располагаются палочковидные хромозомы, параллельно продольной оси долженствующего быть, но не представленного веретена.

По правилу мы теперь видим только две хромозомы, и это обстоятельство можно об'яснить трояким образом. Во-первых, как это показывают наблюдения, три образовавшиеся хромозомы расположены не в одной, а в различных плоскостях, в силу чего вполне естественно, что одна из них будет скрываться за двумя другими, тем более, что вся фигура обладает крайне миниатюрными размерами (около 4 μ в длину и 1-2 μ в ширину); во-вторых, как это будет отмечено, одна из хромозом часто значительно меньше других, вследствие чего она может и раскрашиваться легче последних при приготовлении препаратов, окрашенных железным гематоксилином; в третьих, наконец, многие картины говорят за то, что третья хромозома тесно прилегает к одной из двух других, или даже сливается с ней, и тогда видеть ее нельзя. Вероятнее всего, что все эти три обстоятельства, складываясь вместе, обусловливают исчезновение третьей хромозомы, вследствие чего картина получается сбивчивой (рис 13 а). Это неблагоприятное обстоятельство особенно отражается на следующей стадии, являющейся весьма характерной для созревания яиц *Cystoopsis* и тянущейся на большом протяжении яицеводов. В это время прежде всего обращают на себя внимание центриоли своей более значительной величиной (рис. 13 в,с). Величина их возрастает втрое или вчетверо и, так как между стадиями *а* и *с* можно собрать все переходы, то из этого следует, что процесс увеличения центриоль идет постепенно. Каждая палочковидная хромозома теперь распадается на-двое и в связи с тем, что третья хромозома большею частью не видна, между двумя крупными центриолями залегают 4 точечных хромозомы. Однако в некоторых случаях удается разыскать картины, которые соответствуют истинному числу хромозом *Cystoopsis*. В этих случаях удается заметить (рис. 13 с, d), что по краю всей фигуры находятся еще две хромозомы в виде крайне мелких то-

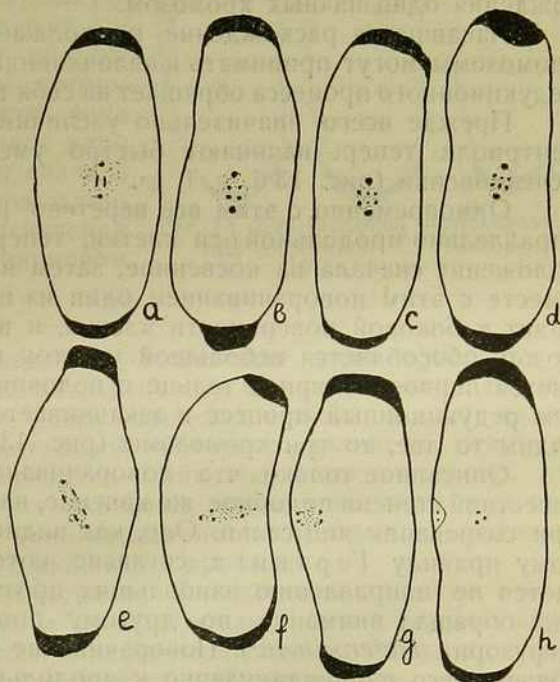


Рис. 13. Процесс редукции в яйцевых клетках Cystoopsis Увел 1000

чек, располагающиеся при этом в другой плоскости, чем отчетливо видимые пары хромозом. Здесь не безынтересно отметить, что в нескольких случаях я мог убедиться, что и отчетливо видимые хромозомы не одинаковой величины, и одна их пара больше другой. На этом основании можно сказать, что 6 хромозом самки *Cystoopsis* распадаются по своей величине на три группы: одну пару больших, одну пару меньших и пару крайне мелких телец (рис. 13 с). Впрочем такое различие в величине обнаруживается не всегда, а у самца оно вообще никогда не проявляется. У самки хромозомы каждой пары обращены к различным полюсам, как это и следует ожидать для редукции, в отношении которой данная стадия является началом расхождения однозначных хромозом.

Начавшееся расхождение продолжается дальше, при чем теперь хромозомы могут принимать и палочковидную форму. Вообще эта часть редукционного процесса обращает на себя внимание рядом особенностей.

Прежде всего, значительно увеличившиеся в предыдущей стадии центриоли теперь начинают быстро уменьшаться до полного своего исчезновения (рис. 13 d, e, f, g).

Одновременно с этим все веретено, расположенное первоначально параллельно продольной оси клетки, теперь начинает изменять это свое положение сначала на косвенное, затем на поперечное (рис. 13 e, f, g). Вместе с этим поворачиванием один из полюсов веретена близко подходит к боковой поверхности клетки, и вокруг данной группы хромозом обособляется небольшой участок плазмы. Таким образом выделяется первое полярное тельце с половиной общего числа хромозом, чем редукционный процесс и заканчивается. В яйце после этого мы видим то две, то три хромозомы (рис. 13 h).

Описанное только что поворачивание веретена напоминает до известной степени подобное же явление, наблюдавшееся Заленским[1]) при созревании яиц сальп. Оно, как видно, противоречит общеизвестному правилу Гертвига, согласно которому ось веретена располагается по направлению наибольших протоплазменных масс, на что я уже обращал внимание по другому поводу, при описании деления инфузории *Heterocineta*[2]). Поворачивание веретена *Cystoopsis* и расположение его перпендикулярно к продольной оси тела в сравнении с сальпами интересно в том отношении, что в последнем случае оно при созревании является лишь временным, и первое полярное тельце выделяется все же при продольном расположении веретена; у *Cystoopsis* же, наоборот, оно постоянно. Кроме того, временное поперечное положение веретена при созревании яиц сальп можно поставить в связь с продольным (меридиональным) делением яиц при дроблении; что касается *Cystoopsis*, то таковой связи здесь нет, так как и первая, и вторая плоскости дробления проходят перпендикулярно продольной оси тела.

2-я половина кариокинеза (*метафаза, анафаза, телофаза*). Как видно из сделанного описания, редукция производит в яйце *Cystoopsis* существенные изменения, которые касаются не только уменьшения вдвое числа хромозом, но и исчезновения центриоль. Эти особенности передаются и следующей за редукцией второй половине кариокинеза, обыкновенно рассматриваемой как особое эквационное деление.

---

[1]) Заленский, В. В. Созревание и оплодотворение яйца Salpa maxima-africana—Изв. Ак. Наук, № 3—1916.

[2]) Мавродиади, П. А.—„Косое“ деление у инфузорий. Труды Белор. Госуд. Унив., № 4-5, 1923.

После окончания редукции, ядро яйцевой клетки не переходит в состояние покоя, но тотчас же приступает к делению. Исчезнувшее на короткое время веретено появляется снова, при чем в нем также отсутствуют центриоли, и оно также занимает поперечное положение, вполне походя таким образом на редукционное веретено, с тем лишь отличием, что оно отодвигается к противоположной от 1-го полярного тельца стенке яица. Повидимому, стадия метафазы здесь коротка, и хромозомы тотчас же делятся (рис. 14 а), после чего дочерние части начинают расходится в противоположные стороны (рис. 14в), что, наконец, завершается выделением 2-го полярного тельца путем обособления небольшого участка протоплазмы вокруг группы хромозом, достигнувших поверхности яица (рис. 14 с). После этого яйцевое ядро переходит в состояние покоя сначала путем появления вокруг хромозом тонкой оболочки, а затем исчезновения хромозом на появляющемся лининовом остове.

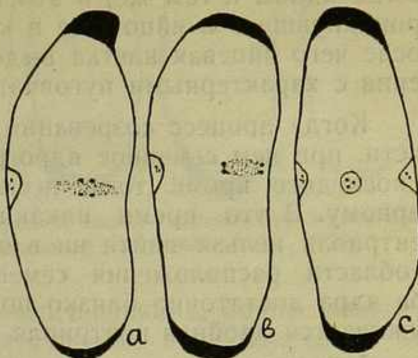


Рис. 14. 2-ая половина кариокинеза при созревании яиц Cystoopsis Увел. 1000

В сравнении с сперматогенезом созревание яица *Cystoopsis* не дает нам явственных доказательств в пользу отрицания двух делений созревания и рассматривания всего процесса в виде одного кариокинеза, между профазой и метафазой которого вклинена редукция. Наоборот протекание этого процесса в яйцевых клетках таково, что допускает возможность обоих толкований; кроме того, весь ход процесса здесь лишен и общей демонстративности вследствие усложнения его частым отсутствием одной пары хромозом.

Как бы там ни было, несмотря на всю сбивчивость этого примера, нас должно удовлетворить и то обстоятельство, что он не только не опровергает высказываемого в настоящей статье взгляда на созревание, а, наоборот, дает полную возможность применить его к себе. Вместе же с таким применением, как это было уже указано в первой главе, становится понятным и наличие так называемого эквационного деления (2-го деления созревания), и отсутствие покоя ядра после редукции.

Всему вопросу, однако, можно дать и другую постановку. Сперматогеноз у *Cystoopsis* протекает слишком определенно, чтоб можно было дать ему иное толкование, чем то, которое я ему даю. Как это было уже указано, различение здесь двух делений созревания было бы прямой натяжкой, явно несогласной с фактами. При таких обстоятельствах нельзя, конечно, допустить, что *у двух полов одного и того же организма* созревание будет протекать двумя способами, коренным образом отличающимися между собою. В таком случае, в созревании яйца мы должны искать проявления тех же принципов, которые наглядно выражены в сперматогенезе, и, как оказывается, это вполне возможно.

Новое подтверждение таким выводам мы получаем в изучении оплодотворения, которое должно протекать аналогичным образом, представляя собой кариокинез с вклиненным в него соединением мужских и женских хромозом.

IV. Оплодотворение у Cystoopsis acipenseri.

После окончания созревания яйцевое ядро окружается оболочкой, но в начале обладает весьма небольшой величиной с поперечником в 3 μ. Располагается оно посредине клетки, в области выделения полярных телец, а в одном из концов клетки (по всей вероятности, всегда одном и том же), в это время помещается ядро сперматозоида, проникнувшего в яйцо еще в конце профазы кариокинеза созревания, после чего яйцевая клетка выделяет вокруг себя оболочку оплодотворения с характерными пуговчатыми утолщениями на концах.

Когда процесс созревания в яйце закончен, оба ядра начинают расти, при чем семенное ядро растет несколько скорее, чем яйцевое, и последнее, кроме того, несколько продвигается по направлению к первому. В это время никаких явственных указаний на присутствие центриоль нельзя найти ни в области расположения яйцевого ядра, ни в области расположения семенного. И только в тот момент, когда оба ядра достаточно близко подходят друг к другу, возле них обнаруживается двойная центриоля (рис. 15 a).

1-ая половина кариокинеза (*профаза*). С момента достижения обоими ядрами своей нормальной величины (около 6 μ. в диаметре) можно считать начавшимся кариокинез оплодотворения. В покоющемся состоянии в каждом ядре наблюдается одно-два небольших ядрышка и кроме того ясная хроматиновая зернистость, большею частью собирающаяся в нити. После исчезновения ядерной оболочки, лининовый остов подвергается непосредственному влиянию центриолей и превращается в конусообразные фигуры, в основании которых явственно выделяются точечные хромозомы. Между центриолями, несколько отошедшими друг от друга, в это время образуется небольшое веретено, и вся фигура принимает довольно характерный вид (рис. 15 b,c).

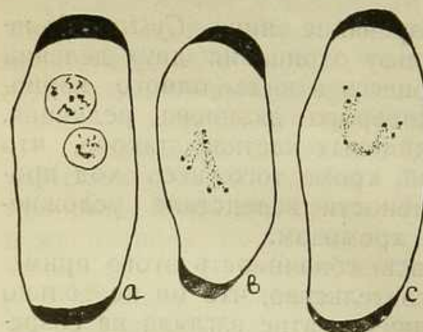


Рис. 15. Профаза кариокинеза при оплодотворении Cystoopsis Увел. 1000

Количество хромозом теперь является особенно интересным. Если незадолго перед тем (при созревании) одна из хромозом яйца скрывалась от наблюдения, то теперь из женского ядра всегда возникают три хромозомы, все совершенно одинаковой величины. Мужское ядро, как и следует ожидать, дает то три, то две хромозомы, вследствие чего на этой стадии можно отличать зародыш мужского пола (рис. 15 b) от женского (рис. 15 c).

Вставочная часть (*суммирование хромозом, собственно оплодотворение*). После образования хромозом наступает их соединение в одну группу, каковой процесс должен рассматриваться как акт параллельный редукции. У *Cystoopsis* он приводит к своеобразным результатам.

Уже в профазе начавшие расходиться центриоли теперь становятся по полюсам в направлении продольной оси тела, благодаря чему обе группы хромозом сближаются друг с другом в экваториальной плоскости, и сообразно мужской и женской их группе развивающееся центральное веретено является двойным (рис. 16 a,b). В это время

еще можно отличить возникающий мужской зародыш (рис. 16 а) от женского (рис. 16 b); такое же отличие возможно и немного позднее, когда мужские и женские хромозомы явно собираются в одну группу (рис. 16 с.). Однако процесс суммирования хромозом у *Cystoopsis* не ограничивается только этим. Все более и более приближающиеся друг к другу мужские и женские хромозомы, наконец, начинают сливаться попарно и, независимо от пола, дают начало трем хромозомам более крупных размеров. В это время различение пола оказывается невозможным (рис. 16 d).

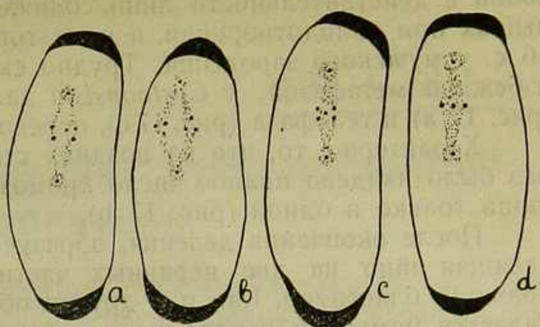


Рис. 16. Процесс оплодотворения (суммирование хромозом) у Cystoopsis Увел. 1000

Возникает вопрос, каков порядок этого слияния. Точно ответить на него я не имею возможности, но естественно, в соответствии вообще с нашими знаниями о составе бивалентных хромозом, надо допустить, что попарное слияние происходит между одноименными хромозомами—мужской и женской. Таким же образом надо допустить, что в мужском зародыше одна хромозома (половая) остается унивалентной.

Другими словами теперь как бы повторяется та „кон‘югация хромозом“, которая имела место в яйце перед редукцией. Однако тогда она была кратковременной, теперь же является длительным процессом, так как слившиеся при оплодотворении хромозомы остаются в этом состоянии и в дальнейшем развитии зародыша, когда мы по правилу наблюдаем только три хромозомы (рис. 1, рис. 17 a,b) и лишь в виде исключения большее их число.

2-ая половина кариокинеза (*метафаза, анафаза, телофаза*). После слияния хромозом, начавшийся кариокинез и прошедший только профазу, так как был прерван процессом суммирования хромозом, должен развиваться дальше и закончиться. На очереди теперь находится метафаза, как та часть кариокинеза, когда расположенные в экваториальной плоскости хромозомы обращаются своими дочерними половинами к различным полюсам. Обычно об этом периоде мы судим по наиболее бросающемуся в глаза признаку—экваториальному расположению хромозом. Но сейчас это является недостаточным, так как в плоскости экватора происходит процесс суммирования этих элементов, крайним пунктом которого и является стадия материнской звезды (рис. 16 d). Очевидно, что в данном случае эта картина должна иметь двоякое значение: 1) момент наибольшего слияния мужских и женских хромозом, что должно быть отнесено к вставочной части—процессу оплодотворения и 2) момент деления образовавшихся бивалентных хромозом при их ориентировке к различным полюсам. Этот последний момент должен быть отнесен уже к развивающемуся дальше карио-

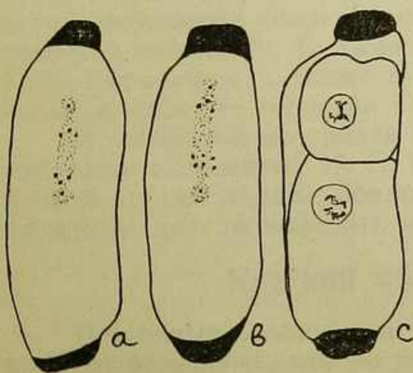


Рис. 17. Анафаза и телофаза оплодотворения у Cystoopsis Увел. 1000

кинезу, к его метафазе; однако у *Cystoopsis'a* он не различим. Может быть, наблюдавшиеся мною более поздние стадии его представляют собой в действительности лишь сближение хромозом в женских зародышах при оплодотворении, в роде того, как это изображено на рис. 16 с. у мужского зародыша. Трудно сказать. Во всяком случае за неизбежной метафазой, у *Cystoopsis'a* далее нормально следует анафаза (рис. 17 а) и телофаза (рис. 17 с), переводящие ядра в состояние покоя.

Характерно то, что на поздних стадиях анафазы мною несколько раз было найдено полное число хромозом—то в обеих их группах, то лишь только в одной (рис. 17 b).

После окончания деления, образуется первая борозда дробления, делящая яйцо на две неравных части. Несколько позднее делится больший бластомер. Как и у других об'ектов момент оплодотворения является моментом начала жизни нового организма.

Подводя итоги сделанному описанию, мы видим, что исследование дало мне ответы на оба поставленные мною вопроса.

Во всем ходе процессов созревания и оплодотворения у *Cystoopsis* я получил новые подтверждения своему взгляду на эти явления, как на кариокинезы, в середину которых вклинено раз'единение однозначных хромозом (редукция) или соединение их (оплодотворение). В этом отношении редукция у самца проходит весьма демонстративно, у самки же она без труда может быть подведена под общую схему. Что касается оплодотворения, то и оно проходит типично для всей схемы, при чем процесс соединения хромозом выражен резче, чем в других случаях, так как он завершается слиянием этих элементов.

В этом своеобразном слиянии хромозом заключается ответ и на второй поставленный вопрос. Благодаря этому слиянию нормальное число хромозом в развивающихся бластомерах равняется трем, и только в виде исключения, когда слияние между теми или другими хромозомами не происходит, мы имеем дело с большим их числом.

А. В. Федюшин

Материалы к изучению птиц восточной Белоруссии.

Постепенно накапливающиеся сведения относительно белорусской орнитофауны в результате последних исследований в пределах восточных округов, как моих, так и других авторов, заставляют опубликовать их, так как, с одной стороны, относительно этой части республики до сего времени по птицам почти ничего не было напечатано [1]), а с другой, появившийся в „Нашем Крае“ № 8-9, 1926. „Сьпіс птушак, якіх я назіраў у ваколіцах Горак“ проф. П. Соловьева, содержит ряд видов, заведомо не встречающихся в указанном месте и внесенных автором явно по недоразумению [2]) (очевидно на основании неосторожного компилирования старых сводок общего характера) и, вследствие чего, список является не „багатым і каштоўным матэр'ялам... дзеля высьвятленьня авіфаўны Беларусі“, какого мнения о нем сам автор, а, наоборот, может служить поводом к заблуждению лиц, занимающихся орнитологическими сводками на основании литературных данных.

Предлагаемая статья является следствием обработки собранных материалов и наблюдений, произведенных с 15 по 25 сентября в 1924 г. и с 1 по 28 августа в 1925 г. на территории бывшего Речицкого уезда, в пределах Жаровского лесничества; там-же, на Днепре, по речке Брагинке (с. Гдень, Котичев, Иолча); затем, с 30 мая по 1 августа в 1925 г. на территории округов: Бобруйского (сев. часть), Могилевского, Калининского, отчасти, Оршанского (Дрибинский р.) и, наконец, в Горках и окрестностях в течение апреля 1926 г.

Основанием для сообщаемых данных является коллекция шкурок птиц, собранная в указанных округах, всего свыше 800 экземпляров, затем, небольшие сборы из окрестностей Горок, переданные в Зоологический кабинет Б. Г. Университета студентами Б. И. Федорако и С. В. Кириковым, а также несколько чучел местных птиц, виденных мною в кабинете зоологии Горецкой сельско-хозяйственной академии.

В собирании материала особенную помощь мне оказали мои сотрудники-студенты И. Н. Сержании и В. В. Слесаревич. Им, как и всем другим лицам, обязанный помощью в моей работе, считаю приятным долгом выразить искреннюю благодарность.

Краткий общий очерк местности.

Восточные белорусские округа в значительной степени отличаются от остальных, как по рельефу, так и общим характером своих ландшафтов.

Разнясь от северной Белоруссии, с ее еловыми и сосновыми лесами на глинистых и валунных почвах, своими обезлесенными ланд-

[1]) Кроме небольшой заметки В. Бианки: „Птицы, наблюдавшиеся в 1913 году в Оршанском уезде, Могилевской губ.“ Орнитол. Вестник, 1914, № 4.

[2]) Например, Sitta caesia (!), Sitta uralensis и др.

шафтами, примыкая ближе уже к лесостепи, в типичном виде выраженной в некоторых смежных уездах бывш. Гомельской и Черниговской губерний, восточные округа обнаруживают ряд новых черт в фауне, более свойственных *лесостепной полосе* и гораздо в меньшей степени *таежной*, чем это имело место для Витебского Задвинья (29, стр. 160-161).

Здесь нет еще (кроме Речицкого уезда) типического зандрового ландшафта, так хорошо выраженного в Полесьи, а моренные отложения не столь типичны и не так хорошо иллюстрируют следы ледника, как в Витебщине. Наоборот, в восточных районах—Пропойском, Чериковском, Климовичском—часто встречаются мергелевые почвы, известняки, фосфориты и друг. меловые отложения, а местами—подзолистые и песчаные участки. Нередко имеет место сильное развитие аллювиальных отложений, особенно в долинах Днепра, Сожа и Беседи.

Первая часть исследованной территории от ст. Осиповичи и до Днепра под Старым Быховым является хорошо еще лесистой, при чем, в долинах рек Свислочи, Березины, Ольсы и Друти преобладают пойменные лиственные леса. Особенно замечательны леса в долине р. Березины, где сплошной полосой растянулась широколиственная дубрава с дубом, ясенем и, реже, грабовыми насаждениями. Грабовые леса здесь находят предел своего северного распространения и в чистом виде уже, как это имеет место в южном Полесьи, не встречаются. Значительные леса и при том, главным образом, лиственные или с примесью сосны, реже ели, сохранились и далее на северо-восток от Березины, по направлению на Кличев и Быхов. Преобладающими породами здесь являются: дуб, ясень, береза, ольха, осина, клен, реже граб, орешник, ель и, только местами, сплошная сосна.

Только перед самым Быховым, под'езжая к нему с западной стороны, лес редеет и начинаются сплошные пашни. За Днепром, уже в пределах Могилевского округа, лесу становится несравненно меньше, да и характер его иной. Чисто березовые леса близ речки Ухлясти сменяются сосновыми борами вдоль шоссейной дороги на Могилев и Гомель, но уже у села Никоновичи лес редеет и сменяется песчаными, почти без растительности полями. Далее на восток, до самого Пропойска, чередуются крайне бедные поля, с редкими перелесками поодаль от дороги.

У самой долины Сожа, близ Пропойска растительность снова приобретает вид леса, имеющего характер береговой уремы, с преобладанием кустарниковых зарослей и отдельных дубовых групп. Правый, низменный берег реки Сожа широкой равниной уходит за горизонт, местами образуя чистые луговые пространства, прорезанные старицами реки с зарослями лозы, местами же, долина покрыта вековыми дубами или небольшими группами их, делающими вид весьма живописным. От Пропойска к северу тянется изреженный сосновый лес, а ближе к долине реки Прони лес приобретает смешанный характер, с сильной примесью березы, осины, ольхи, ели и дуба. По заливным лугам долины Прони, так же как и вдоль Сожа, встречаются отдельные дубы, а местами они образуют чрезвычайно живописные вековые рощи, с чистой муравой внизу, лишенные почти всякого кустарникового подседа.

От Гиженки до *Чаус* местность ровная, почти сплошь безлесная. Многочисленные новые поселки и хутора, поля с невыкорчеванными еще пнями свидетельствуют о недавнем отвоевания у леса пахотных участков. Кое-где, среди полей стоят высокие, голые до самой ма-

кушки, одинокие сосны—последние свидетели бывшего здесь еще недавно леса. Почти такой-же характер имеет месность и далее на с.-запад до самого Могилева. К юго-востоку от Пропойска до Черикова местность носит в общем ровный характер и довольно однообразно, сильно обезлесенная, но местами пересеченная глубокими оврагами и узкими долинами маленьких речек, обычно всегда запруженных плотинами водяных мельниц, и образующих в таких местах небольшие пруды.

К югу от Черикова, на левом берегу Сожа местность становится более лесистой и здесь снова попадаются сплошные массивы лиственных пород из дуба, ясеня, березы, осины и др. Близ деревни *Клины* почвенные условия резко меняются и, вместо песчаных и мергелевых почв, начинают преобладать суглинки и подзолы, что, в свою очередь, обусловило новый характер здешнего леса, сказавшийся в сильной примеси ели и осины. Правда, полоса этой елово-осиновой рамени не велика и уже ближе к селу *Тимоново* лес снова приобретает вид соснового бора, с примесью дуба, лещины и ясеня.

Несколько особый характер имеет местность в посещенном нами участке Белынковичского района.

Здесь снова преобладают сильно песчаные почвы, а местами вовсе обезлесенные участки производят впечатление полустепных пространств. Редкие сосновые леса большей частью молодняки, во многих местах выгоревшие на значительном протяжении, кажутся особенно безжизненными. Долина реки Беседи весьма интересна сильными отложениями белого, сыпучего песку, создающего впечатление дюнн, лишенных даже признаков растительности. Ветер постоянно меняет форму поверхности этих песчаных полей и часто засыпает песком часть русла реки, образуя перекаты и мели, в результате чего меняется и самое течение ее.

Ближе к ст. Унеча местность снова становится более лесистой, но уже нигде нет крупных лесных массивов, как в Западн. Белоруссии.

Таким образом, Могилевщина (в собственном смысле и Калининский округ) является наиболее обезлесенной частью Белоруссии, кроме того, она в средней и южной своей части лишена почти вовсе типичных для этой страны *болот*, как сфагнового типа, так и травянистых —полесского типа.

Слабо представлены в этой части края также и водные пространства, а реки текут в доступных берегах, имеют чистое песчаное дно, нигде не образуя таких подводных и камышевых зарослей, как в южной и средней Белоруссии.

Наоборот, здесь преобладают поля, открытые луговые пространства с отдельными деревьями в долинах рек и значительные поруби среди небольших лесов.

При сравнении отдельных белорусских губерний до войны в отношении их лесистости Могилевская была на последнем месте; это же место должны занять и теперешние округа Могилевский и Калининский.

Тоже и по отношению к водным пространствам.

Так, например (по данным П. А. Тарасова), по количеству озер и по площади занимаемой ими, округа: Могилевский стоит на предпоследнем месте, а Калининский—на последнем (по числу озер), имея общую площадь озерных пространств равную 600 гектарам каждый, против, например, 29.230 гектаров для Полоцкого и 20.530 гектаров

для Витебского округов. Еще большая разница в этом отношении бросается в глаза, если сравнить число озер Калининского округа, где оно равно *трем*, с числом озер для Полоцкого, где оно достигает 566, в Витебском—371, Мозырском—352 и т. д.

Совершенно очевидно, что указанные географические и физические особенности восточной части Белоруссии соответственным образом отражаются и на фаунистическом облике края, лишая его как ряда чисто лесных обитателей, требующих сплошных лесных массивов, так и многих представителей водоплавающих птиц, нормально встречающихся в северной, озерной и лесной части республики. С другой стороны, как это будет показано ниже, здесь налицо заметное увеличение *южных форм*, отчасти степных или, во всяком случае, легко мирящихся с полевой культурой и соседством человека или даже, благодаря последнему, увеличивающих свой ареал распространения, за счет вытеснения коренных, более требовательных обитателей.

Следующей территорией, где производились наблюдения, является юго-восточный угол б. Речицкого уезда, Гомельской губернии —между Днепром и речкой Брагинкой, от селений *Верхние Жары* и *Гдень* на юге и до села *Иолча* к северу. Этот участок является уже типичным для Полесья, с сильным развитием песчаных безвалунных морен, с чисто сосновыми лесами по более высоким местам, а к долине Брагинки ландшафт приобретает характер обширной, на десятки верст заболоченной равнины, с огромными площадями сплошного камыша (*Thypa latifolia, Th. angustifolia и Phragmites communis*). К краю это болото зарастает лозой, образующей здесь сплошные острова, а где местность повыше, всюду тянется кайма высокого лиственного леса, преимущественно из чисто грабовых насаждений или с примесью ильма, береста, ясеня, дуба, ольхи, липы, осины. Ель здесь уже нигде не встречается в естественных насаждениях.

Этот уголок восточного Полесья изобиловал целым рядом южных, сравнительно, форм, как растительных, так и животных, безусловно не встречающихся в северных районах Белоруссии. Из первых отметим присутствие здесь уже сплошных участков, занятых грабовым лесом, в котором часто встречается пробковый ильм (*Ulmus sp.*); в усадьбах постоянно можно встретить грецкий орех, выростающий здесь в виде толстого дерева; на ольхах, березах и др. очень часто можно видеть паразитный кустарник—омелу (*Viscum album*). Водяная флора интересна здесь присутствием реликтовых форм, вроде редкого водного папоротника—*Salvinia natans*, сплошным ковром покрывающего мелкие, тенистые лесные речки (река Тересица), а также—широко распространенного здесь водяного ореха *Trapa natans*, в изобилии встреченного нами во всех Днепровских старицах.

Из животных форм, кроме птиц, о которых речь будет дальше, здесь уже впервые появляются такие виды среди голых гадов, как, напр., *Hyla arborea* кроме того, значительно увеличиваются в числе жерлянки — *Bombina bombina*, чесночницы—*Pelobates fucus* серая жаба—*Bufo vulgaris*, а среди рептилий—повсюду можно встретить болотную черепаху—*Emys orbicularis*.

Млекопитающие тоже обнаруживают в своем составе уже значительную примесь более южных форм. Так, например, здесь добыта соня полчок—*Glis glis*, южный еж—*Erinaceus danubicus Matschie*, кое-где сохранились сильно истребленные косуля (*Capreolus capreolus L.*) и дикий кабан *(Sus scrofa L.)*, нередки вечерница Лейслера *(Nyctalus leisleri Kuhl)*, малоголовые летучие мыши *Pipistrellus pipistrellus Schreb*

Часть систематическая

I. ORDO COLYMBI

1. Podiceps cristatus cristatus L.

В пределах округов Бобруйского, Могилевского и Калининского летом ни разу не наблюдалась. Тем не менее, безусловно ежегодно бывает на пролетах как на Березине, Днепре, так и по Сожу. Под Жарами на Днепре с 22 сентября встречались небольшими стайками от 5 и до 10 экземпляров. Ввиду малочисленности или даже отсутствия подходящих стаций поганка эта должна быть причислена хотя и к обыкновенным, но крайне малочисленным видам и редко где гнездится.

2. Podiceps nigricollis Ch. L. Brehm.

В 1925 году мне привезли из Оршанского Сельско-Хозяйствен. Музея для определения пару черношейных поганок, застреленных в апреле месяце на Днепре под Оршей. О гнездовании этого вида в восточных округах Белоруссии данных нет.

3. Colymbus arcticus L.

Ежегодно встречается на весеннем и осеннем пролетах по Днепру. Относительно гнездования данных нет.

II. ORDO STEGANOPODES

4. Phalacrocorax carbo subsp?

Застрелен в половине сентября 1925 г. на Днепре, в Оршанском округе гр. Большовым. Прислать экземпляр для определения владелец отказался, запросив за птицу недоступную цену [1]), вследствие чего, к сожалению, относительно подвидового значения указанного экземпляра приходится только высказать предположение, что это скорее всего мог быть залетевший по Днепру с юга *Ph. carbo subcormoranu*, (*Brehm*). Относительно бакланов, регистрировавшихся в Белоруссии, имеются за последние годы (после работы Шнитникова (I) указания gr. O. Zedlitz (2), и Grassmann (3) о появлении иногда в Припятских болотах во время перелетов этих птиц, при чем Zedlitz провизорно определяет форму как *typica* т. е. *Ph. carbo carbo* (2). В этом отношении, повидимому, скорее прав Доманевский (4) (5), который, разбирая синонимику бакланов, определенно относит птиц полесских и литовских, виденных им в музеях Польского О-ва Краеведения в Варшаве [2]), а также в Зоол. Музее Варшавского Университета к подвиду *subcormoranus*, к этой же форме он относит и цитируемый экземпляр в работе Тарнани (6), убитый в конце прошлого столетия в парке б. Ново-Александрийского Лесного Института.

III. ORDO HERODIONES

5. Ardea cinerea cinerea L.

Довольно обыкновенна по крупным рекам, хотя везде встречается несравненно реже, чем в Витебщине. На реке Лобжанке 20 июля видел выводки в 3—4 штуки. Осенний, хорошо выраженный, про-

---

[1]) Это довольно типичный случай для российского обывателя, несмотря на то, что на этот раз гр. Б. имеет отношение к делу народного просвещения.

[2]) Два экземпляра убитых гр. Пусловским весною 1902 г. на озере Завише (Пинск. у.).

лет наблюдал на Днепре и в низовьях Сожа с 16—22 сентября. В иных местах цапли отдыхали на прибрежных песках стаями до 20 штук, чаще же по 3—5 шт. Вследствие необыкновенной засухи в 1924 году, обширное болото в долине Брагинки совершенно высохло и только в одном месте сохранился небольшой бочажок с массой скопившейся мелкой рыбы улиток, пьявок и др. болотных обитателей. На этом оазисе кормилась в течение всего сентября огромная стая цапель (свыше 50 штук), при чем даже ряд выстрелов не заставили птиц покинуть кормное место. Интересно отметить, что в Брагинских камышах серая цапля гнездится прямо на земле или кучах прошлогоднего камыша, несмотря на то, что в окрестностях имеется довольно высокий лес.

Относительно гнездовья в других восточных округах Белоруссии— данных нет, хотя нет также и сомнения в том, что изредка она гнездится там, так как и летом в удобных местах ее встречали. Убитые в конце сентября молодые птицы всегда оказывались весьма жирными, тогда как старые особи имели сала несравненно меньше.

6. Botaurus stellaris stellaris L.

Только в Речицких болотах может быть названа обыкновенной гнездящейся птицей. Что же касается округов Калининского и Могилевского, то, судя по отсутствию подходящих станций, должна быть редкой птицей.

7. Ixobrychus minutus (L).

Малая выпь также в южн. Белоруссии несравненно более обыкновенно, нежели в центральных и восточн. округах. Видел в начале августа в прибрежных зарослях лозы на Соже, близ пристани Корма один экземпляр, при чем птица оказалась прижатой бортом парохода и, находясь не более чем в 1 метре от него, не решилась взлететь.

8. Ciconia ciconia ciconia L.

В Бобруйском округе аист местами весьма обыкновенен, хотя, понятно, нигде не достигает той многочисленности, как в южном Полесьи. Но уже за Днепром в Могилевщине и, тем более, в Калининском округе численно заметно уменьшается, не составляя и там, однако, редкости. В Речицком округе снова увеличивается в числе, что находится в связи с лучшими условиями обитания и общим распространением вида. 7-VII (Гиженка) птенцы еще лежали в гнездах. 22-VII (с. Белынковичи) наблюдал 3 молодых еще не летающих. 30-VII (Гиженка) молодые самостоятельно кормятся. В течение дня по нескольку раз возвращаются к гнезду, где и ночуют. Днем раньше (29-VII) наблюдались уже парящие стаи штук в 10—12 Приблизительно с 20 августа почти не встречались.

9. Ciconia nigra (L).

Черный аист в лесах Березинского бассейна и далее по р. Друти, хоть и редко, но правильно встречается. За Днепром, на восток, в силу обезлесенности края и отсутствия болот—либо крайне редок, либо вовсе неизвестен. Ни в Могилевском, ни в Калининском округе мы его за лето ни разу не встретили.

IV. ORDO ANSERES

10. Anas boschas L

11. Querquedula crecca (L)

12. Querquedula querquedula (L)

Все три вида гнездящиеся птицы всей описываемой части Белоруссии. В Речицком Полесьи, особенно в Брагинских болотах в мокрые годы уток гнездилось невероятно большое количество. Вследствие же засух в течение ряда лет всюду заметно уменьшились в числе. На Днепре, в конце сентября, по отмелям и на песках встречались буквально тысячные стаи уток, и преимущественно крякв.

13. Clangula clangula (L)

22 сентября видел одинокий экземпляр на Днепре, близ Иолчи.

14. Nyroca nyroca (Güld)

20 сентября на реке Брагинке поднял одного нырка. Этот вид здесь и гнездится. Что касается округов Могилевского, Калининского, Бобруйского, то данных о нахождении белоглазого нырка пока нет.

15. Oidemia fusca (L)

Видел недалеко от парохода летевшую птицу на Днепре в последней трети сентября.

Указанные виды частично добыты и имеются в коллекции, либо непосредственно наблюдались. Что же касается целого ряда других из этого же отряда, то несомненно, что и несколько видов гусей, и черни—хохлатая и морская, так же как и крохали, а из уток—шилохвости, свиязи и широконоска—бывают и весною и осенью на Днепре и др. крупных речках. То же самое надо сказать и относительно видов, более или менее, редких или случайно залетных и, время от времени, могущих появляться на Днепре, но пока не указываемых нами за недостатком фактических данных.

V. ORDO ACCIPITRES

16. Pandion haliaëtus (L)

Несравненно реже встречается, нежели на Витебских озерах. Наблюдалась очень редко на Соже и на Днепре.

17. Tinnunculus tinnunculus tinnunculus (L)

Во всех округах довольно обыкновенный гнездящийся вид. 17 июля под Тимоновым (Калинин. округ) видел трех молодых уже летающих, но еще получавших корм от родителей.

18. Erythropus vespertinus vespertinus (L)

В большом количестве встречен только в Речицком округе, в окрестностях села Верхние Жары в половине августа. Нет никакого сомнения в том, что это были местные кобчики, целыми семьями вылетавшие на закате дня охотиться за прямокрылыми и жуками в поле, где время от времени садились на одинокие сосны, служившие им наблюдательными пунктами и для совместных ночевок. На особенно густой сосне иногда усаживалось их на ночь штук до 10.

19. Falco columbarius alaunicus Fedjusch

16 июля в окр. Тимонова (близ г. Климовичи) в сосновом лесу добыты две молодых птицы из выводка в три штуки. Как и из Себежского уезда, эти экземпляры оказались принадлежащими местному подвиду, описанному мною в прошлом году (7). Повидимому, где то здесь теряется южная граница гнездования дербника. На западе Белоруссии она проходит почти через *Минск*, и южнее этойлинии— Минск—Климовичи у меня нет ни одного экземпляра, добытого во время гнездового периода. Повидимому, уже пролетный экземпляр добыт И. Н. Сержаниным 15 августа под с. В. Жары (Речицк. у.).

20. Falco subbuteo subbuteo (L)

Довольно обыкновенный гнездящийся вид. Особенно много чеглоков мы наблюдали в окрестностях Гиженки (к сев. от Пропойска 18 верст) на полянах и среди порубей в сосновых лесах. В июле иногда можно было сразу наблюдать на поляне в несколько десятин не менее десятка, полутора птиц, охотящихся за жуками и др. На одной из таких полян (в Гиженке) в течение нескольких охот собрано 8 старых птиц.

21. Pernis apivorus (L)

Довольно обыкновенный хищник во всех описываемых округах. Экземпляры имеются в коллекции изо всех трех округов, при чем в районе дер. Клины, Чериковского района 7 и 8 июля добыты две пары у гнезд. В гнездах оказались в это время: в первом—два пуховых, белых птенца, во втором—два надклюнутых яйца. Самки, как и всегда, замечательно крепко сидели на гнездах и, для того чтобы согнать их, пришлось несколько раз стукнуть по дереву, а другая продолжала сидеть на яйцах даже тогда, когда мальчишка полез к гнезду по тому же дереву и слетела только тогда, когда он потянулся к ней рукою. Необычайная привязанность к гнезду у осоеда видна из того, что птица находилась на гнезде даже во время лесного пожара и дерево с гнездом оказалось снизу почти на половину обгоревшим.

Пожар был уже во время насиживания яиц. Очень позднее появление птенцов у осоеда несомненно стоит в связи со временем появления личинок у Aculeata,—главной пищи молодых.

В двадцатых числах сентября видел еще парящего осоеда недалеко от села Гдень (Речицк. округ).

22. Milvus korschun korschun (Gm.)

Реже встречается нежели в озерной части Белоруссии. На Днепре весьма обыкновенен.

3/VI. (Осокино, Бобр. округа) в гнезде находились три яйца. 21/VI (Гиженка, Проп. района) птенцы полувзрослые. 22/VI в другом гнезде (там же) один хорошо оперенный птенец. 13/VII (Клины, Чериковск. района) встретили уже летающих молодых.

20/VII. (Тимоново, близ Климович) видел парящих семьями (3—4 шт.) коршунов.

В одном месте в лесу, близ дороги поднялся из зарослей орешника черный коршун. Исследовав место, я заметил, что птица была занята отрыванием падали закопанной в земле, при чем успела вытянуть на поверхность кишку от трупа, кажется, лошади. Этот случай, по моему, лишний раз убедительно доказывает, что коршун при отыскивани падали руководится не только зрением, но и обонянием,

так как увидеть зарытую в землю среди леса и, к тому же, в густых кустах тушу, понятно, невозможно. В сентябре (15-25) коршун на Днепре нами уже не был замечен.

23. Aquila chrysaëtus chrysaëtus (L)

Едва ли где гнездится в описываемых округах. В текущем году мне был доставлен заведующим Могилевским Окружным Музеем осенний экземпляр молодого беркута, убитого в пределах Могилевского округа (более точных данных при птице не оказалось). Должен считаться весьма редкой птицей.

24. Haliaëtus albicilla (L)

Встречается, безусловно, чаще беркута. Осенью не очень редок на Днепре, где бьет домашних гусей. О гнездовании белохвоста в пределах описываемых округов—у меня данных нет.

25. Aquila maculata (Gm.)

15-VI в окрестн. Гиженки (Пропойский район) мною застрелена старая самка, слетевшая с гнезда. В гнезде оказался 1 пуховой птенец и надклюнутое яйцо. В лотке гнезда были зеленые ветви ели и ольхи.

Распространен значительно реже малого подорлика.

26. Aquila pomarina pomarina Brehm

4-VI в окрестн. дер. Осокино, Бобр. округа, убиты два самца (!) у одного и того же гнезда, в одно и то же время. В гнезде оказался один птенец дней 5. Лоточек также был выстлан зелеными листьями. В зобу у старых птиц найдены два птенца рябчика, вероятно с'еденные еще в яйце, так как при них же находилась яичная скорлупа. В желудках, кроме того, найдены остатки еще нескольких птенцов рябчика.

В лиственных и пойменных лесах Березины и Друти малый подорлик довольно многочислен, по сравнению с другими районами.

27. Circaetus gallicus (Gm.)

6 августа видел по дороге из с. Жары в Гдень (в Речицк. округе) парящего невысоко змееяда. Гнездится-ли в средних округах восточн. Белоруссии—неизвестно. Имеющийся экземпляр в моей коллекции застрелен в августе в Острошицко-Городецком районе, Минского округа,

28. Archibuteo lagopus lagopus (Brunn).

Мохноногий канюк правильно бывает у нас с поздней осени и в течение зимы на полях. Из Могилевского округа (?) видел экземпляр этой птицы в Зоологическом кабинете Горецкой сел.-хоз. академии.

29. Buteo vulpinus intermedius Menzb.

Один из самых обыкновенных хищников наших лесов. Особенно многочислен в лиственных лесах между Березиной и Друтью, в Кличевском районе. Несколько гнезд, найденных в окр. дер. Осокино—в одном, 2 июня, содержали 3-х только что выклюнувших птенцов и надклюнутое яйцо, а в другом 4 июня были птенцы недель двух от роду, так как маховые значительно выросши.

13-VII. (Клины, Чериковского района) видел уже летавших молодых.

19-IX—1924 г. в окр. села Гдень (Речицк. уезда) видел стаю в 20 штук, тянувших на юг.

30. Accipiter nisus nisus (L)

Повсюду обыкновенный и частично оседлый вид. 2 и 3 VI найдено два гнезда (Осокино) с шестью яйцами в каждом. 8 июля в окрестностях Гиженки найдено гнездо с шестью молодыми весьма различного возраста, судя по величине. Самый малый птенец—был весь в белом пуху, тогда как самый взрослый—почти оперившийся. Самка смелее вела себя и подлетала к гнезду, садясь тут же на верхушку деревьев, тогда как самец держался гораздо осторожнее, издали отзывался на крик детей, но не подлетал на выстрел.

31. Astur gentilis subsp.

„ „ $\lessgtr$ gallinarum Brehm (?)

Весьма обыкновенный оседлый вид. В течение лета найдены несколько гнезд. 2 июня (Осокино) в гнезде были 3 яйца. 21 июня (Гиженка) птенцы в гнезде уже стоят на ногах и машут крыльями. 4 июля (ibid) птенцы почти оперены. 13-VII. Молодые уже вылетели из гнезд.

Что касается систематического положения белорусского ястреба тетеревятника, то решить этот вопрос пока не так легко. Имея серию ястребов в 17 экземпляров и сравнивая их с экземплярами Зоологич. Музея Академии Наук, я мог убедиться только в том, что наш тетеревятник не вполне является типичным—*gentilis,* образцом для которого я имел 4 птицы из Швеции (ad ♂ 22 окт. 1924 г. Kuutby; ad ♀ 5 февр. 1879 г. Vestmanland; (♂) jur. ♀ 5 авг. 1918 г. и ♂ juv. 19 сент. 1926 г. Erstavik, Saltsjo).

Старые птицы из Белоруссии может быть на тон *бурее* шведских, но в общем слабо отличаются. Но молодые птицы своим ржавым низом, отсутствием штриховки на штанах более приближаются к западной расе. Сравнивая белорусских ястребов с большими сериями из остальных частей Европы и Сов. Союза, легко можно было установить, что на территории от Балтийского моря до Центральной Европейской части Сов. Союза включительно можно наметить (что хорошо выступает только на больших сериях) *три группировки*: 1) очень хорошо выделяющуюся значительно *более светлой окраской* как снизу (особенно!), так и сверху; светлыми, почти белыми окаймлениями перьев спины и вершин второстепенных и третьестепенных маховых; светлым основным полем хвоста и резкими, с подчеркнуто-беловатым ореолом, бурыми поперными полосами на нем—балтийскую расу (natio?), занимающую Лифляндию и Эстляндию, а на восток идущую до северной Белоруссии и, может быть, до Смоленской губернии, но не далее. (Проверено на большой, прекрасной серии, собранной бароном Лоудоном в Лиздене и окрестностях и на других Академического Музея экземплярах—всего числом 19). К сожалению, отсутствие старых птиц в этой серии мешает окончательному выделению этой расы. 2) Группу (natio?) белорусскую—очень плохо характеризующуюся, но *отличающуюся* как от шведских птиц, так и от средне-русских. Птицы, составляющие эту группу—*светлее,* в молодом возрасте, нежели скандинавские, но *темнее,* чем балтийские и в особенности—средне-русские. Старые птицы как и молодые—(некоторые экземпляры) тяготеют к

gallinarum. Так, например, большинство старых птиц имеет очень плохо выраженную „бровь“, менее белую, чем у птиц из Смоленской губ. или Московской. Самец от 13 мая 1904 г. из Завише (Пинского уезда, кол. Шниткова, крыло 322) очень схож с типичным *gallinarum* из зап. Франции (Marna, april, coll. Мензбира крыло—315) Второй самец из Волыни (г. Острог 15 апр. 1889 г. coll. Березовского, крыло—315) тоже весьма близок к *gallinarum*, но, благодаря изнош. перу, спина у него выглядит бурее. Третью группу, идущую далее на восток, составляют птицы средне-европейской части Сов. Союза, а именно, губерн.: Смоленской, Московской, Рязанской, Харьковской, Воронежской, Тульской, Орловской и, отчасти, Ленинградской. Раса эта, уже вполне достаточно намеченная, особенно на молодых птицах (до сих пор была тоже не описана [1]), отличается от шведских более *светло бурым* оттенком крупного кроющего оперения верхней стороны тела.

Кроме того, надо указать, что у русских тетеревятников окраска хвоста всегда светлее, чем у типичных *gentilis*. При этом интересно отметить, что во всех случаях отличительные признаки лучше всего выступают у тетеревятника, как и у некоторых мелких соколов, в молодом возрасте, т. е. в первом годовом наряде.

При сличении принималось во внимание общее зимнее посветление оперения и сравнения проводились по возрастам и, по возможности, синхронично.

Более подробное рассмотрение систематических признаков наших тетеревятников потребовало бы много места, но в настоящее время едва-ли удалось-бы окончательно выяснить таксономическую физиономию белорусских ястребов, так как несомненно, что область, находясь на границе распространения уже оформившихся географических рас (subspecies) под влиянием более резко выраженных, вероятно, климатических, главным образом, факторов неизбежно должна будет носить в своих насельниках смешанные черты, с преобладанием признаков то одной, то другой расы. Тем более трудно подвести под одну какую-либо рубрику все экземпляры из белорусских провинций, так как далеко не достаточен имеющийся в наших коллекциях материал, как по местным птицам, так и, особенно, касающийся западно-европейских стран.

Не безынтересно мнение относительно западно-белорусских, литовских и польских птиц, некоторых германских и польских орнитологов, имевших возможность, благодаря войне, получить из этих провинций материал.

Так, Gr. Zedlitz (2) (стр. 352) говорит относительно птиц из Пинских болот, что „здесь вопрос идет о большой, светлой типической форме (Astur palumbarius palumbarius L.)“.

Domaniewski (4) (стр. 10) обозначает птиц из Пинского Полесья как „*A. g. gentilis (L)*, не входя в подробное рассмотрение вопроса. *Gengler* (8) (стр. 73) тоже определяет подвид как *A. g. gentilis*; к типической (шведской) форме относят западно-белорусских птиц и Grassmann (3 стр 299), Reichenow (9, стр. 180) и Stolz (10, стр. 372). И только Dr. *H. Sachtleben* (11, стр. 214—217) (один из наиболее тщательно отнесшихся орнитологов к разработке систематических особенностей коллекций из оккупированных областей)—обозначает ястребов из Литвы как *A. g. subsp.* и, после подробного разбора статьи *E. Schiöler* (12) относительно отличительных признаков у датских и германских ястребов, которых *Schiöler* предложил назвать бремовским

[1]) В настоящее время академик *П. П. Сушкин* уже описал ее.

именем—*A. gentilis gallinarum*[1]), а также, разобрав вопрос о северно-русских, более *светлых* ястребах, в конце концов, приходит к заключению, что пока литовских ястребов не возможно отнести к какой-либо определенной расе.

Правда, *Dr. Sachtleben* имел весьма небольшой материал по русским тетеревятникам (3 птицы из Литвы, одну из Москвы и одну с пометкой „Russland", из коллекции Schlegel'я от 1896 г.).

32. Circus pygargus (L)

Довольно редкий гнездящийся вид. Старую самку застрелил 7-VIII на обширном болоте близ селения Котичев (Комарин. волости, Речицкого у.), где обучалась ловле целая семья луней. Кроме того, в течение лета видел луговых луней на сенокосах вдоль реки Сож под Пропойском.

33. Circus macrourus (Gmel.)

Изредка наблюдался в августе на Днепре и в районе села Гдень, Речицк. у. Относительно гнездования данных нет, хотя, судя по тому, что степной лунь гнездится в Западной Белоруссии, то и в восточных округах, особенно в Речицком, гнездование его должно быть, тем более, несомненным.

34. Circus cyaneus (L.)

Чаще, нежели оба предыдущих вида встречался в течение лета в описываемой области.

35. Circus aeruginosus aeruginosus (L.)

В подходящих местах болотный лунь далеко не редок и в описываемых округах больше всего сохранился в Речицком Полесьи, особенно по Брагинке и Днепру.

25 августа, в окрестностях села Верхние Жары (Речицк. у.) застрелен молодой лунь, евший лягушку.

VI. ORDO GALLI

36. Bonasia bonasia grassmanni Zedl

В Бобруйском округе, в Потокском л-ве, в районе дер. Осокино—положительно многочислен. В течение дня в начале июня легко можно было поднять несколько выводков и отдельных птиц; кроме того, во всех гнездах канюков (здесь найдено 4 гнезда) и малых подорликов, так же как и в зобах этих хищников—неизменно находились птенцы рябчиков.

В Могилевском округе и, тем более, в Калининском весьма редеет и уже во многих местах истреблен вовсе. Совершенно отсутствовал и в лесах вдоль Брагинки, на юге Речицкого уезда. Между прочим, едва-ли его здесь отсутствие можно поставить в связь с отсутствием *ели*, так как, например, в дубовых лесах, к югу от Припяти, рябчик нами встречен, хотя ели тоже там нет.

Благодаря работам *gr. Zedlitz*, (2, стр. 227) наш рябчик выделен, и вполне заслуженно, в особый подвид, названный автором в честь убитого на войне под Пинском германского орнитолога лейтенанта *Grassmann'a. B. b. grassmanni* отличается от шведских и северно-рус-

[1]) Dr. E. Hartert в „Zusätze und Berichtigungen" к Bd. II V. d. p. F. на стр. 2205 признает уже бремовскую форму A. g. gallinarum для Зап. Европы.

ских, типичных *bonasia (L.)* более темно-коричневой спиной и не таким чисто серым цветом надхвостья. Terra typica — область реки Шары (б. Слонимский уезд). Все белорусские экземпляры, включая и из Калининского, самого восточного округа (5—IX. м. Костюковичи), принадлежат этому подвиду. В Смоленской губ. встречаются переходы к *bonasia*, но в западных уездах есть еще *grassmanni*.

На север форма *grassmanni*, по моим исследованиям, идет вплоть до Ленинградской губернии, захватывая всю Витебщину, обл. озера Ильменя, Псковскую губернию и Прибалтику, кроме северн участков Эстонии (Райкополь), где встречаются уже и типичные *bonasia*.

Равным образом, в Гдовском уезде, Ленинградской губернии, на ряду с *grassmanni* есть и типичные.

В Тверской губернии уже вполне типичные *bonasia* (с серо-серебристой спиной).

Какая форма рябчика обитает на Волыни—до сих пор неизвестно.

37. Tetrao urogallus pleskei Stegm (?)

Глухарь в исследованных округах довольно обыкновенен только в лесах Бобруйского округа и то далеко не везде. В лесничествах Брицаловском и Потокском он еще сохранился и, повидимому, не очень редок. Что же касается округов Могилевского и Калининского, то глухарь здесь уже безусловно редко встречается. В исследов. части Речицкого у. глухаря нет.

Относительно того, к какой географической форме принадлежат белорусские глухари, то пока этот вопрос должен быть решен провизорно, так как для окончательного выяснения необходим еще больший сравнительный материал Пока же, повидимому, можно наверное утверждать, что белорусские глухари не являются типичными и отличаются от шведских *urogallus* как величиной, так и окраской.

Тщательное сравнение белорусских глухарей, бывших в прошлом году в моей коллекции (3 экз.[1]), с недавно описанным Б. К. Штегманом *T .u. pleskei* из Ленинградской губернии обнаружило *полное их сходство*, кроме, разве, размеров. Тем не менее, то обстоятельство, что Штегман (33) описывал новый подвид, имея для сравнения глухарей не из Швеции, а из обл. озера Имандры (*Лапландия)*, которых и посчитал за типичных *urogallus*, позволяло-бы сомневаться в правильности выводов автора нового подвида уже потому, что со шведскими птицами ленинградские не были сравнены, если-бы не следующее обстоятельство.

В 1924 году *E. Lonnberg* описал в „Fauna och Flora“ vol. 19 № 2, стр. 71[2]) новую форму глухаря из окрестностей Каян (Финляндия)— *T. u karelicus*, отличающуюся от шведских глухарей более сильно испещренной белым цветом нижней стороной тела, при чем отдельные перья иногда совершенно белые,лишь с несколькими черноватыми отметинами на конце..., коричневатая часть верхнего участка спины, плечи и крылья более чисто красновато-коричневые, почти каштанового цвета по сравнению с шоколадно-коричневым у типического *urogallus* из Швеции.

Размеры у типа: крыло=380; хвост=320; culmen=46; кл. от ноздри=27; плюсна=81 m. m.

---

[1]) Кроме того, еще 11 экземпляров добытых в 1927 году.

[2]) Описание сделано на шведском языке, но диагностические признаки этой формы приведены на английском языке в „Arkiv för zoologi“ Bd. 19, A. № 1, на стр. 112.

Предполагая (как и Лённберг), что форма *karelicus* „населяет местность к востоку и к сев.-востоку от Каян“, откуда происходит типическая серия и, что принятые Штегманом глухари с Имандры за типичных *urogallus*, при описании ленинградской формы, на самом деле описаны Лённбергом под названием *karelicus*, с указанными признаками—становится ясным, что форма *pleskei* не может быть идентична с *urogallus*, с которыми имел дело Лённберг и, которая, тоже, хотя и крупнее, чем *karelicus*, но еще темнее на брюхе и сверху, чем последняя, тогда как *pleskei*, по словам Штегмана, наоборот, светлее с нижней стороны и более „желтовата“ сверху, нежели *karelicus Lonnb.*

В результате получается как-бы непрерывный ряд географических вариаций по характеру окраски расположенных таким образом, что шведские *urogallus Linne* наиболее густо бурошоколадного цвета сверху с небольшим развитием белых пестрин на брюхе; затем—финляндская и лапландская форма—*karelicus Lonnb.*, несколько светлее и сверху и снизу (больше белых пестрин); далее, в Ленинградской губ., в Западной Области и в Белоруссии—форма *pleskei Stegm.*, еще более светлая раса; еще далее на восток—формы *volgensis But.* и *uralensis Menzb.*, особенно последняя, достигают предельного посветления в границах вида. Из германских орнитологов вопроса относительно систематики белорусских глухарей касался только Gr. *O. Zedlitz*, оставив в своих работах (2, стр. 220; и 14, стр. 285) для глухаря бинарное название с добавлением „*subsp.*“, чем указывает на неопределенность подвидового значения.

Тем не менее, статья Zedlitz'а представляет известный интерес уже потому, что в ней указывается ряд признаков для шведских птиц и затрагивается вопрос относительно среднегерманских глухарей—*T. u major Brehm.*

Из этой статьи мы узнаем, что шведские глухари, несмотря на большую индивидуальную способность к вариациям, в результате чего там, как и в Германии, существуют „Riesen und Zwerge“ в одной и той же местности, в общем, все-же мельче среднегерманских. По Zedlitz'у в Германских музеях и в его личной коллекции из Силезии существуют самцы с длиною крыльев до 40 сант., „а очень старый ♂, которого я (Zedlitz), как сильнейшего, на выбор убил в Швеции, имел только 382 m. m. длины в крыле“. Что касается самок, то Zedlitz полагает, что *urogallus* на нижней стороне имеют более узкие темные поперечные полоски, нежели у самок *major Br.*, почему кажутся светлее последних. Интенсивность ржаво-красной окраски у самок Zedlitz считает возрастным признаком, при чем, с возрастом последний усиливается. Далее указывается, что „петухи из сев. Швеции (Лапландии, Jämtland) и особенно из Финляндии обнаруживают очень много белого на брюхе и имеют отчасти и большие размеры“ (2, стр. 221).

Из Припятского района Zedlitz исследовал только 3-х глухарей и нашел, что они отличались крупной величиной крыла (410 и 413 m. m). „Брюхо имеет довольно много белых пятен, но не такого определенного рисунка как финляндские.. На верхней стороне я не мог заметить никакого различия по сравнению с германскими петухами, но ввиду недостаточности материала для сравнения—это еще не является убедительным решением“ говорит автор (l. c. стр. 222).

С заключением Gr. Zedlitz'а—„что в Припятском районе уже имеются переходные формы к *uralensis*“ (l. c. стр. 222) совершенно не возможно согласиться, если иметь под руками настоящих *uralensis*,

весьма резко отличных характером всей окраски от западных темных рас [1]).

Доманевский (5) (стр. 13) приводит для Пинского Полесья (Завише) глухаря, обозначив его как форму *T. u. urogallus Lin.*, не входя в рассмотрение признаков.

Переходя к дальнейшему изучению вопроса о расовой принадлежности нашего глухаря, следует обратить внимание на следующее. В 1905 году Dr. E. Lönnberg в статье „Zur Kenntnis der Variation des Auerhuhns" (Ornithol. Monatsber. 1905. S. 99-103), описывая подробно два ненормально окрашенные экземпляры из Финляндии (в которых он признал любопытную атавистическую мутацию, назвав ее по ее мрачному оперению—*T. u. lugens*) дает, между прочим, размеры нормальных шведских *urogallus*, крыло у которых колеблется от 380 до 410 m. m., а ширина рулей равна 56-76 m. m.

В моей серии белорусских глухарей (12 экземпл.) размеры крыльев следующие:

425; 420; 420; 415; 415; 415; 415; 410; 405; 405; 405; 400 [2])

у *Ленинградских (pleskei):*

410; 405; 400; 395; 390 (по Штегману от 403-415).

У самого крупного шведского по *Zedlitz'y*:

382 m. m. [3]) (а по Lönnberg'у, как указано выше от 380-410 m. m.), Hartert: (13) (стр. 1880) для подвида *urogallus L.* приводит размеры в *380-408*, и в исключительных случаях—до 412 или только 375-378 m. m.

Для „сильных германских ♂ ♂" Zedlitz (l. c. 220) дает величину крыла в „40 см. и даже более", не указывая точнее.

Из этих цифр видно, что белорусские глухари являются одними из самых крупных среди западных рас и, во всяком случае, крупнее шведских—*urogallus*.

Но кроме размеров крыла, где возможны индивидуальные ошибки при измерениях в зависимости от способа, применяемого тем или другим автором, я хочу обратить внимание исследователей на весьма интересную статью gr. *Zedlitz'a*—„Das Gewicht als Rassenmerkmal bei Tetrao urogallus" (J. f. O. 1924. Heft 2. S. 244 252), в которой автор вопрос о географических расах глухаря называет „твердым орехом", который систематики уже в течение многих лет не могут раскусить". Затем, приводя очень много цифровых данных относительно веса самцов глухарей из разных мест. Зап. Европы, Прибалтийских провинций и др., Zedlitz для Швеции приводит ряд цифр, веса наиболее крупных девяти птиц, встреченных им за пять лет: 3,65; 3,70; 3,75; 3,98; 4,12; 4,14; 4,15; 4,18; 4,30 klgr.

При этом добавляет, что все экземпляры убиты осенью и, что весною их вес должен был-бы быть на 300-400 gr. меньше. Проф. Lönberg, много исследовавший шведских глухарей, сообщил Zedlitz'у, что средний вес старых крупных самцов весною *„наверное не превышает 4 kilgr."* и что только один известен „анормальный" экземпляр в 4,33 klgr., убитый в начале мая 1922 г. на току в Средней Швеции, по специальному разрешению министерства для выставки в качестве необыкновенного экспоната в Государственном Музее

---

[1]) Для сравнения с белорусскими глухарями я имел восемь экземпляров типичных u r a l e n s i s из Оренбургской губернии, хранящиеся в моей коллекции в Минске, и собранных, по моей просьбе, С. В. Кириковым.

[2]) Я измерял крыло рулеткой не по хорде, а по кривой стороне.

[3]) Способ измерения не указан, вероятно по хорде.

Следующая табличка, заимствованная из той же работы *Zedlitz*'а, легче позволяет судить о весе глухарей из разных стран.

	вес ♂♂ вообще	вес старых ♂♂	maximum
1. Южная и Средняя Швеция	3—(4,3)=3,65 [1])	в среднем : 4	4,33
2. Лифляндия .	4 (в среднем)	—	—
3. Курляндия .	4,2	3,75; - 5 (4,4—4,8)=4,4 (4,6)	5,6
4. Нижн. Померания . . .	4,5—5,5=5	5—6=около 5,5	6,5

Данные эти основаны на материале, полученном от взвешивания 1500-2000 экземпляров; при этом Zedlitz обращает внимание на то, что размеры крыльев обыкновенно не имеют аналогичных различий и варьируют в общем в довольно тесных границах. „Самый слабый, вполне перелинявший ♂, убитый в Швеции, весил немного более 2 kgr. при длине крыльев *в 362 m.m.*, тогда как самый большой размер крыла *в 390 m.m.* имел ♂ весивший 3,7 kigr." (l. c. стр. 251). В заключение же *Zedlitz* считает, что западно-русские глухари (крыло 410-413 m.m.) стоят ближе к восточно-германским или балтийским, и, что рассматривать шведских и померанских *Tetrao urogollus*, как принадлежащих одному подвиду—не возможно.

Из глухарей своей серии мне удалось взвесить только 8 экземпляров, при чем один из них был доставлен в выпотрошенном виде и в счет итти не может.

Все мои экземпляры застрелены в конце апреля, т. е. уже на исходе тока и, следовательно, по сравнению с осенними или даже в начале весны, весили менее (по данным Zedlitz'а) почти на 300-400 gramm.

Тем не менее, их вес оказался следующим: *4.703 gr.; 4.540; 4.500; 4430; 4430; 4300; 4220 gr.*

При этом обращает внимание на себя и то обстоятельство, что все указанные самцы добыты на токах, где ежегодно производится значительный отстрел и, вероятно, особенно старых и мощных среднних не оказалось.

Вышеприведенные данные относительно белорусских глухарей показывают, что они по весу и размерам (а по Zedlitz'у и по окраске) ближе всего должны стоять к *к средне-германским T. u. major Brehm*, но так как все же решать заочно вопрос о принадлежности их к этой расе рискованно (я не видел ни одного экземпляра из Германии), а с другой стороны,—по окраске наши глухари почти ничем не отличались от *pleskei* из Ленинградской губернии, а вес последних пока мне тоже неизвестен вовсе—я только *провизорно* отношу их к последнему подвиду, но никак не к шведскому—*urogallus L.*

В заключение еще остановлюсь на одном признаке, в котором обыкновенно пытаются видеть пример географической изменчивости, и с чем, по моему, невозможно согласиться. Речь идет о степени белой расцветки на рулевых у самцов. Исследование уже такой небольшой серии птиц как моя указывает, что в одной и той же местности, а в данном случае буквально на одном и том же токовище, встречаются весьма в различной степени расцвеченные хвосты и, что этот

[1]) Все цифры для Швеции, за исключением maximum, относятся к осенним экземплярам.

признак глубоко индивидуальный. Прилагаемая фотография № 1 показывает хвосты двух самцов убитых на одном месте и в одну и ту же зорю; фот. № 2—дает понятие о средней степени развития белых пятен у белорусских глухарей.



Фот. № 1.



Фот. № 2.

38. Lyrurus tetrix subsp.

Обыкновенный, но далеко уже не многочисленный вид. Менее всего сохранился в округах Могилевском и Калининском.

Систематическое положение белорусского тетерева, так же как и глухаря, далеко еще не выяснено.

Gr. O. Zedlitz (2) (стр. 222), подробно разбирая таксономические особенности рас тетерева, пришел к выводу, что тетерева из Пинского Полесья образуют переходы к восточно-европейской форме *viridanus* и обозначает этот вид в своем последнем списке (l. c.) как *L. tetrix* < *viridanus Lorenz.* Тем не менее, этой точки зрения цитируемого автора, после тщательного сравнения серии птиц из Белоруссии с типичными *viridanus* с Волги и южн. Урала, я не разделяю и думаю, что и gr. Zedlitz, если бы имел в руках не единственного только *самца* (из окрестн. дер. Туховичи, II. V.), а серию *самок* оттуда-же, имеющих в данном случае гораздо более решающее значение, то не рискнул бы сделать вышеприведенный вывод. Не имея возможности здесь, из-за краткости места, подробнее остановиться на диагностических признаках изученного мною сравнительного материала в З. М. А. Н., сообщу пока только важнейшие выводы, к коим я пришел в заключение этого изучения.

Белорусские тетерева (*самки*) отличаются от *viridanus* значительно более темной общей окраской и сверху и снизу. Они имеют более развитый черный цвет на перьях спины и более темный и широкий рыжий поперечный рисунок. На спинной стороне белорусские птицы лишены беловатых окаймлений и поперечных белых предвер-

шинных пестрин на контурных перьях спины и надхвостья, тогда как у *viridanus* (особенно у старых птиц) белая расцветка здесь сильно развита.

Таким образом у *viridanus* обыкновенно на спине у самок имеется три цвета: черный, светло-рыжий и белый, испещренный мелкими темными пестринками—у белорусских тетерок на спине обычно (исключения очень редки!) наблюдаются два цвета: черный и темно-рыжий.

С нижней стороны белорусские тетерки также хорошо отличаются от *viridanus* гораздо меньшим развитием белой расцветки в виде окаймлений пера, что особенно хорошо заметно на зобу, который у западных птиц рыжий, с черными поперечными полосками, а у *viridanus* сильно *белесый*. Горло у белорусских птиц также никогда не бывает так бело, как у *viridanus*. Что касается белого зеркальца на крыльях, признак, которому обыкновенно придают в систематике тетеревей большое значение—то и в этом отношении белорусские птицы, в общем, хорошо отличны от восточных: зеркальце, как правило, у первых уже, хотя почти всегда видимо снаружи при сложенном крыле. Но этот признак, повидимому, весьма индивидуален, и, напр., среди форменных *viridanus* (♀. 1. XI. Бугурусланский у. Самарской г.) встречаются экземпляры с незначительно выступающим зеркальцем и, во всяком случае, не более чем у белорусских экземпляров, а у самца из *Hallein* (Австрия) в З. М. А. Н. зеркальце достигает ширины *18 m.m.*, т. е. почти не уступает самарским птицам.

Есть еще, по моему, наиболее постоянный признак у расы *viridanus* (проверено на всех самках коллекции З. М. А. Н.): под крылышком (ala spurium) скрыто белое пятно, хорошо заметное, если отодвинуть крылышко в сторону и образованное белыми основаниями больших кроющих первостепенных маховых. Этого белого пятна у западных рас или *нет вовсе* или оно развито *крайне слабо*.

Среди тетерок из Белоруссии в коллекции З. М. А. Н. имеется экземпляр сборов В. Н. Шнитникова из Пинского уезда („Перехрестье 8. XII. 1903“) почти не отличимый от настоящих *viridanus* по своему сильно белесому зобу, беловатым окаймлениям перьев спины и надхвостья и по светло-рыжим тонам поперечного рисунка верхней стороны. Но указанного белого пятна под крылышком—признака обязательного для *viridanus*—этот пинский экземпляр, конечно, не имеет ни в малейшей степени, почему понятно, и не может быть рассматриваем иначе, как светлый extrem *западной расы*.

Признаки для самцов менее наглядны, а обычно указываемый *зеленый* отлив оперения у *viridanus* и вовсе не оправдывается на деле.

Таким образом, говорить о близости белорусского тетерева к восточной расе *virdanus*, как это делает уважаемый Gr. Zedlitz, не приходится.

С другой стороны, сравнивая своих птиц с экземпляром из средней Швеции (из Karrhopoll, близ Стокгольма от 8-VI 1878, сбор. Rosenius)—легко было заметить, что эта шведская птица отличается от белорусских *более серой окраской* и более крупными черными пятнами на спине. Вся птица выглядит более *пестро*. Белорусские же тетерки, наоборот, более рыжи и однотонно окрашены. Кроме того, у шведской птицы, т. е. типичной *tetrix L.*, зеркальца при сложенном крыле вовсе не видать.

Уже ряд указанных признаков заставляет отказаться признать в наших тетеревах форму идентичную со шведской—*tetrix*.

Дальнейшее исследование этого вопроса привело к литературному, главным образом, изучению западно-европейских тетеревей и, в частности, повидимому, близкой белорусским тетеревам формы *L. t. juniperorum Brehm.*

Единственный экземпляр, который по распространению можно было-бы считать за *juniperorum* из Hallein от 29-V—1880 г., к сожалению, оказался *самцом*. Эта птица очень сходна с белорусскими тем, что имеет такое же *очень широкое* белое зеркальце (в 18 m.m.), т. е. не менее, чем у типичных *viridanus* (!). Отливы оперения у самца из Hallein впадают в фиолетовый тон, чего у белорусских птиц я не заметил.

При сравнении белорусских птиц с хорошей серией из Ленинградской губернии в З М. А. Н. при общем цветном сходстве, бросалась в глаза разница в ширине зеркальца: тогда как у белорусских экземпляров зеркальце достигало ширины *18 m.m.*, у ленинградских же оно равнялось в среднем *8 m.m.*

Таким образом, вопрос относительно расовой принадлежности белорусского тетерева пока достаточно разрешен не может быть, вопервых, потому, что нет материала для сравнения с германскими тетеревами, т. наз. *L. t. juniperorm Brehm,* а с другой стороны, очень мало сравнительного материала из Швеции. Но вышеприведенные исследования и данные аналогии по отношению к целому ряду других оседлых родов (*Bonasia, Sitta Dendrocopus, Parus, Certhia* и т. д.), образующих вполне ясные географические формы в Западной Европе под влиянием иных климатических, главным образом, факторов, заставляют думать, что и тетерев, в общем достаточно пластический род, образует обособленную расу на Западе (помимо шведской *tetrix,* и британской—*britannicus*), а также промежуточную для Средней Европы (Западной части Сов. Союза, Литва, Балтика, Польша) еще не названную. Птицы из губ.: Московской, Рязанской, Владимирской явно приближаются к волжским *viridanus.*

39. Lagopus lagopus rossicus Serebr

Белая куропатка может быть найдена только в северо-западной части описываемой области. Здесь проходит как ее южная, так и восточная граница распространения в Белоруссии. В Бобруйском округе граница через районы: Бобруйский 1-й и Кличевский переходит в пределы Могилевского округа и через район Журавичский идет далее на север восточнее Днепра, где, в свою очередь, через районы: Ряснянский и Мстиславльский—уходит в Смоленскую губернию.

Не выяснен вопрос относительно Рогачевского района, где по сообщению гр-на Ивицкого (Гомель) белая куропатка будто-бы изредка встречается. Равным образом, не известно—имеется ли в данное время белая куропатка в Горецком районе? Ни в долине Сожа, ни в Гомельщине и тем более в Речицком уезде этой птицы уже нет[1]). Распространение ее в Белоруссии необходимо, главным образом, связывает с распространением типичной для нее биологической стации—сфагновых болот, сосредоточенные в северных и северо-западных районах республики.

Переходя к систематическому положению белорусских белых куропаток, должно сказать, что уже в 1924 году, обрабатывая свою коллекцию птиц, собранных на Мурмане, я заметил (17, стр. 24-25) ряд

---

[1]) Указания на нахождение белой куропатки к востоку от р. Сож требуют проверки.

отличий у экземпляра из Лепельского уезда по сравнении с Мурманскими птицами. Но не имея достаточного материала для более определенного вывода, я тогда вопрос о систематическом положении белорусской белой куропатки оставил открытым. В 1926 году П. В. Серебровским был описан новый подвид куропатки (18, стр , 511-512) из Рязанской губернии.

Сличение белорусских куропаток с типом описания новой формы выяснило достаточное их сходство[1]), почему и отношу их к форме *rossicus Serebr*.

40. Perdix perdix cinerea ⩽ robusta Hom. & Tancre.

Серая куропатка распространена во всех округах описываемой территории, но нигде не может быть названа многочисленной. Отсутствие всякой заботы в течение зимы со стороны человека, и, наоборот, почти поголовное их истребление в снежные зимы разными способами, обусловливают их постоянную малочисленность, не смотря на ряд весьма подходящих природных условий для этой птицы. Сличение белорусских экземпляров с птицами из Западной Сибири (Алтай), а также с серией из Лиздена (Прибалтийской области) и Западной Европы выяснило промежуточное положение белорусских куропаток, почему и обозначаю их как ⩽ *robusta*, хотя отдельные экземпляры были не отличимы от Лизденских и германских, а некоторые вполне терялись среди ряда Сибирских птиц и только большие размеры последних позволяли всегда отличить западных птиц, что, между прочим, подтверждает мнение *Dr. Hartert'a*, относительно размеров восточных куропаток.

41. Coturnix coturnix coturnix (L)

Обыкновенный, но нигде не многочисленный вид.

ORDO GRUES:

42. Crex crex L

Обыкновенный гнездящийся и пролетный вид области.

43. Porzana porzana (L)

Обыкновенный гнездящийся и пролетный вид.

В конце лета предпринимает иногда значительные перелеты. Пролет начинается с августа или даже с конца июля. В это время (21 июля) под Климовичами найден мертвый экземпляр, убившийся ночью о телеграфную проволоку в довольно большом расстоянии от воды.

44. Gallinula chloropus chloropus (L)

Местами весьма обыкновенна. Часто встречается по Днепровским и Сожа старицам. Нередко гнездится также и на небольших прудах с зарослями камыша и травы (хвоща) у берегов во всех описываемых округах.

45. Fulica atra atra L

Лысуха реже встречается предыдущего вида и в целом ряде районов, пожалуй, и не гнездится из-за отсутствия достаточных водных пространств. Во время пролета встречается чаще.

---

[1]) Один самец из Лепельского же уезда, правда, несколько темнее и ярче окрашен чем средне-русские птицы, но пока сравнительный материал у меня еще не накопился, для дальнейшего рассмотрения.

46. Grus grus (L)

Редкий гнездящийся вид. В Бобруйском округе гнездится по большим моховым болотам (к северу от Осокина, напр., в Кличевском районе). В Могилевском округе места гнездовий мне неизвестны. В Речицком Полесьи чаще гнездится на обширных травянистых болотах. В 1925 году наблюдал очень ранний осенний отлет, а именно 24 авг, в Людвинове (близ пристани Иолча, Речицкого уезда) показалась первая стая в 18 штук, летевшая прямо на юг.

47. Otis tarda L

По словам местного жителя, преподавателя Василевичского лесного техникума гр-на А. Л. Новикова, дрофа иногда залетает осенью на поля под Чичерском (к северу от Гомеля на Соже). В Гомельщине же она уже гнездится в юго-восточной части, напр., в районе станции Тереховка. Затем, гр-н М. Ивицкий (бывший заведующий охотничьим хозяйством у графа Паскевича) в письме от 30-XII-1925 г. пишет: „Гнездование дроф только изредка имеет место в южной части Гомельского уезда в пределах *Поколюбичской*, *Марковской и Дятловичской* волостей при условии ранней сухой весны. Обыкновенно же дрофы встречаются у нас только пролетом по осени“.

ORDO LARİ

48. Chroicocephalus ridibundus (L)

В течение лета не встречал нигде на гнездовьи. Нет никакого сомнения в том, что эта чайка гнездится по Днепровским заводям и озеркам в Речицком Полесьи. В остальных местах описываемой территории обыкновенна на пролетах, 14 августа на Днепре уже замечена стайками штук по 15. С этого времени идет постепенный отлет их. В 1924 году, там-же, 21 сентября замечены 10 чаек, на другой день—стая до 100 штук. В следующие дни до конца месяца еще летели небольшие стаи штук по 5—10. У всех экземпляров коричневая окраска головы, уже заменена на белый с серым.

49. Larus canus canus L.

Обыкновенна на пролетах по Днепру, на Соже и Березине. 22 сентября 1924 г. видел еще 4 экземпляра на Днепре под Лоевым.

50. Larus fuscus L.

Ежегодно бывает на пролетах в Белоруссии. В 1926 г. в конце апреля видел несколько экземпляров в окрестностях станции Горки, в Оршанском округе.

51. Sterna hirundo L.

Одна из самых обыкновенных птиц на Днепре, особенно в Речицком округе. Встречаются также и на Соже, хотя реже. Весною нередко летят и по Березине; летом на этой реке только изредка видел. 25 августа под Жарами, на Днепре, нашли еще не летающего птенца.

52. Sterna minuta Lin.

Гнездится, по моим наблюдениям только на Днепре, где под с. В. Жары найдена в довольно большом количестве. Как далеко поднимается на север по Днепру—не выяснено, но на Соже не встречена. Нередко встречаются весьма запоздалые кладки (вторичные?) и птен-

цы. Так, например, 12 августа под Жарами мы нашли как вполне летавших молодых, так и пуховых птенцов. К концу августа, повидимому, значительная часть малых крачек улетает, так как в это время они заметно уменьшились на Днепре. Между прочим, мне хочется обратить внимание на одну интересную биологическую особенность, чрезвычайно резко выраженную именно у крачек. Птенцы этих птиц, как известно, могут чрезвычайно быстро и долго бежать, так что с трудом удается иногда поймать даже совсем маленького. Далее, по мере роста птицы эта способность к бегу постепенно пропадает и, наконец, заменяется способностью к полету. Действительно, стоит вспомнить, что взрослые крачки удерживают, на ряду со способностью к отличному полету, весьма слабую способность к ходьбе, или, вернее, неуклюжему ковылянию—такая смена функций с возрастом у одного и того же организма имеет высокий интерес с точки зрения его эволюции. Параллельно этому хочу отметить также удивительную гармонию окраски пухового, или полуоперенного (имеющего тогда „жаворонкообразную окраску") птенца с окружающей обстановкой,— обычно песчаным ландшафтом, с некрупной галькой на берегах рек, так великолепно скрывающую его в нужный момент, что далеко не всегда удается заметить притаившуюся на песке молодую птицу в момент преследования. И, наоборот, с возрастом, и сменой стихии (в качестве главной окружающей обстановки), появляется голубовато-серая окраска с серебристым низом, так хорошо маскирующая взрослую птицу в воздухе и на воде с отраженным небом.

52. Hydrochelidon nigra nigra L

В описываемых округах несравненно реже предыдущих двух видов. На Днепре ее ни разу не видели. По Сожу редко встречалась между Гомелем и Пропойском. Такое распространение черной крачки должно быть об'яснено отсутствием в посещенных нами местах подходящих для нее экологических условий, так как, вообще говоря, в Белоруссии (Витебщина, Припятские болота) этот вид местами положительно многочислен. В Речицком округе колония их живет на озере Сперижe (Брагинское) (19, стр. 15).

ORDO LIMICOLAE

53. Scolopax rusticola L

Обыкновенный гнездящийся и пролетный вид во всей области.

54. Gallinago media (Lath.)

Обыкновенный, гнездящийся и пролетный вид. Благодаря крайне засушливым годам резко повсюду уменьшился в числе.

55. Gallinago gallinago gallinago (L.)

Местами более обыкновенен, нежели дупель, но в восточных округах, благодаря отсутствию болот, в общем, гораздо малочисленнее, чем в других округах Белоруссии.

56. Limonites minutus (Leisl.)

Встретил два экземпляра на Днепровской отмели в середине августа под с. В. Жары. Повидимому, обыкновенный пролетный вид, так как до этого видел их 28 июля на Соже под Гомелем, а 23 июля на Беседи под Белынковичами добыта старая самка.

57. Helodromas ochropus L

Обыкновенный гнездящийся и пролетный вид во всех округах. Так же как и бекас встречается в общем реже, нежели в лесной и болотистой части Белоруссии. 20 сентября еще видел на грязи близ реки Брагинки в Речицком округе.

58. Rhyacophilus glareolus (L.)

Не менее обыкновенный и гнездящийся вид. 12-VI видел стайку уже вполне летавших молодых вместе со старыми в окрестностях Пропойска, на кочковатом выгоне.

59. Tringoides hypoleucos (L.)

Весьма обыкновенный обитатель всех речных берегов области. С конца августа на Днепре заметно уменьшается в числе. В 1924 г. за время с 16 по 25 сентября на Днепре уже не видел ни одного экземпляра.

60. Totanus glottis L.

Во время пролета, в августе, встречен на Соже и на Днепре. Последних заметил 16 сентября близ пристани Островки на Соже; стайка состояла из 3-х экземпляров.

61. Totanus totanus (L.)

Довольно обыкновенный гнездящийся вид. 11 июня под Пропойском видели гнездящуюся колонию этих куликов. На Днепре встречены 12-VIII вместе в одной стайке с улитами. Последних видели 26-VIII по пути в Лоев из Жаров.

62. Totanus fuscus L.

Добыт только на пролете (21-VIII) под сел. В. Жары на озере близ Днепра. 25-VIII снова встречен одинокий экземпляр на Днепре.

63. Limosa limosa L

Гнездящийся вид, значительно реже, нежели в южной Белоруссии. На Днепре во время пролета ни разу не замечен.

64. Machetes pugnax (L.)

Повидимому, редко гнездится. 28-VIII встречены на Соже в одной стае с чибисами.

65. Numenius arquatus L.

Довольно часто встречался по Днепру во время пролета в августе. Пролет начинается уже в конце июля; 28-VIII встречены небольшой стаей на Соже, выше Гомеля. 11-VIII на Днепре наблюдал стаю в 7 штук купавшихся куликов, при чем кроншнепы входили до брюха в воду.

Calidris arenaria L.

Повидимому, песчанку мне удалось рассмотреть с парохода в бинокль на Соже 28 июля по пути из Пропойска в Гомель. Птиц было две, но так как доказать ее здесь присутствие я не могу, привожу этот вид без номера.

66. Pelidna alpina (L.)

28-VII—наблюдался на Соже вместе с Tringoides hypolèucos.

67. Vanellus vanellus (L).

Очень обыкновенный гнездящийся и пролетный вид. Под Пропойском 12 июня нашли уже летавших молодых. Большинство—на взлете. 28 июля на Соже наблюдались большие стаи чибисов. В августе на Днепре стаями иногда до 100 и более. 18 сентября 1924 г. под Жарами на Днепре видел одиночный, последний экземпляр.

68. Charadrius pluvialis L.

Обыкновенный пролетный вид.

69. Charadrius dubius curonicus Gm.

Обыкновенный гнездящийся вид всех рек с песчаными берегами. Встречен как на Березине, так и Соже, Беседи и по Днепру. Здесь этот куличек прямо многочислен в августе, когда идет частичный пролет их. Повидимому, многие пары гнездуют дважды в лето, так как на Днепровских песках под Жарами мы нашли несколько выводков еще не летавших куличков 12-VIII. На этих же песках (остров среди Днепра) в то же время найдены птенцы и у крачек—Sterna fluviatilis и Sterna minuta.

Молодые, отлично бегающие кулички днем скрывались в зарослях шелюги (Salix sp.), образующей сплошные насаждения среди сыпучих речных песков. Родители, с беспокойным криком летая над врагом, отводят.

70. Charadrius hiaticula L.

Проф. Станчинским (19, стр. *10* и *11*) указывается как гнездящийся обыкновенный вид „повсюду", начиная от Рославльского уезда и далее по Сожу на юго запад, т. е. уже в пределах восточной Белоруссии.

Нет никакого сомнения в том, что многие не указанные в списке виды куликов бывают на пролетах в вост. Белоруссии, особенно по берегам Сожа и Днепра и, что только вследствие недостаточности наблюдений я не мог их пока привести для этой области.

Интересно отметить, что в Новозыбковском уезде (быв. Гомельской губ.) в 1925 г. на озере Ревучем (52° 35″ с. ш. и 1° 10′ вост. долг.) препаратором Смоленского университета с 11 августа по 30 сентября собрано 17 видов пролетных куликов, при чем некоторые из них в очень больших сериях, напр., Pelidna alpina (L)—30 экз.; Limonites minutus Leisl—44 экз.; Charadrius hiaticula L.—18 экз., Pelidna ferruginea (Brünn)—15 экз. и т. д. (Граве, 20, стр. 30). Из числа неуказанных мною в вышеприведенном списке зарегистрированных в восточной Белоруссии куликов, в сборах на озере Ревучем следует отметить:

1) *Pelidna ferruginea Brünn*
2) *Limonites temminki Leisl*
3) *Calidris arenaria L*
4) *Limicola platyrhyncha (Tem.)*
5) *Phalaropus lobatus (L.).*

Между прочим, при двукратном моем посещении Днепра (в 1924 с 15-25 сентября и в 1925 г. с 1-28 августа) со специальной целью выяснения состава пролетных птиц и характера пролета по Днепру, главным образом, куликов должен заметить, что в оба раза количество наблюдаемой птицы оказалось поразительно малым. В первую поездку из куликов, буквально, только 1 раз, 16/IX, были встречены три

экземпляра *Totanus glottis*, что об'яснялось поздним временем наблюдений, а тысячи следов на песке свидетельствовали о недавнем, уже закончившемся, массовом пролете птиц. Но и в следующую осень (в 1925 г.), когда уже наблюдения над Днепром были установлены с 1 августа и продолжались почти весь месяц, все же лёт птиц был весьма слабый и целого ряда ожидаемых видов не удалось заметить. Мне кажется, что об'яснение этому следует искать в малой кормности тех мест, где велись наблюдения, т. е. на песчаных косах и островах среди Днепра.

Повидимому, большая часть пролетной болотной птицы ищет мест для отдыха и дневок более кормных, а такими являются грязевые берега некоторых внутренних проточных озер, каким, повидимому, является и озеро Ревучее (судя по тому, что там живут бобры и строят наземные хатки—берега озера должны быть заболочены).

71. Oedicnemus oedicnemus (L)

Авдотка найдена экспедицией Смоленского университета в пределах Речицкого уезда в 1925 г. (19, стр. 10).

ORDO COLUMBAE

72. Columba livia Gm.

Полудомашний голубь в небольшом числе гнездится по городам описываемых округов.

73. Columba oenas L.

В Бобруйском округе, особенно в лиственных лесах северной его половины весьма обыкновенен. Не редок также и в остальных округах. На Беседи, близ Белынкович в конце июля наблюдал огромные стаи, слетавшиеся на водопой к реке. 17. VII (Тимоново) еще слышно воркование.

74. Columba palumbus L.

Тоже обыкновенный гнездящийся вид всей описываемой области, хотя гораздо менее численный нежели клинтух. Под Тимоновым в смешанном лесу наблюдали много пар.

75. Streptopelia turtur turtur (L.)

Уже в пределах Бобруйского округа в долине речки Свислочи в заболоченных ольшанниках положительно многочисленна. Далее на восток и особенно к югу количество горлинок возрастает и в Полесьи это один из самых обыкновенных видов птиц.

Выводит, повидимому, иногда дважды в лето, так как в половине августа в Речицком округе (Жары) нам принесли совсем молодую, не летающую горлинку. На полях встречали до конца августа.

ORDO CUCULI

76. Cuculus canorus L.

Очень обыкновенный гнездящийся и пролетный вид во всех округах. Летающую молодую кукушку (из пары) застрелил в Дрибинском районе 18. VII. Птица кормилась на скошенном лугу. Кукование, очень редкое, слышно было еще 4. VII. (Гиженка), но уже вскоре прекратилось вовсе.

ORDO CORACIAE

77. Coracias garrulus garrullus L.

Сивоворонка очень обыкновенна во всех описываемых округах. В окрестностях Тимонова 17. VII птицы сидели еще в дупле. В Речицком Полесьи (Котичев-Жары) многочисленна. 18. VIII заметил случаи кормления старыми птицами молодых, но вполне летавших.

78. Upupa epops epops L.

Уже в Бобруйском округе довольно обыкновенен. По направлению к востоку и юго-востоку число удодов заметно увеличивается и, напр., под Климовичами мы встречали их в значительном числе, даже небольшими стайками [1]).

В Жарах 18. VIII добыли еще плохо летавшего молодого удода.

79. Alcedo ispida L.

Зимородок наблюдался нами несколько раз, как на Свислочи и Березине, так и в Могилевском округе по реке Проне и Ресте. 16. IX видел на Соже пару близ пристани Чонки (к югу от Гомеля).

ORDO STRIGES

80. Bubo bubo bubo L.

Редкий гнездящийся вид. Экземпляр, добытый в окрестностях Горок, видел в 1926 году.

81. Otus scops scops L.

Экземпляр этой совки я видел в коллекции зоологического кабинета Горецкой с.-х. академии. Во время экспедиции нами этот вид не встречался.

82. Asio otus otus L.

Гнездящийся, частично оседлый вид.

83. Asio flammeus (Pontopp)

Болотная сова довольно обыкновенный, гнездящийся и пролетный вид во всех округах восточной Белоруссии.

84. Athene noctuua (Scop.)

Домовый сычик найден нами в окрестностях дер. Гиженки, в Пропойском районе. 25·VI—молодые совки (4 экземпляра) были уже оперены, но еще не достигли взрослой величины. Одна из совок имела уродливые глаза—недоразвитые и с бельмом.

85. Strix aluco L

Обыкновенный оседлый вид во всех округах.

ORDO CAPRIMULGI

86. Caprimulgus europaeus L.

Довольно обыкновенный гнездящийся и пролетный вид.

ORDO CYPSELI

87. Apus apus (L.)

Обыкновенен во всех описываемых округах.

---

[1]) Но таких стай этой птицы как в южной части Украины или в степном Крыму (штук до 100 и более) у нас никогда не наблюдается.

ORDO PICI

88. Jynx torquilla torquilla L

Очень обыкновенный гнездящийся вид. Под Пропойском найдена кладка в дупле 10-VI, состоявшая из 8 белых с розоватым отливом яиц.

89. Dryocopus martius martius (L)

В Бобруйском округе весьма обыкновенен. В Могилевском и Калининском—распространен реже, что обусловлено меньшей лесистостью.

90. Dryobates major major L

Самый обыкновенный и численный вид дятлов во всех округах. 15. VI (Гиженка) добыт уже летающий молодой. Белорусские дятлы, после сравнения с типической формой из Швеции и большими сериями из других мест Европы, оказались принадлежащими только к типичной форме *major*, не смотря на значительные индивидуальные вариации величины крыла и клюва.

91. Dryobates leucotos leucotos (Bescht)

Тоже обыкновенный, хотя и реже встречающийся, нежели большой пестрый дятел. В Речицком округе, как и вообще в южных округах Белоруссии, многочисленнее, нежели в северных хвойных лесах.

92. Dryobates medius medius (L)

Уже под дер. Клины, в Чериковском районе найден на гнездовьи. В грабовых лесах Речицкого округа становится, более или менее, обыкновенным, хотя и не так многочислен как, напр., в дубовых лесах южной Белоруссии, в долине Припяти.

93. Dryobates minor minor (L)

Редкий гнездящийся вид. Зимою, повидимому, так же как и в остальных частях республики, увеличивается в числе за счет кочующих экземпляров с севера.

Систематическое положение белорусского малого дятла установлено после тщательного сравнения со шведскими птицами, птицами из остальн. Западной Европы, а также и восточными расами. Весьма вероятно, что и в восточных округах зимою бывает северно-европейский подвид—*D. m. transitivus Loudon*, но для описываемых округов у меня доказательств этому пока нет.

94. Picus viridis viridis L.

В лиственных лесах Березины и Друти не редок.

В округах Могилевского и Калининского сравнительно реже.

95. Picus canus canus Gm.

В восточных округах седой дятел встречен только однажды, а именно в окр. Тимоново 16 июля добыта пара молодых птиц. Повидимому, довольно редок.

Белорусские седоголовые дятлы принадлежат к типичной коротко-клювой форме *canus*.

ORDO PASSERES

96. Corvus corax corax L.

Повсюду довольно обыкновенен, хотя встречается и не очень часто. В Оршанском округе, по данным В. Бианки (21, стр. 260), до-

вольно редок. В окрестностях Горок в двадцатых числах апреля найдено гнездо с голыми еще птенцами.

97. Corvus cornix cornix L.

Серая ворона всюду обыкновенна. В начале июня птенцы уже покидают гнезда.

98. Corvus frugilegus frugilegus L.

Весьма обыкновенный, а местами положительно многочисленный вид. Очень редкие экземпляры остаются зимовать. В феврале текущего года я получил извещение от окружного сельско-хозяйственного музея в гор. Орше, что 20 января в окрестностях города убит грач из числа зимовавших трех экземпляров. Большие колонии грачей сплошь и рядом устраиваются в городских парках и по отдельным деревьям на гнездовьи. 30 мая молодые были еще в гнездах, но уже на взлете.

99. Coloeus monedula monedula L.

Так же обыкновенна, как и грач во всех районах республики.

Переходя к вопросу относительно систематического положения белорусских галок, должен заметить, что, после сличения серии их с галками из Упсалы[1]) (Швеция), я убедился, что все наши галки имеют те же индивидуальные вариации в окраске, что и шведские, почему и считаю их за подвид *C. m. monedula*.

Что же касается формы *„collaris“*, то, как это выяснено теперь Гельмайером (22), это название, данное Drummond'ом в 1846 г., к русским галкам не может быть применено и должно относиться к птицам Балканского полуострова[2]), тогда как *Fischer*, еще в 1811 г., описал галку из Москвы под названием *soemmeringii* (I. c. стр 184-187). Но и последнее имя, повидимому, должно быть сведено в синонимы *monedula*, ибо шведские галки, в общем, также имеют белый ошейник и столь же развитый, как и птицы из Белоруссии, Москвы, Харькова, Воронежа. *Dr. Sachtleben* (11, стр. 23—23), описывая литовских птиц, указывает, что литовские экземпляры сравнивались с 6-ю шведским (из Упланда), при чем оказалось, „что шведские и литовские галки не только сходятся в более светлом сером тоне нижней стороны (по сравнению с *spermologus*), но и в развитии пятна на шее не найдено различия между обоими..., но так как мне шведский материал показался недостаточным, то *я, чтобы быть уверенным, обратился к проф. Лёнбергу* в Стокгольм и он мне любезно сообщил, что из 28 шведских галок „14 имели ясно выраженное белое пятно или полоску над изгибом крыла“. Вследствие этого Dr. Sachtleben, повидимому, правильно считает литовских и западно-русских галок за типичных *monedula*. Между прочим, в последнее время *Gr. Zedlitz* в шведском журнале Fauna och Flora (1925, p. 145—173) поместил статью, из коей видно[3]), что и автор склонен рассматривать *Coeleus monedula soemmeringii* как синоним *Coeleus monedula monedula* и, что последняя в южной и западной Швеции скрещивается с *Coeleus monedula spermologus*.

100. Pica pica pica (L).

Далеко не так уж обыкновенна как в прошлые годы. Гнездится во всех округах. В окрестностях Схолян (Оршанский округ, Бианки, 21, стр. 261) „6-VI/19-VI в гнезде было 4 птенца—один голый, а три в пеньках“.

---

[1]) Сравнение произведено мною на имеющемся из Швеции материале в З.М.АН.

[2]) Как это в свою очередь показал Gengler. I. f. O. 1919, стр 222—223.

[3]) См. резюме этой статьи (Zedlitz Greve O. „Ett litet bidrag ill kännedomeu om de Skandinaviska fåglraserna“) на немецком языке, приведенное E. Stresemann'ом в Ornithologische Monatsberichte, 1925. № 6. S. 198.

В Речицком Полесьи (с. Жары) сорок, еще лет 15 тому назад, усердно стреляли крестьяне для скупщиков крыльев, платившим по 5 коп. за пару. В результате этого птица стала там редка по сравнению с прошлым.

101. Garrulus glandarius glandarius (L).

Довольно обыкновенный оседлый вид во всех округах.

102. Nucifraga caryocotactes caryocotactes (L).

Ореховка редкий гнездящийся вид в Бобруйском округе. 2 июня в Осокине встречены летающие молодые. В остальных округах восточной Белоруссии не встречалась.

103. Sturnus vulgaris intermedius Praz.

Очень обыкновенный гнездящийся и пролетный вид. Весьма многочислен в пойменных лесах ниж. Свислочи и Березины, где гнездится по дуплам старых дерев. В начале июня молодые уже частично вылетели из гнезд.

104. Oriolus oriolus oriolus (L).

Также весьма обыкновенна во всех смешанных и лиственных лесах. 8-VII в окрестностях дер. Гиженки найдено гнездо на молодой сосне с 1 полувзрослым птенцом.

105. Coccothraustes coccothraustes (L).

Довольно редкий гнездящийся вид в сев. частях восточной Белоруссии. Начиная с линии распространения грабовых лесов и даже появления отдельных грабов дубонос заметно чаще встречается и уже в округах Бобруйском и южной половине Могилевского становится довольно обыкновенным.

В Речицком Полесьи, по лиственным лесным островам, среди болот, особенно там, где много грабовых деревьев, птица совсем обыкновенна.

106. Chloris chloris chloris (L).

Обыкновенный гнездящийся вид.

107. Loxia curvirostra curvirostra L.

Довольно редкий гнездящийся, оседлый вид.

В окрестностях дер. Клины, Чериковского района 6-VII и 7-VII добыты четыре экземпляра из небольшой стайки. В Речицком округе, в связи с отсутствием ели, повидимому, бывает случайно.

108. Carduelis carduelis (L).

Обыкновенный гнездящийся, оседлый вид. Большое количество щеглов, уже в стайках с молодыми, наблюдалось в окр. с. Тимоново в половине июля, ежедневно прилетавших на водопой к ручью.

109. Acanthis cannabina cannabina (L).

Довольно обыкновенный гнездящийся и пролетный вид. Зимуетли в описываемых округах, хотя бы частично—не известно, хотя для Смоленской губ. Станчинский (26) указывает на зимование коноплянок,

как на очень редкое явление. 18-IX 24 г. в окрестностях с. В. Жары, на Днепре я видел их очень много, державшихся около воды по зарослям шелюги (Salix angustifolia) и пролетавших рассыпанными стайками вдоль зарослей.

110. Acanthis linaria linaria (L).

Обыкновенный пролетный и зимующий вид.

111. Chrysomitris spinus (L).

Редкий гнездящийся и очень обыкновенный пролетный, отчасти зимующий вид.

112. Pyrrhula pyrrhula pyrrhula (L).

Бывает только на пролетах и зимою. Заметный весенний пролет наблюдался в течение апреля в Горках.

113. Carpodacus erythrinus Pall.

Местами обыкновенный, но довольно спорадически встречающийся вид. В долине Сожа и на Проне более обыкновенен, а в окрестностях села Вепрынь, в пойменных зарослях, весьма обыкновенен. В Речицком уезде (август) не наблюдался. Поющего самца в Чериковском районе слышал еще в половине июля.

114. Fringilla coelebs coelebs.

Один из самых обыкновенных и широко распространенных видов всей области. Часть гнездится дважды. 3-VI. близ Осокино (Бобруйск. окр.) видел летающих молодых первого вывода.

115. Fringilla montifringilla (L).

Только на пролетах бывает в описываемой области.

116. Passer domesticus domesticus (L).

117. Passer montanus montanus (L).

Оба воробья весьма обыкновенны. В долине Сожа и в дубовых рощах на Проне гнездится значительное количество полевых воробьев. Под Пропойском наблюдал массовое появление их среди сильно пораженных гусеницей бабочки-златогузки (Euproctis chrysorrhoea L) дубовых рощ, на правом берегу Сожа, причем воробьи усердно склевывали вредителя.

Часть полевого воробья, вероятно, откочевывает на зиму к югу, так как в начале апреля в Горках наблюдал их пролет. Несколько стаек их, штук по 20, появлялись последовательно ранним утром и садились на отдых среди куч срезанных сучьев, сложенных на опушке парка. В следующие дни я их там уже не видел, а число гнездящихся пар в наблюдаемом районе, значительно меньше виденного числа в момент пролета.

118. Emberiza citrinella citrinella $\lesseqgtr$ erythrogenys Brehm.

Очень обыкновенный, а местами и многочисленный вид. Только часть наших овсянок немного отличаются от шведских *citrinella* и по более светло-коричневому верху и интенсивно-желтому низу прибли-

жаются к восточным *erythrogenys*, хотя надо признать слабую обоснованность этого последнего подвида, на отдельных экземплярах которого и вовсе не улавливается разница при сличении с северо-западными птицами.

119. Fmberiza hortulana hortulana L.

Уже в пределах Бобруйского округа вполне обыкновенный вид. Далее к югу увеличивается в численности. В Чериковском районе (Клины) 13-VII еще часто слышалось пение самцов. В Оршанском округе, повидимому, уже редка, т. как здесь не слыхал ее ни разу. Не указывает ее в своем списке и Бианки (21). Тем не менее в Горецком, Дрибинском, Мстиславском районах садовая овсянка вполне может быть найдена, так как найдена в Петровичской волости, Рославльского уезда, Смоленской губ. (19, стр. 10). Эта находка указывает уже на предельное ее распространение к с.-востоку и на прохождение здесь границы ее распространения со стороны Белоруссии.

120. Miliaria miliaria L.

Только однажды замечена и добыта молодая птица в окрестностях Котичева в Речицком округе. Случаев более северного ее нахождения мне неизвестно, но проф. Станчинский (19) упоминает о нахождении ее „в пределах Гомельской губернии“, не указывая более точного местонахождения.

121. Cynchramus schoeniclus goplanae Dom.

122. Cynchramus schoeniclus ukrainae Zar.

Болотная овсянка изредка встречалась по зарослям лозы и редкого камыша в долине Сожа, на Лобжанке, на пруде близ Тимонова, но несравненно большее число их гнездится, конечно, в Речицком Полесьи среди камышевых и лозовых зарослей долины реки Брагинки. Среди наших овсянок можно различить не менее двух подвидов—при чем гнездящиеся в южной половине являются не типичным *schoeniclus* и не *goplanae*, а должны быть отнесены к другому подвиду—*ukrainae Sar.*

123. Plectrophenax nivalis nivalis (L).

Ежегодно поздней осенью на пролетах и в меньшем числе зимою встречается во всех округах.

124. Galerida cristata cristata (L).

В Бобруйском округе довольно редкий вид. В Могилевском же вполне обыкновенный. К югу в численности все увеличивается и в Речицком округе уже местами довольно многочислен.

7-VII близ деревни Закрупицы и Летяги (к северу от Пропойска) наблюдались целые стайки хохлатых жаворонков штук в 10-15, державшихся по околицам деревни и на дороге. Молодые вполне оперены и летают. Судя по тому, что хохлатый жаворонок уже в пределах Смоленской губернии только недавно был найден на гнездовании в Рославльском уезде (19),—надо думать, что в районах Горецком, Дрибинском и Мстиславльском он уже относительно редок. В северной части быв. Оршанского уезда Бианки совсем его не нашел, хотя более чем вероятно, что и здесь он гнездится, но редко.

125. Lullula arborea arborea (L).

Весьма обыкновенный гнездящийся и пролетный вид. Осенний пролет хорошо был выражен в течение 19 и 20 сентября в 1924 г. в Речицком уезде близ села Гдень, когда при ясной теплой погоде днем, целыми стайками, перекликаясь вверху, они проносились над опушкой леса.

126. Alauda arvensis arvensis L

Очень обыкновенный гнездящийся вид.

127. Anthus trivialis L.

Самый обыкновенный вид и многочисленный представитель рода в Белоруссии. 2-VI близ Осокина (Бобр. о.) найден на земле мертвый полуоперенный птенец.

128. Anthus pratensis (L).

Значительно реже предыдущего вида, местами весьма редок, что стоит в связи с отсутствием подходящих стаций. 20-IX поднял несколько экземпляров их на скошенном лугу в окрестностях села Гдень, Речицкого уезда.

129. Agrodroma campestris (L).

В лесистых округах довольно редок. В Могилевском округе найден в нескольких местах в течение лета. К западу от Пропойска под деревней Куликовкой, среди весьма обезлесенных полей—8-VI добыт одиночный экземпляр. К северу от Пропойска, в окр. деревни Закрупицы 7-VII встречены несколько коньков, державшихся среди хлебного поля у дороги на паровых полосках и на самой дороге. Вспугнутые садились на небольшие сосенки, росшие здесь-же вдоль дороги, а один из них так и был застрелен на деревце. В окрестностях деревни Гиженки на обширной поляне среди соснового бора, сплошь покрытой пнями и хворостом, добыты 19 и 21 июня два самца, несомненно, от гнездящихся здесь пар. Этот случай нахождения коньков среди только что образовавшегося ляда (поляна еще ни разу не успела быть вспахана, а рубка произведена не далее 2-3 лет тому назад) наглядно показывает, как идет расселение степных видов, занимающих (в данном случае даже тотчас) все освобождаемые от леса пространства и, что современное распространение полевого конька может быть об'яснено не только путем допущения гипотезы о реликтовом характере его нахождения у нас (Станчинский, 26, 27).

130. Budytes flava flava (L.)

131. Budytes flava thunbergi Billberg

Первый подвид широко распространен на гнездовьи и на пролетах. Второй, глав. образом, на пролетах, и несомненно частично гнездится, при чем в северных округах должен быть более обыкновенен, но данных, доказывающих это, пока нет. Установить численное отношение этих двух форм, затем характер их гнездования в Белоруссии—отдельными-ли колониями или вперемешку обе формы живут в одних и тех-же местах—является ближайшей задачей орнитологов, ибо как раз желтые трясогузки и, в частности эти две формы, имеющие только частично собственные ареалы (что и дает возможность считать их подвидами), а затем, на значительном пространстве перекрывающие

области распространения друг друга—составляют одну из труднейших для систематической разработки групп, и всякие новые данные относительно характера их распространения и взаимоотношений на гнездовьи имеют большой интерес.

132. Motacilla alba alba L.

Весьма обыкновенный гнездящийся и пролетный вид. В сентябре (16. IX—20 г.) по Днепру идет заметный пролет их.

133. Certhia familiaris familiaris L.

Обыкновенный оседлый вид.

134. Sitta europaea europaea L.

135. Sitta europaea homeyeri Hart

Обыкновенный оседлый вид. 16. VI. (Гиженка) добыты два летающих молодых. Второй подвид (homeyeri) найден в Бобруйском округе.

136. Parus major major L.

Обыкновенный оседлый вид.

137. Periparus ater ater (L.)

Довольно редкий оседлый вид. К зиме увеличивается за счет пришлых с севера.

138. Cyanistes coeruleus coeruleus (L.)

Не особенно часто встречающийся вид. Повидимому, в Речицком округе в болотистых лесных опушках более многочислен, чем в сухих округах.

139. Parus cristatus sristatus L. (≶ mitratus?)

Очень обыкновенный вид сосновых лесов.

140. Parus palustris palustris (L.)

Очень обыкновенный оседлый вид.

141. Parus atricapillus borealis Selys

142. Parus atricapillus rossicus Fediush

Гнездится первый подвид. Зимою же встречается, кроме того более светлая—восточно-русская форма названная мною P. a. *rossicus Fediusch*[1]) (34).

143. Aegithalos caudatus caudatus (L.)

Не очень часто встречаемый вид. Гнездится во всех округах в небольшом сравнительно числе. Молодых уже путешествовавших семьями стрелял в окрестностях г. Пропойска 10. VI, 25 г.

144. Remiza pendulina pendulina (L).

Найден в Могилевском округе в окр. села Вепрынь, в долине Сожа (бл. Вохорского монастыря). В Речицком Полесьи не редок. В августе наблюдались выводки, кочующие по сенокосам, по зарослям

[1]) J. f. O. L. XXV, Heft 3. 1927. Berlin.

лозы, близ Котичева. Там же собрано несколько пустых уже гнезд. В Смоленской губернии ремез найден только в последнее время, а именно в 1926 г. в Корсиковской волости Рославльского уезда (28, стр. 32). Таким образом, как и для ряда других видов, восточная граница средней Белоруссии является, вместе с тем, почти точной границей геогр. распространения на с.-восток и для ремеза.

145. Regulus regulus regulus (L)

В восточных округах распространен весьма спорадически, что зависит от наличия еловых лесов. В северо-восточных районах, повидимому, более обыкновенен. Как идет далеко к югу—точно сказать трудно, но, по всей вероятности, не заходит дале южн. границы сплошного распространения ели, которая в восточн Белоруссии теряется в пределах Гомельского округа. В Чериковском районе добыт в окр. д. Клины в елово-осиновом лесу, где встречен несколько раз. К востоку отсюда добыт 17 июля под Климовичами и 23 июля в окр. Белынкович в Калининском округе.

146. Lanius minor minor Gm.

Малый сорокопут заметно возрастает в численности по мере удаления с с.-з. на ю.-в. Белоруссии. Под Минском уже обыкновенен, в Бобруйском округе—тоже. В пределах Могилевского округа заметно чаще встречается. В Калининском округе (Белынковичи) довольно многочислен. В Речицком же Полесьи в окр. д. Жары, например, в течение августа был положительно самым многочисленным видом, встречаясь чаще жулана. Именно в этой части Белоруссии удалось без труда собрать большую серию малых сорокопутов. На северо-восток этот вид идет до границ Смоленской губ., встречаясь на гнездовьи там уже очень редко и то в самом западном уезде последней, а именно в Рославльском, где был найден впервые в 1925 году экспедицией Смоленского университета. К югу отсюда чернолобый сорокопут становится все более и более численным.

23 июля в районе Белынкович видел много выводков, державшихся среди поруби по вершинам уцелевших елей и др. дерев.

147. Lanius excubitor excubitor L.

В Могилевском округе к северу от Пропойска трижды найден на гнездовьи в течение июня, при чем 12 июня молодые уже летали, хотя продолжали кормиться родителями. С 16 по 19 июня добыт выводок в 5 шт. молодых близ Гиженки. В Речицком округе б. сорокопут совсем обыкновенный вид, часто встречающийся среди обширных болот с зарослями. К осени часть гнездящихся улетает (по словам местного наблюдателя, хорошо знающего сорокопута—они в это время заметно уменьшаются в численности). В желудках старых птиц находил много остатков жужелиц и др. жуков, а иногда перья птиц.

148. Lanius collurio collurio (L)

Один из самых обыкновенных видов. Широко распространен во всех округах. 7 августа найдено гнездо (бл. поселка Котичев, Речицк. округа) с выросшими уже птенцами, вылетевшими на другой же день. Повидимому, отдельные пары выводят дважды в лето.

149. Ampelis garrulus garrulus (L)

Ежегодно бывает зимою и на пролетах.

150. Muscicapa striata striata (Pall)

Очень обыкновенный гнездящийся и оседлый вид. 4 июня (Осокино) в гнезде было 6 яиц.

151. Hedymela atricapilla atricapilla (L)

Обыкновенный гнездящийся и пролетный вид.

152. Siphia parva (Bechst)

Малый мухолов в изобилии найден в Потокском лесничестве (Бобруйский округ, Кличевский район) в начале июня; в июне наблюдался в окр. дер. Клины, Чериковского района. 15 июля пение еще слышно.

153. Phylloscopus collybita abietinus Nills.

Обыкновенный гнездящийся вид. 20 сентября (1924 г.) еще довольно часто встречались на луговых зарослях близ с. Гдень, Речицкого уезда.

154. Phylloscopus trochilus trochilus (L)

Обыкновенный гнездящийся и пролетный вид.

155. Phylloscopus sibilatrix sibilatrix (Bechst)

Так же не менее обыкновенен как и предыдущие виды.

156. Acanthopneuste viridanus Blyth.

Нами ни разу не найдена. В. И. Шнитниковым (1) добыта в 1906 г. 25 мая в имении Михалево, Бобруйского уезда, из числа 4 или 5 экземпляров, распевавших в вершинах старых лип. Повидимому, весьма редкий гнездящийся вид, спорадично распространенный в восточных округах.

157. Hippolais icterina Viell.

Обыкновенна на пролетах и на гнездовьи.

158. Acrocephalus arundinaceus (L).

В Речицком округе довольно обыкновенна в камышевых зарослях р. Брагинки.

159. Acrocephalus palustris (Bechst.)

Очень обыкновенна на Проне, по Сожу и др. рекам с заросшими кустарником берегами.

160. Acrocephalus dumetorum Blyth.

Нами не добыта ни разу. В Гиженке в усадьбе лесничества однажды видел ее в зарослях сирени. В. И. Шнитников (1, стр. 297) в 1906 г. добыл 31 мая в им. Поболов, Бобруйского уезда, поющего самца этого вида. Должен считаться редким гнездящимся и пролетным видом.

161. Acrocephalus schoenobaenus (L)

Самый многочисленный и обыкновенный вид камышевки. 10 июня на Соже найдено гнездо, помещавшееся на кочке в пучке высокой травы, с пятью яйцами. 20 июля на реке Лобжанке, найдено гнездо

с 4 свежими яйцами. Самцы усердно поют. Несомненно, это вторая кладка. На Брагинке (Речицкий окр.) видел в 20-х числах сентября еще довольно много барсучков. В августе нередко встречается на полях в зарослях картофеля, лупина, конопли и т. п., что должно быть об'яснено повсеместным выкашиванием лугов и отсутствием убежищ в родной стации—на болотах и у воды. Вместе с барсучком на поля в это время выбираются Sylvia communis и Pratincola ruberta.

162. Locustella luscinioides Savi

Добыта в Брагинских камышах в Речицком Полесьи 19 сентября 1924 г. из пары. В 1925 г. о ее нахождении в пределах Гомельской губернии (точнее не указано) упоминает и В. В. Станчинский (19, стр. 10).

163. Locustella naevia (Bodd)

В. Н. Шнитниковым (1, стр. 290) найдена в 1906 г. 12 июня (25 июня)—на гнездовьи бл. реки Добасня, Бобруйск. уезда.

164. Sylvia nisoria nisoria (Bechst.)

Довольно редкий гнездящийся вид. Найдена в зарослях вблизи реки Лобжанки в окрестностях с. Тимонова. 16 июля молодые вполне летают. 28 июля в окр. с. Жары, Речицк. округа, добыта пара молодых.

165. Sylvia communis communis (Lath.)

Самая обыкновенная изо всех славок во всех районах. В двадцатых числах сентября уже не видны были, при наблюдениях в это время в Речицком округе. 9 июня—найдено гнездо с 5 свежими яйцами.

Разгар линьки приходится на *двадцатые* числа июля. В это время часть молодых вполне летает, а часть еще плохо владеет крыльями и держится семьями по густым кустам.

166. Sylvia borin borin (Bodd.)

Гнездящийся, довольно обыкновенный вид во всех районах описываемой области. Гнездо с 5 яйцами найдено 11 июня в окрестн. г. Пропойска.

16 июля близ Тимонова в прибрежных зарослях найдено второе гнездо с тремя яйцами. На яйцах сидят как самец, так и самка.

167. Sylvia atricapilla atricapilla (L)

Очень обыкновенный гнездящийся и пролетный вид всей области. 16 июля в зарослях лозы близ Лобжанки встречались часто, преимущественно старые самки, окончившие выводку, худые и сильно линяющие. 18 июля (Дрибин) пение отдельных самцов еще слышно.

168. Sylvia curruca curruca (L)

Довольно обыкновенный, хотя и не многочисленный гнездящийся вид.

К 20 сентября, повидимому, все славки уже улетают, так как в это время не встречен ни один вид их, даже в Речицком у.

169. Erithacus rubecula rubecula (L)

Обыкновенный гнездящийся и пролетный вид. 18 апреля в 1926 г. в Горках наблюдал пролетных зорянок в окрестных зарослях. 17 июня под Пропойском найдено гнездо с 6 яйцами, при чем одно

из них было кукушечье. Яйца малиновки имели светлый фон с розоватым отливом и были, особенно на тупом конце, испещрены светло корничневыми пятнами.

Яйцо кукушки резко выделялось голубоватым цветом и коричневыми точками с узкими мазками, разбросанными по скорлупе. Вес яиц зорянки: 2,6; 2,6; 2,5; 2,5; 2,4. gramm. Вес яйца кукушки—3,8 gr.

Размер яиц зорянки:
1,6 × 2 см.
2,4 × 1,95 „
2,4 × 1,61 „
2.2 × 1,53 „
1,9 × 1,5 „
Размер яйца кукушки—2.3 × 1.75 „

170. Cyanecula svecica cyanecula (Wolf)

Довольно редкий гнездящийся и пролетный вид.

171. Luscinia luscinia (L)

Очень обыкновенный гнездящийся и пролетный вид. 4 июня (Осокино) найдено гнездо с 3 голыми птенцами и 2-мя яйцами.

172. Phoenicurus phoenicurus phoenicurus (L)

Довольно обыкновенный гнездящийся и пролетный вид. В окрестностях Гиженки (Пропойский район) в сосновом бору в 1925 г. гнездилось много пар на сравнительно небольшом участке 21 июня птенцы в одном гнезде были чуть покрыты трубочками. К 5 июля пение самцов умолкло.

173. Pratincola rubetra rubetra (L)

Повсюду многочисленный гнездящийся и пролетный вид. 4 июля (Гиженка) найдено гнездо в откосе берега ручья с 4 яйцами. В сильный солнцепек птица на яйцах не сидит. Повидимому, это вторичная кладка.

174. Oenanthe oenanthe oenanthe (L)

Довольно обыкновенный гнездящийся и пролетный вид.

175. Turdus pilaris L

Гнездящийся, пролетный и редко зимующий вид. 23 июля стаями держатся по олешникам у воды (Белынковичи).

176. Turdus viscivorus viscivorus í

Довольно обыкновенный гнездящийся и пролетный вид. 31 мая близ села Потоки (Бобруйский округ) добыт вполне летающий молодой дрозд.

177. Turdus musicus L

Очень обыкновенный гнездящийся вид. К началу июля пение слышно только по зорям.

178. Turdus iliacus Lin

Белобровый дрозд встречается на гнездовьи только в северном, Оршанском округе. Бианки (21 стр. 264) нашел его кладки и птенцов в осиновом лесу у Схолян в 1913 году. Ни в Бобруйском, ни в Могилевском и Калининском округах мы уже ни разу не встречали белобровика летом, и здесь он бывает только на пролетах.

179. Merula merula merula L

Довольно обыкновенный гнездящийся и пролетный вид.

180. Prunella modularis (L)

Ежегодно бывает на пролетах. В окрестностях Горок видел 18 апреля в ближайшем перелеске среди можжевеловых кустов.

181. Troglodytes troglodytes troglodytes (L)

Гнездится во всех округах. Частично зимует.

182. Chelidon rustica rustica (L)

Весьма обыкновенный гнездящийся и пролетный вид. На Днепре еще наблюдались 20 сентября 1924 г. До этого (16 сентября) встречал их там же стаями до 50 экз.

183. Hirundo urbica urbica (L)

Обыкновенный гнездящийся и пролетный вид во всех округах.

184. Riparia riparia riparia (L)

Очень многочисленны на Днепре и по Сожу. Нередко и по другим речкам, где берега позволяют рыть норки для гнезд. 29 июля на Соже отдельные пары еще гнездятся: носят корм в норки.

185. Netta rufina (Pall.)

В последнем номере „Збірника Праць Зоологочнаго Музею Украин. Акад. Наук“ (ч. 3. 1927, стр. 163) М. Шарлеман приводит заметку о нахождении в 1926 году 7 февраля в г. Гомеле обмерзшего экземпляра красноносого нырка, упавшего на землю во время продолжительной вьюги. Летом 1925 г., по данным М. Котлевича, пара нырков наблюдалась на оз. *ココ* недалеко от впадения Припяти в Днепр (Шаршмань, ibid).

СПИСОК ПТИЦ ВОСТОЧНОЙ БЕЛОРУССИИ

VERZEICHNISS DER VÖGEL DER OST WEISSRUSSISCHEN-PROVINZEN

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ
AHGENOMMENE BEZEICHNUNGEN

n— гнездящаяся nistend; *t*— пролетная Durchzügler; *irr*— нерегулярно unregelmàssig vorcommend

e— Залетная Zufällih sich verfliegend; *C*— обыкновенная häufig (gemein); *CC*— очень обыкновен. ganz gemein

R— редкая selten; *RR* очень редкая sehr selten; *h*— зимний Wintergast

не найдена, но судя по общему распространению должна быть.
*—nicht gefungen, aber dem ûbrigen Verbreitungsgebiet zu urteilen, bestimmt zu erwarten.

№№ по порядку	Species et subspecies	Оршанский округ Der Orscha-Bezirk	Бобруйский окр. Der Bobrujsk-Bezirk	Могилевский окр. Der Mohilev-Bezirk	Калининский окр. Der Kalinínsk-Be-zirz (Klimoviczy)	Речицкий округ Der Reczyza-Bezirk
1	Podiceps cristatus cristatus L.	nRtCC	n(?),tCC	n?,tCC	n?,tCC	nC,tCC
2	Podiceps nigricollis Gh. L. Brehm.	n?,tR	*	*	*	n,t*
3	Podiceps auritus (L).	*	*	*	*	*
4	Podiceps ruficollis Pallas	n?,t*	n,t*	n,t*	n,t*	n,t*
5	Podiceps griseigena Bodd.	t*	t*	t*	t*	t*
6	Colymbus arcticus L.	n?,tC	tC	tC	tR	n?,tCC
7	Phalacrocorax carbo (L).	e	e*	e*	e*	e*
8	Ardea cinerea cinerea L.	nR,tCC	n.,tC	n.,tC	nR,tC	nC,tCC
9	Ardea purpurea L.	—	*	—	—	n?,irr*.
10	Botaurus stellaris stellaris (L.).	nC, tC*	nC,tC	nR,tR*	nRtR*	nCC,tCC
11	Ixobrychus minutus	nR*,tR*	nR*,tR*	nR,tR	nR*,tR*	nC,tC
12	Ciconia ciconia ciconia (L.).	nC,tC	nC,tC	nC,tC	nC,tC	nCC,tCC
13	Ciconia nigra (L.).	nR*tR*	nR*t*	n*?,t*	n*?,tR*	n,t
14	Cygnus cygnus (L.)	t*	t*	t*	t*	t*
15	Cygnus olor Gm	*	*	*	*	*
16	Cygnus bewicki Jarr	t,irr*	t,irr*	t,irr.*	t,irr*.	t.irr*.
17	Anser anser (L)	n?,tC*	n?,t*	t*	t*	t*
18	Anser albifrons (Scop.)	t*	t*	t*	t*	t*
19	Melanonyx arwensis (Brehm.)	t*	t*	t*	t*	t*
20	Melanonyx segetum segetum (Gm.)	t*	t*	t*	t*	t*
21	Branta bernicla (L.)	t,irr	t.irr	t.irr.	t.irr.	t,irr.
22	Anas strepera (L.)	n?,tR*	n?, R*	n?tR*	n?tR*	n*,t*
23	Anas boschas L.	nCC,tCC	nCC,tCC	nC.tC	nC,tC	nCC,tCC
24	Querquedula crecca crecca (L.).	nCC,tCC	nCC.tCC	nC.tC	nC,tC	nCC,tCC
25	Querquedula querquedula (L.).	nCC,tCC	nCC.tCC	nC,tC	nC,tC	nCC,tCC
26	Mareca penelope (L.)	n?,tC*	tR*	tC*	tR*	tCC*
27	Dafila acuta (L.)	n*,t*	n?,tC	n?,t*	n?,t*	n?,t*
28	Spatula clypeata (L)	n*,t*	nR,tC	n*,t*	n*,t*	n*,t*
29	Fuligula fuligula (L)	n?,t*	n?t	t*	t*	n?t*

№№ по порядку	Species et subspecies	Оршанский округ Der Orscha-Bezirk	Бобруйский окр. Der Bobrujsk-Bezirk	Могилевский окр. Der Mohilev-Bezirk	Калининский окр. Der Kalininsk-Bezirk (Klimoviczy)	Речицкий округ Der Reczyza-Bezirk
30	Fuligula marila (L.)	t*	t*	t*	t*	t*
31	Clangula clangula (L)	t*	t*	t*	t*	t*
32	Nyroca ferina (L.)	n?,t*	n? t*	n?,t*	t*	n*t*
33	Nyroca nyroca (Güld)	n?,t*	n*,t*	n*t*	n?t*	n,tC
34	Harelda hyemalis (L)	t*	t*	t*	t*	t*
35	Oidemia nigra (L)	t*	t*	t*	t*	t*
36	Oidemia fusca (L.)	t*	t*	t*	t*	t*
37	Mergus albellus L.	t*	t*	t*	t*	t*
38	Merganser serrator (L.)	t*	t_*	t*	t*	t*
39	Merganser merganser (L).	t*	t*	t*	t*	t*
40	Pandion haliaëtus (L.)	n•t*	n?,t*	tR	tR	n*tR
41	Tinnunculus tinnunculus tinnunculus (L.)	nC,tC	nC.tC	nC,tC	nC,tC	nC,tC
42	Erythropus vespertinus vespertinus (L.)	tR	tR	tR	tR	nC,tC
43	Falco columbarius alaunicus Fediusch.	nR,tC	n?tC,h.R.	n*tC.hR	nR,tC,hR	tC,h*
44	Falco subbuteo subbuteo (L.)	nC.tC	nC,tC	nCC,tCC	nC.tC	nC,tC
45	Falco perigrinus (Tunst.)	n?t*	n?,t*	n?,t*	n?,t*	n?,t*
46	Falco cherrug Gray	*	*	*	*	*
47	Pernis apivorus apivorus (L.)	nC,tC	nC.tC	nC,tC	nC.tC	nC,tC
48	Milvus korschun (Gm.)	nC,tC	nC,tC	nC,tC	nC,tC	nC,tCC
49	Haliaëtus albicilla (L.)	n?,t*	n?,t*	n?,t*	n?,t*	n*,tC
50	Aquila chrisaëtus chrisaëtus (L)	(n?),t,h	(n?),t,h	t,h	t,h*	(n?),t,h
51	Aquila maculata (Gm.)	n*t*	n,t*	nR,t	n*,t*	n*,t.
52	Aquila pomarina pomarina Brehm.	nC,tC	nC.tC	nC.tC	nR,tR.	n*,tC.
53	Circaëtus gallicus (Gm.)	*	nRR,tR	*	*	n*tC.
54	Archibuteo lagopus lagopus (Brünn)	tC,hR	tC,hR	tC,hR.	tC,hR.	tC.hR.
55	Archibuteo lagopus palidus Menzb	t*,h*	t*,h*	t*,h*	t*,h*	t*,h*.
56	Buteo vulpinus intermedius Menzb	nCC,tC.	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC

№№ по порядку	Species et subspecies	Оршанский округ Der Orscha-Bezirk	Бобруйский окр. Der Bobrujsk-Bezirk	Могилевский окр. Der Mohilev-Bezirk	Калининский окр. Der Kalininsk-Bezirk (Klimoviczy)	Речицкий округ Der Reczyza-Bezirk
57	Astur gentilis L.	sCC.	sCC.	sCC.	sCC.	sCC.
58	Accipiter nisus nisus (L.).	nCC.hR	nCC,hC	nCC.hC	nCC,hC	nCC,hC
59	Circus pygargus (L.)	nR.tC	nRtC	nR,tC	nR,tC	nC,tC
60	Circus macrourus (Gmel)	n?,tR	n?,tR	n?,tR.	n?,tR	nC,tC
61	Circus cyaneus (L.)	nC,tC	nC,tC	nC,tC	nC,tC	nCC,tCC
62	Circus aeruginosus aeruginosus (L)	nC,tC	nC,tC	nC,tC	nR,tR	nCC.tCC
63	Bonasia bonasia grassmanni Zedl.	sC.	sC	sR	sR	sC
64	Tetrao urogallus pleskei Stegm.	sC.	sC	sR	sRR	sR
65	Lagopus lagopus rossicus Serebr.	sC	sR	sR	sR	—
66	Lyrurus tetrix subsp.	sC	sC	sC	sC	sC
67	Perdix perdix cinera ≶ robusta Hom. & Tancre	sC	sC	sC	sC	sC
68	Coturnix coturnix coturnix (L).	nC.tC	nC,tC	nC,tC	nC,tC	nC,tC
69	Rallus aquaticus (L.).	n?	n?	n?	n?	n*,t*.
70	Crex crex (L).	nCC.tCC	nCC,tCC	nC,tC	nC,tC	nCC.tCC
71	Porzana porzana L.	nC,tC	nCC,tCC	nC.tC	nC,tC	nCC,tCC
72	Porzana parva (Scop.)	?	n?	n?	n?	n*
73	Gallinula chloropus chloropus (L).	nC.tC	nC,tC	nC,tC	nC,tC	nCC,tCC
74	Fulica atra atra L.	nRtC	nRtC	n*tC	n?,t	nCC,tCC
75	Grus grus (L.)	nR,tCC	nR.tCC	n?,tC	n?,tC	nC.tCC
76	Stercorarius longicaudus Vieill.	tRR*	t.irr*	tRR.*	te*	tRR*
77	Chroicocephalus ridibundus (L).	n,tC.	n?,tC	n?.tC	n?,tR.	nC,tCC
78	Chroicocephalus minutus (Pall).	tR*	?	tR*	?	tR*
79	Larus canus canus L.	tC	tR	tC*	tC.*	tCC
80	Larus argentatus cachinnans Pall.	tRR*	?	tRR*	?	tRR*
81	Larus fuscus L	tR	tR	tR*	?	tR
82	Larus gelastes Keys. e. Blas	—	e*	—	—	e*
83	Sterna hirundo L	n*,tCC	n?,tC	n?.tCC	n?,tC.	nCC,tCC
84	Sterna paradisaea (Brün.)	te*	—	te*	—	te*

№№ по порядку	Species et subspecies	Оршанский округ Der Orscha-Bezirk.	Бобруйский округ Der Bobrujsk-Bezirk	Могилевский окр. Der Mohilev-Bezirk	Калининский окр. Der Kalininsk-Bezirz (Klimoviczy)	Речицкий округ Der Reczyza-Bezirk
85	Sterna minuta L.	—	—	n?,t*	?	nC,tC
86	Hydrochelidon leucoptera Temmincki	n?,t*	?	n?,t*	?	nR,tR
87	Hydrochelidon leucopareia(Temm.)	—	—	—	—	n?tR
88	Hydrochelidon nigra nigra (L.) .	n*tC	n?,tC	n*tC	n?,tR	nC tCC
89	Otis tarda Lin.. . . .	—	—	—	—	n?t*,rr
90	Oedicnemus oedicnemus L. .	—	—	—	—	n,t*
91	Haematopus ostralegus borysthenicus Charl. . .	—	—	—	—	tRR*
92	Scolopax rusticola L. . .	nC,tC	nC.tC	nC.tC	nR,tC	nC,tC
93	Gallinago media Lath. . .	nC,tCC	nCtCC	nR.tC	nR,tC	nCC.tCC
94	Gallinago gallinago gallinago (L.)	nCC,tCC	nC,tCC	nC,tC	nC,tC	nCC,tCC
95	Limnocryptes gallinula (L.) .	nR*,tC	n*,tC	n?tR	n?tR	n?tC
96	Limicola platyrhyncha (Tem.) .	?	?	?	?	tR*
97	Limonites minutus Leisl. . .	tC*	tC*	tC*	t	tC
98	Limonites temmincki Lisl.. .	t*	t*	t*	t*	t*
99	Pelidna ferruginea (Brünn) .	t*	t*	t*	t*	t*
100	Pelidna alpina (L.) . . .	tC*	tR*	tC	t*	tC
101	Calidris arenaria L. . . .	t*	*	t?	*	t*
102	Machetes pugnas (L.) . .	nR.tC	n?,tC	nR.tC	?	n?tC
103	Helodromas ochropus (L.) . .	nC,tC	nC,tC	nC,tC	nR,tC	nC,tCC
104	Rhyacophilus glareolus (L.) .	nC,tC	nC,tC	nC.tC	nC,tC	nCC,tCC
105	Totanus glottis L. . . .	t*	t*	t*	t*	tCC
106	Totanus totanus (L.) . .	nR,tR	nC,tC	nC,tC	n*tC	nCC.tCC
107	Totanus fuscus L. . . .	?	?	?	?	tC
108	Limosa limosa (L.) . . .	nC,tC	nC,tC	nR.tC	n?t?	nCC.tCC
109	Numenius arquatus (L.) . .	nR,tC	nR,tC	n*tC	n?t	nCC,tCC
110	Numenius phaeopus (L.) . .	tR*	tR	*	*	tR*
111	Phalaropus lobatus (L.) . .	t*	t*	t*	t*	t*
112	Vanellus vanellus (L.) . .	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nC,tC	nCC,tCC

№№ по порядку	Species et subspecies	Оршанский округ Der Orscha-Bezirk	Бобруйский округ Der Bobrujsk-Bezirk	Могилевский окр. Der Mohilev-Bezirk	Калининский окр. Der Kalininsk-Bezirz (Klimoviezy)	Речицкий округ Der Reczyza-Bezirk
113	Charadrius apricarius L. . .	tCC	tCC	tCC	tCC	tCC
114	Squatorola squatorola (L.). .	t*	tR	t*	t*	t*
115	Eudromias morinellus (L.) .	t*	t*	t*	t*	t*
116	Charadrius dubius curonicus (Gm.)	nC,tCC	nR,tR	nC,tC	nC,tC	nCC,tCC
117	Charadrius hiaticula L. . .	n?,t	?	n?,t	n?,t	tC
118	Terekia cinerea (Güld) . .	—	—	—	—	n?t*
119	Tringoides hypoleucos (L.) .	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC
120	Tringa canutus L. . . .	?	?	?	?	t*
121	Columba livia Gm. . . .	sC	sC	sC	sC	sC
122	Columba oenas L. . . .	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC
123	Columba palumbus L. . .	nC,tC	nC,tC	nC,tC	nC,tC	nC,tC
124	Streptopelia turtur turtur (L.) .	nC,tR	nC,tC	nC,tC	nC,tC	nCC,tCC
125	Cuculus canorus canorus L. . .	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC
126	Coracias garrulus garrulus L. .	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC
127	Upupa epops epops L. . .	nR,tR	nC,tC	nC,tC	nCC,tCC	nCC,tCC
128	Alcedo ispida L. . . .	nR	nR	nC	nR	nC
129	Bubo bubo bubo (L.) . .	sR	sR	sRR	sRR	sR
130	Otus scops (L.) . . .	nR	*	*	*	*
131	Asio otus otus (L.) . . .	nR*	nR	nR*	nR*	nR
132	Asio flammeus flammeus (Pontopp.)	nC,tC	nC,tC	nC,tC	nC,tC	nC,tCC
133	Glaucidium passerinum (L.) .	sR	sR*	sR*	sR*	sR*
134	Cryptoglaux tengmalmi Gm. .	sR	n?hR*	n?hR*	n?R*	?
135	Surnia ulula ulula (L.) . .	n?,hR*	hR*	hR*	hR*	?
136	Scotiaptex nebulosa lapponica (Rtz)	sRR*	?	?	?	—
137	Strix uralensis (Pall.) . .	sR	n?hR	*	*	*
138	Strix aluco aluco L. . . .	sCC	sCC	sCC	sCC	sCC
139	Nyctea nyctea (L.) . . .	hRR*	hRR	hRR*	hRR*	hRR*
140	Athene noctua Scop. . .	sRR*	sR	sR	sR*	sC*

№№ по порядку	Species et subspecies	Оршанский округ Der Orscha-Bezirk	Бобруйский окр. Der Bobrujsk-Bezirk	Могилевский окр. Der Mohilev-Bezirk	Калининский окр. Der Kalininsk-Bezirz (Klimoviczy)	Речицкий округ Der Reczyza-Bezirk
141	Strix flammea (L.)	—	—	—	—	nR*
142	Merops apiaster L.	—	—	—	—	t.irr.*
143	Caprimulgus europaeus L.	nCC,tCC	nC,tC	nC tC	nC,tC	nC,tC
144	Apus apus (L.)	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC
145	Jynx torquilla torquilla L.	nCC,tCC	uCC,tCC	nCC tCC	nCC,tCC	nCC,tCC
146	Dryocopus martius martius (L.)	sC	sC	sR	sR	sC
147	Dryobates major major (L.)	sCC	sCC	sCC	sCC	sCC
148	Dryobates leucotos leucotos (Bescht)	sC	sC	sC	sC	sCC
149	Dryobates medius medius (B.)	?	sRR	sR	sR	sC
150	Dryobates minor minor L.	nR,hC	nRhR	nR,hC	nR,hC	nR,hC
151	Dryobates minor transitivus Loud.	hR*	hR	hR*	hR*	?
152	Picoides tridactylus subsp.	nRR*	nRR*	?	?	?
153	Picus viridis viridis L.	sC	sCC	sC	sC	sC
154	Picus canus Gm.	sR—C	sR—C	sR	sR	sR
155	Corvus corax L.	sC	sC	sC	sC	sC
156	Corvus cornix cornix L.	s—tCC,	s—tCC	s—tCC	s—tCC	s—tCC
157	Corvus frugilegus frugilegus L.	nCC,tCC hRR	nCC,tCC, hRR	nCC,tCC, hRR	nCC,tCC hRR	nCC,tCC, hRR
158	Coloeus monedula monedula (L.)	sCC.tCC	sCC,tCC	sCC.tCC	sCC,tCC	sCC.tCC
159	Pica pica pica (L.)	sCC	sR	sC	sC	sC
160	Nucifraga caryocotactes caryocotactes (L.)	nR	nR	*	*	*
161	Nucifraga caryocotactes macrorhynchus Brehm.	irr.h*	irr. h*	irr. h.*	irr.h.*	irr. h*
162	Garrulus glandarius glandarius (L.)	sCC	sCC	sCC	sCC	sCC
163	Sturnus vulgaris intermedius Praz.	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC.tCC	uCC,tCC
164	Oriolus oriolus oriolus (L.)	nC,tC	nC,tC	nC,tC	nC,tC,	nC.tC
165	Coccothraustes coccothraustes coccothraustes (L.)	nR,hRR*	nC,hR	nR,hR	nR,hR*	nCC,hR
166	Chloris chloris chloris (L.)	nC,tC,hR	nC,tC,hR	nC,hR.*	nC,tC,hR	nC.tC,hR
167	Loxia curvirostra curvirostra L.	sC	sC	sR	sR	?

№№ по порядку	Species et subspecies	Оршанский округ Der Orscha-Bezirk	Бобруйский окр. Der Bobrujsk-Bezirk	Могилевский окр. Der Mohilev-Bezirk	Калининский окр. Der Kalininsk-Bezirk (Klimoviczy)	Речицкий округ Der Reczyca-Bezirk
168	Loxia pytyopsittacus Borkh .	sRR*	n?hRR*	n?hRR*	n?hRR*	?
169	Carduelis carduelis (L) . .	sCC.tCC,	sCC,tCC,	sCC,tCC.	sCC,tCC,	sCC,tCC
170	Acanthis cannabina cannabina (L)	nC tCC. (hR)	nC. tCC,h?	nC,tCC, h?	nC,tCC,h?	nC tCC,h?
171	Acanthis linaria lin ria (L). .	hCC	hCC	hCC	hCC	hCC
172	Acanthis hornemanni i exilipes (Coues)	hR	hR	hR	hR	hR
173	Chrysomitris spinus (L) . .	nR.tCC. hC.	nR,tCC,hC	n?,tCC. hC	n?tCC,hC	n?,tCC. hC
174	Pyrrhula pyrrhula pyrrhula (L).	n?tC,hCC.	hCC	hCC	hCC	hCC
175	Carpodacus erythrinus (Pall.) .	nC	nR	nC	nC	n?
176	Pinicola enucleator (L) . .	hRR.*	hR,irr.*	hR,irr.*	hR,irr.*	hR,irr.*
177	Fringilla coelebs coelebs L .	nCC.tCC. hRR	nCC.tCC hRR	nCC,tCC (h?)	nCC,tCC. (h?)	nCC,tCC, (hR)
178	Fringilla montifringilla (L) .	tC	tC	tC	tC	tC
179	Passer domesticus domesticus (L)	sCC	sCC	sCC	sCC	sCC
180	Passer montanus montanus (L).	sCC	sCC	sCC	sCC	sCC
181	Emberiza citrinella citrinella L.	nCC.hC	nCC,hC	nCC.hC	nCC.hC	nCC.hC
182	Emberiza hortulana hortulana (L)	n?R*	nC – tC	nC	nC	nC
183	Cynchramus schoeniclus goplanae Dom.	nC,tCC	nC.tCC	nC,tCC	nC,tCC	tCC
184	Cynchramus schoeniclus ukrainae Zarud . . .	—	—	—	?	nCC
185	Calcarius lapponicus (L) . .	t*	t*	t*	t*	t*
186	Plectrophenax nivalis (L). .	tC.hC	tC.hC	tC,hC	tC,hC	tC.hC
187	Eremophila alpestris flava (Gm)	t*	t*	t*	t*	t*
188	Miliaria miliaria L . .	—	—	—	—	nR
189	Galerida cristata cristata (L) .	n?*	nR,hR	nCC,hC	nCC,hC	nCC,hCC
190	Lullula arborea arborea (L) .	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC
191	Alauda arvensis arvenis L .	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC
192	Anthus trivialis trivialis (L) .	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC;	nCC,tCC
193	Anthus pratensis (L). . .	nC,tCC	nC,tCC	nC,tC	nC,tC	nC.tCC
194	Anthus cervinus (Pall.) . .	t*	t*	t*	t*	t*

№№ по порядку	Species et subspeciss	Оршанский округ Der Orsha-Bezirk	Бобруйский окр. Der Bobrujsk-Bezirk	Могилевский окр. Der Mohilev-Bezirk	Калининский окр. Der Kalininsk-Bezirk (Klimowiczy)	Речицкий округ Der Reczyza-Bezirk
195	Agrodroma campestris (L)	n*	nC,t	nC,t	nC,t*	nC,t*
196	Budytes flava flava (L)	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC
197	Budytes flava thunbergi Billberg.	nC,tCC	nC,tCC	nC,tCC	nC,tCC	nC,tCCC
198	Motacilla alba alba L	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC
199	Certhia familaris familaris L	sC	sC	sC	sC	sC
200	Sitta europaea europaea L	sCC	sCC	sCC	sCC	sC
201	Sitta europaea homeyeri Hart		sR			
202	Parus major major L	sCC	sCC	sCC	sCC	sCC
203	Periparus ater ater (L)	sCC	sC	sC	sC	sC
204	Cyanistes coeruleus coeruleus(L).	sC	sC	sC	sC	sCC
205	Parus cristatus cristatus L и ≶ mitratus Brp.	sCC	sCC	sCC	sCC	sCC
206	Parus palustris palustris (L)	sCC	sCC	sCC	sCC	sCC
207	Parus atricapillus borealis (Selys)	sCC	sCC	sCC	sCC	sCC
208	Parus atricapillus rossicus Fediush.	h.R*	hR*	hR*	hR*	hR*
209	Aegithalos caudatus caudatus (L)	sC	sC	sC	sC	sC
210	Remiza pendulina pendulina (L)	n?	nRR	nR	nR	nC
211	Regulus regulus regulus (L)	sCC	sCC	sC	sC	sR
212	Lanius minor minor Gm.	nRR*	nC	nCC	nCC	nCC
213	Lanius excubitor excubitor L	nR	nR	nC	nC	nCC
214	Lanius collurio collurio L.	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC
215	Ampelis garrulus garrulus (L)	tC,hR	tC,hR	tC,hR	tC,hR	tC,hR
216	Muscicapa striata sfriata (Pall.)	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC
217	Hedymela articapilla articapilla(L)	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC
218	Siphia parva parva (Bechst.)	nC	nC	nC	nC	nC*
219	Hedymela collaris (Bechst.)	—	—	—	—	(nR?)*
220	Phylloscopus collybita abietinus Nills.	nCC,tCC	uCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC
221	Phylloscopus trochilus trochilus L	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC
222	Phylloscopus sibilatrix sibilatrix (Bechst.)	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC
223	Acanthopneuste viridanus (Blyth)	?	nRR	?	?	?
224	Hippolais icterina (Viell)	nC, tC	nC,tC	nC, tC	nC, tC	nC, tC
225	Acrocephalus arundinaceus (L).	?	?	?	?	nC

№№ по порядку	Species et subspecies	Оршанский округ Der Orscha-Bezirk	Бобруйский окр. Der Bobrujsk-Bezirk	Могилевский окр. Der Mohilev-Bezirk	Калининский окр. Der Kalinisk-Bezirk (Klimowiczy)	Речицкий округ Der Reczyza-Bezirk
226	Acrocephalus palustris (Bechst).	nC.tC	nC.tC	nC tC	nC,tC	nC,tC
227	Acrocephalus dumetorum Blyth.	nC*	nR	nR	?	?
228	Acrocephalus schoenobaenus(L).	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC.tCC	nCC.tCC
229	Acrocephalus streperus Wiell .	nR*	nR*	nR*	nR*	nC*
230	Acroceph lus aquaticus (Gmel.).	?	?	?	?	n*
231	Locustella luscinioides (Savi) .	—	—	?	?	nC
232	Locustella fluviatilis (Wolf.) .	n*	n*	n*	n*	n*
233	Locustella naevia (Bodd.). .	n*	nR	n*	n*	n*
234	Sylvia nisoria nisoria (Bechst) .	nR*	nR	nR	n*	nR
235	Sylvia communis communis Lath.	nCC,tCC	nCC.tCC	nCC.tCC	nCC.tCC	nCC.tCC
236	Sylvia borin borin (Bodd) .	nC,tC	nC,tC	nC.tC	nC,tC	nC.tC
237	Sylvia atricapilla atricapilla (L).	nCC,tCC	nCC.tCC	nCC'tCC	nCC.tCC	nCC.tCC
238	Sylvia curruca curruca (L) .	nR—C.tR	nR - C,tR	nR—C,tR	nR—C,tR	nR—C.tR
239	Erithacus rubecula rubecula (L).	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC.tCC	nCC,tCC	nCC.tCC
240	Cyanecula svecica cyanecula (Wolf.)	nR tC	nR,tC	nR.tC	nR,tC	nR.tC
241	Luscinia luscinia (L) . .	nC.tC	nC,tC	nC,tC	nC,tC	nC,tC
242	Phoenicurus phoenicurus phoenicurus (L)	nC.tC	nC,tC	nCC.tC	nC,tC	nC,tC
243	Pratincola rubetra rubetra (L).	nCC.tCC	nCC,tCC	nCC.tCC	nCC.tCC	nCC,tCC
244	Oenanthe oenanthe oenanthe(L).	nC.tC	nC,tC	nC,tC	nC,tC	nC,tC
245	Turdus pilaris L . . .	nC,tCC, hR	nC.tCC, hR	nCC.tCC, hR	nC,tCC, hR	nC,tCC, hR
246	Turdus viscivorus viscivorus L.	nC,tC	nC.tC	nC,tC	nC,tC	nC.tC
247	Turdus musicus L . . .	nCC,tCC	nCC,'CC	nCC.tCC	nCC.tCC	nCC.tCC
248	Turdus iliacus L. . . .	nC,tCC	n?tC	tC	tC	tC
249	Merula merula merula (L) .	nC,tC	nC.tC	nC.tC	nC.tC	nC.tC
250	Prunella modularis (L) . .	n?,tC	tC	tC	tC	tC
251	Troglodytes troglodytes troglodytes (L) . . .	nC,tCC hR	nCC,tCC, hR	nC.tCC, hR	nC.tCC, kR	nC,tCC, hR
252	Cinclus cinclus (L) . . .	*	*	*	*	*
253	Chelidon rustica rustica (L) .	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC.tCC	nCC.tCC	nCC.tCC
254	Hirundo urbica urbica L . .	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC
255	Riparia riparia riparia (L) .	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC	nCC,tCC
256	Netta ruffina (Pall.) . .	—	—	—	—	n(?),t,h,irr.

Общие замечания к списку

Изучение приведенного списка птиц обнаруживает, прежде всего, значительное количество видов *„не доказанных“* (отмеченных звездочкой) для области, но, судя по общему географическому их распространению, или—находкам в смежных участках Белоруссии, *вполне вероятных* или, даже более того,—*безусловно находящихся* постоянно, периодически, либо, более или менее, случайно на описываемой территории. Действительно, стоит обратить внимание на присутствие в крае таких крупных рек, как *Днепр, Березина* и *Сож*, имеющих либо меридиональное направление, либо близкое к последнему, благодаря чему только, уже, естественно, следует ожидать здесь периодических появлений многих пролетных видов, главным образом, среди куликов, уток, чаек и других, связанных с водой птиц. Система Днепра, безусловно являясь пролетным путем, как раз наименее подверглась исследованию и весенних, напр., наблюдений не имеется пока вовсе. Что же касается двукратных осенних моих наблюдений в окр. села В. Жары в Речицком округе, то они тоже далеко недостаточны, чтобы зарегистрировать хотя бы с приблизительной полнотой все пролетающие виды, так как экскурсии оба раза прерывались слишком рано—25 сентября и 28 августа, между тем, как известно, главная масса птицы, особенно уток, поганок, гагар, крупных чаек, лебеди, гусь и др. летит значительно позднее, иногда вплоть до самой зимы и, даже вначале ее. Наиболее богат видами Речицкий округ, благодаря разнообразию стаций и южному, сравнительно, положению. В частности здесь значительно больше болотной птицы (камышевок, куликов, уток, цапель и др.), кроме того, соседство с Черниговскими полустепными пространствами сообщает авифауне округа некоторые новые черты, а именно сюда заходит авдотка—Oedicnemus oedicnemus (Станчинский, 19), а рядом, в Гомельском округе гнездится дрофа—*Otis tarda*, т. е. уже степные обитатели. Такие виды, как *Merops apiaster*, *Strix flammea, Hedymela collaris, Ardea purpurea предположительно* внесены в состав авифауны округа отчасти на основании списка птиц для Черниговщины, составленного В. Артоболевским (30), отчасти же, принимая во внимание южное положение описываемого участка и соседство с Киевской губернией, где все перечисленные виды, более или менее, обыкновенны. То же самое относится ко многим пролетным видам куликов, уток и др. водоплавающим, добываемым ежегодно на Днепре на соседних административных территориях. Новый факт нахождения *Terekia cinerea* на гнездовьи как на Днепре, так и на Нижней Припяти Кистяковским (31) и моим сотрудником студ. Шейко (1925 г. близ Скригалова), делает вполне возможным такое же спорадическое гнездование мордунки и рядом в Речицком округе. Переходя к общей характеристике орнитологической фауны восточной Белоруссии, отметим, прежде всего, заметное уменьшение лесных обитателей, при чем не столько в видовом смысле, сколько в численном, что зависит, понятно, не в такой мере от географического положения области, а от большей степени обезлесения ее.

Достаточно указать на то, что за все время двухмесячных, ежедневных почти экскурсий мы ни разу не подняли здесь глухаря (Могилевский, Калининский и Оршанский округа), не встретили ни одного рябчика, очень мало видали черных дятлов, куликов-чернышей, вовсе не видели крупных сов—Strix uralensis, Bubo bubo и т. п. обитателей крупного леса, хотя все указанные виды несомненно кое-где здесь уцелели еще (что доказано коллекционными материалами, более позд-

него происхождения). Очень наглядно иллюстрирует резкое здесь уменьшение лесной фауны за последнее десятилетие факт полного исчезновения в указанных округах лося, медведя и рыси, что опять-таки должно быть поставлено в прямую зависимость от истребления леса. Само собой разумеется, что взамен лесных видов на новых, созданных человеком стациях появились и численно умножились обитатели полей, кустарных зарослей, лесных порубей и расчисток, а повсеместное расселение деревень на хутора—увеличило и расселило фауну таких коменсалов как полевой и домашний воробей, обе ласточки, стриж, полудомашний голубь, коноплянка, садовая и обыкновенная овсянки, скворец, грач, серая мухоловка и др. По сравнению с лесистым Бобруйским округом и особенно более северными округами Витебщины в восточной части республики заметно чаще встречаются и многочисленнее виды открытых стаций—*Alauda arvensis, Galerida cristata, Budytes flava, Pratincola rubetra, Oenanthe oenanthe, Agrodroma campestris*, а также виды свойственные кустарниковым зарослям и лядам с пнями и одиночными деревьями, мелким перелескам и рощам среди полей, либо у жилья человека. Среди последних особенно бросается в глаза необыкновенное обилие *Falco subbuteo, Tinnunculus tinnunculus, Coracias garrulus, Acanthis cannabina, Anthus trivialis, Emberiza citrinella, Fringilla coelebs, Pratincola rubetra, Oenanthe oenanthe, Muscicapa striata, Sylvia communis, Sylvia borin. Pica pica, Covus cornix, Columba oenas.*

Почти полное отсутствие травяных и приречных болот, а также сфагновых торфянников, равно как и отсутствие озер, сколь-нибудь подходящих для жизни водоплавающей птицы, обуславливает необыкновенную бедность (видовую и численную) гнездящейся фауны болотных и водяных птиц. В этом отношении особенно выделяется Калининский округ и большая часть Могилевского. Полную противоположность к ним представляет Речицкий округ, особенно его южная часть, о чем говорилось выше.

Но, кроме характера преобладающих стаций и связанных с этим особенностей орнитофауны средних и южных частей восточной Белоруссии—последняя имеет ряд существенных отличий от таковой в остальных частях республики, об'ясняющихся уже иным географическим положением описываемых участков. С одной стороны, здесь мы наблюдаем появление совершенно новых элементов орнитофауны, а с другой—выпадение ряда видов более северных или заметное уменьшение их в числе и, наоброт, численное увеличение видов юга и юго-востока. Целый ряд границ распространения отдельных видов пересекает территорию описываемой области.

Среди новых видов, по сравнению с северными и средними округами западной Белоруссии отметим появление просянки—*Miliaria miliaria L*, найденной в Речицком округе и в Гомельщине; зеленой пеночки—*Acanthopneuste viridanus* Blyth., найденной Шнитниковым в Бобруйском уезде; малой крачки—*Sterna minuta* уже обыкновенной на Днепре в пределах южной части Речицкого округа; ремеза—*Remiza pendulina* (которого нет в север. части республики); авдотки—*Oedicnemus oedicnemus* (*L*); *дрофы*—*Otis tarda* (*L*); дроздовидной камышевки—*Acrocephalus arundinadeus* (*L*), не найденной в Витебщине; соловьиной камышевки—*Locustella luscinioides* (*Savi*)—гнездящейся в Брагинских камышах и кобчика—*Erythropus vespertinus* (*L*), гнездящегося в Речицком Полесьи. Кроме того, в Могилевском округе обыкновенен домовой сыч—*Athene noctua Scop*, а из Оршанского округа видел *Otus scops* (*L*)—виды тоже неизвестные для Витебщины. В высшей

степени было бы интересным подтверждение залета в южн. участки Речицкого округа щурки *Merops apiaster,* установление гнездования золотистой цапли—*Ardea purpurea* (найденной мною летом в Слуцком районе), а также сипухи—*Strix flammea* (*L*) и мухоловки белошейки—*Hedymela collaris.* Все эти пока предположительные виды несомненно могут быть обнаружены в пределах Речицкого округа при более тщательном его исследовании, так как в соседних участках Украины—в губ. Черниговской и Киевской они более или менее обыкновенны.

С другой стороны, в восточных и южных округах Белоруссии отсутствуют уже некоторые представители северной орнитофауны, найденные нами в Витебщине, частично, в Борисовском округе (и вероятно имеющихся и в Оршанском округе).

Так, например, особенно любопытно отсутствие белобрового дрозда—*Turdus iliacus L.*, полное отсутствие летом снегиря—*Pyrrhula pyrrhula* (*L*), трехпалого дятла—*Picoides tridactylus L*, сойки кукши—*Perisoreus infaustus* (*L*), вьюрка—*Fringilla montifringilla L.*, щура—*Pinicola enucleator L*, и белой куропатки—*Lagopus lagopus* на значительной части описываемой территории.

За то по мере удаления к востоку и к югу от западных и северных лесистых округов все более и более становятся обыкновенными такие виды, как садовая овсянка—*Emberiza hortulana* (*L.*), редкая еще в Борисовском округе, но уже в Осиповичском районе, Бобруйского округа, ставшая положительно одной из обыкновеннейших птиц. Заметно также, по мере движения на восток, увеличение и чечевицы *Carpodacus erythrinus* (*Pall.*), оказавшейся довольно обыкновенной за Днепром, особенно в долине Сожа (под Пропойском) и на Проне.

Малый сорокопут—*Lanius minor L.*, крайне редко встречавшийся в Борисовском и Лепельском р.—на востоке республики все увеличивается в численности, а в Белынковичск. р. и в Речицком Полесьи местами положительно многочислен. То же надо сказать и относительно горлинки *Turtur turtur* (*L.*) вовсе неизвестной для северных районов Витебщины, но уже в Бобруйском и Могилевском округах, в пойменных зарослях и в молодых ольшанниках весьма многочисленной.

На безлесных пространствах Могилевского округа все чаще и чаще встречался *полевой конек*—*Agrodroma campestris L.*, а хохлатый жаворонок—*Galerida cristata L.* нигде не составлял редкости, наоборот, являясь в некоторых местах даже многочисленным (д.д. Летяги, Закрупицы Могилевского округа и Жары и Гдень Речицкого окр.). В лиственных дубравах, особенно там, где встречался граб, (постоянно были находимы дубоносы—*Coccothraustes coccothraustes, L.*) и чем дальше к югу, тем все чаще попадается белоспинный дятел—*Dryobates leucotos Bescht* и средний—*Dryobates medius* (*L.*), также неизвестный для сев. Белоруссии.

Дербник—*Falco columbarius* еще гнездился на широте Климович (53° 37' с. ш.), но, повидимому, здесь и теряется его южная граница гнездования.

Во всех районах восточной части Белоруссии заметно увеличиваются в числе удод—*Upupa epops*, сизоворонки—*Coracias garrulus* и другие указанные уже виды.

Крайне интересно отметить захождение в восточные части Белоруссии совсем степных видов, как, напр., *дрофы и авдотки.* При чем это не единственные элементы степной фауны, вторгшиеся (или же реликтовые) в указанные уголки описываемой области,—к ним следует прибавить еще *слепыша*—*Spalax typhlus, хомяка*—*Cricetus cricetus L.*, (Станчинский, 19), частые залеты *саранчи* (*Sp.*?) и другие,

более или менее степные виды этомофауны, постоянно обитающие здесь, как напр., найденные в Могилевщине Добротворским *Hortobombus ruderatus* и Арнольдом—*Terestribombus terrester*.

Через описываемую территорию проходят границы распространения многих видов, при чем большая часть границ имеет широтное или скорее изотермальное направление, другие же обусловлены, повидимому, распространением биологических стаций, необходимых для жизни вида. Хорошим примером последнего является граница южного распространения белой куропатки—*Lagopus lagopus*, тесно связанной с моховыми торфяниками и отсутствующей там, где нет указанных болот.

Начинаясь на западе БССР приблизительно на широте города Слуцка (а не Немана, как принималось обыкновенно до этого), граница эта идет на восток, приблизительно, по линии московского шоссе через Бобруйск и далее на восток, захватывая окр. м. Журавичи, Могилевского округа, откуда идет к северу *восточнее* Днепра на Могилев, затем, через районы Ряснянский и Мстиславльский—уходит в Смоленскую губернию.

Таким образом, граница распространения белой куропатки, дойдя до Днепра на широте Рогачева, или несколько севернее его, круто поворачивает к северу. Исследуя распространение сфагновых торфяников, мы видим, что эта же линия, в общем, очертит и их южное и восточное распространение в Белоруссии. Разумеется, речь идет о более или менее постоянном развитии указанного типа болот, и что отдельные участки сфагновых болот, в виде островков, прошли несколько далее к югу, особенно в Бобруйском и Слуцком округах. Повидимому, отсутствие *сплошных* еловых и еловолиственных (осиново-березовых) насаждений в большей части восточных округов об'ясняет отсутствие или спорадичность некоторых таежных видов, как, напр. *клестов, щура, белобрового дрозда, трехпалого дятла, корольков* (но не снегиря, южнее З. Двины нормально не распространяющегося). Из видов северной половины лесной зоны здесь уже не гнездятся ни белобровый дрозд—*Turdus iliacus L.*, ни дербник *Falco columbarius* (к югу от Климович). Границей гнездования первого будет линия, идущая от западной государственной границы БССР через Плещеницкий район на г. Борисов и, далее на восток, вдоль линии ж. д.—через Оршу, или же немного к югу, до Смоленской губернии. *Дербник* же до сих пор был находим летом только *к северу* от линии Минск—Климовичи.

Малый сорокопут, *Lanius minor* встречается к югу от линии, идущей на западе через районы Ушачский, Лепельский, Чашницкий, Сенненский, Оршанский и до Смоленской губернии в пределах Рославльского уезда, откуда граница понижается к юго-востоку.

Северная граница садовой овсянки *Emberiza hortulana L.*, пересекает БССР, начиная с запада через районы Бегомльский, Лепельский, Холопеничский, Черейский, Толочинский, Круглянский, Шкловский, Луполовский, Ряснянский, Мстиславльский—входит в Петровичскую волость Рославльского уезда, Смоленской губернии.

Ремез—*Remiza pendulina* в пределах восточных округов севернее реки Сож не найден.

Северная граница просяники—*Miliaria miliaria* пока может быть указана весьма приблизительно, но не выходя к северу за пределы Гомельского округа, а то и южнее.

Севернее Речицкого округа не найден на гнездовьи и кобчик—*Erythropus vespertinus* (в пределах БССР).

Также там где-то теряется северная граница и соловьиной камышевки—*Locustella luscinioides.*

Переходя к цифровому анализу состава орнитофауны описываемой части республики, оказывается, что общее число гнездящихся здесь форм в общем выше такового для северной Белоруссии на целых 10 видов и равно в настоящее время приблизительно 190 видам.

Что касается состава этого коренного населения птиц, то из них около 23 видов являются представителями северных лесов или *полосы тайги.* Это будут следующие виды: *Ciconia nigra, Dafila acuta, Tetrao urogallus, Lagopus lagopus, Tetrastes bonasia, Glaucidium passerinum, Dryocopus martius, Nucifraga caryocotactes, Chrysomitris spinus, Loxia curvirostra, Lanius excubitor, Budytes flava thunbergi, Anthus pratensis, Troglodytes troglodytes, Lophophanes cristatus, Parus atricapillus borealis, Aegi thalos candatus, Parus ater, Regulus regulus, Phylloscopus collybita, Turdus viscivorus, Turdus iliacus.*

Таким образом, из этого списка видно, что в описываемой части Белоруссии почти вдвое уже меньше влияние таежной фауны, нежели мы это имели для *Витебщины*, а именно—в восточной Белоруссии птиц таежной зоны только 12%, против 21% для Витебщины. Что-же касается представителей *юга* и юго-запада (не относя их к какой-либо зоогеографической единице), то здесь, как и следовало ожидать, уже заметное преобладание их, по сравнению с северными районами БССР. Таковыми будут следующие виды:

Podiceps ruficollis (*Ardea purpurea*), *Jxobrychus minutus, Ciconia ciconia, Anas strepera, Nyroca nyroca, Erythropus vespertinus, Aquila pomarina, Circaëtos gallicus, Porzana parva, Gallinula chloropus, Sterna minuta, Oedicnemus oedicnemus, Otis tarda, Totanus totanus, Limosa limosa, Dryobates medius, Picus viridis, Oriolus oriolus, Coccothraustes coccothraustes, Streptopelia turtur, Coracias garrulus, Upupa epops, Alcedo ispida, Otus scops, Athene noctua, Agrodroma campestris, Remiza pendulina,—Lanius minor, Emberiza hortulana, Cynchramus schoeniclus ukrainae, Miliaria miliaria, Galerida cristata, Acrocephalus arundinaceus, Locustella naevia, Locustella luscinioides, Merula merula* т. е. 37 видов, что составит около 20% по отношению ко всему числу гнездящихся, против 9,5% в Витебщине птиц той же категории.

При этом необходимо иметь ввиду, что главный % южных форм дал *Речицкий округ*, который при общем обзоре орнитофауны всей Белоруссии правильнее будет рассматривать вместе с другими *южными* округами республики.

Не пытаясь пока делать зоогеографических делений на исследованной территории и откладывая эту часть работы до общего описания птиц всех белорусских провинций, пока же заметим, что уже на основании приведенных данных невозможно рассматривать всю орнитофауну Белоруссии, как нечто целое, входящее в одну небольшую зоогеографическую единицу или даже в один участок *(pagus*, по Мензбиру [1]) и, что ее необходимо отнести по меньшей мере к двум зоологически разным участкам—северному и южному, что впрочем, уже намечал и проф. Мензбир, при характеристике своего *алауно-литовского* орнитогеографического участка (округа) (32, стр. 186).

Целый ряд южных форм среди других классов позвоночных нормально обитающих в Полесье, как напр., *Emys orbicularis, Lacerta*

[1]) Прежние свои округа проф. М. А. Мензбир переименовал в участки—pagus, а понятию округ—circulus дано значение более крупной единицы, обнимающей в себе два или более сходных участка (31, стр. 133).

viridis, Coronella austriaca, Hyla arborea, Pelobates fuscus, Nyctalus leissleri и не встречающихся уже даже в центральных районах Белоруссии, наряду с весьма характерными растительными ассоциациями, еще более подчеркивают эту неоднородность ее органического мира и необходимость зоогеографического деления более подробного.

Исследования германских орнитологов *(Zedlitz, Sachtleben Reichenow, Grassmann, Rüdiger* и др.) Западной Белоруссии (б. губ. Гродненской и Пинских болот) указывают, в свою очередь, на ряд весьма оригинальных черт в ее орнитофауне, имеющей уже явный западный характер, выражающийся в присутствии таких видов, как *Buteo buteo, Certhia brachydactyla, Regulus ignicapillus, Milvus milvus, Serinus canarius serinus* и др., не встречающихся на территории современной БССР. Это обстоятельство, при будущем проведении границ зоологических участков (или более дробных единиц), на основании изучения современного распространения птиц, поможет, кроме указанного горизонтального деления—на северную и южную части, провести также и вертикальную линию, отделяющую западные участки.

Список использованной литературы

1. **В. Н. Шнитников.**—Птицы Минской губернии. Материалы к познанию флоры и фауны Российской империи 1913. Москва.
2. **O. Graf Zedlitz.**—Die Avifauna des werstlichen Pripiet-Sumpfes im Lichte der Forschung deutscher Ornithologen in den Jahren 1915-1918. Journal für Ornithologie. 1920-1921.
3. **Grassmann**—Zwei Jahre Feldornithologie in den Rokitno-Sümpfen. Journal für Ornithol. 1918. S. S. 285—316.
4. **J Domaniewski**—Sprawozdanie z wycieczki ornitologicznei odbytej na Polesie w r. 1913. Tom XXV Pamiętnik Fizyograficzny. Warszawa, 1918.
5. **J. Domaniewski.**—Materyały do ornitofauny Ziem polskich. Część II. 1917. Comptes. Rendus de Soc. Sciences de Varsovie. X Anées, Fascicule 9.
6. **J Tarnani.**—L'emigration de certains oiseax dans le pays de la Vistula. Memoires de l'institut agronomique et forestier à Novo-Alexandria. Vol. X. 1897-1898
7. **А. В. Федюшин.**—О палеарктических расах дербника. Доклады С. Академии Наук. 1927. Ленинград.
8. **J Gengler.**—Herbst—und Winterbeobachtungen in Russische-Polen, Wolhynien und Westrussland. Ornitholog. Jahrbuch 1916. № 3-6 p. 63—82.
9. **A. Reichenow.**—Die Vogelfauna des Urwaldes von Bialowies. Bialowies in deutscher Verwaltung Heft 3, 1918. p. 172—191.
10. **Stolz**—„Ornithol. Ausbeute in Polen im Sommer. 1916. J. f. O. 1917. Bd. I. p 368 389.
11. **H. Sachtleben.**—Vögel. Beiträge zur Natur-und kulturgeschichte Lithauens und angrenzender Gebiete. München. 1921.
12. **E. Lehn Schiöler**—Om Forskellen mellem den danske Duehög og den typiske *Astur palumbarius L.* Dansk Ornitiholgisk Forenings Tidskrift, VIII. 1914 p 93—112. tab. 1.
13. **Dr. E. Hartert.**—Die Vögel der paläarktischen Eauna. Bd. I, II, III. Nachtrag I.
14. **O. Gr. Zedlitz.** Liste der im Gebiete der Schara beobachteten Vögel. Journal für Ornithol. 1917. II. p. 278—308.
15. **E. Lönnberg.**—Zur Kenntnis der Variation des Auerhuhns. Ornithol. Monatsberichte, 1905. S. 99—103.

16. O. Gr. Zedlitz. Das Gewicht als Rassenmerkmal bei Tetrao urogallus. Journ. für Ornith. 1924. Heft. 2. S. 244—252.
17. А.В. Федюшин —Материалы к изучению орнитофауны Мурмана. Труды Белорусск. Госуд. Университета № 8-9-10. 1925 Минск.
18. P. Serebrowskij.—Neue Formen des Moorschneehuhnes (Lagopus lagopus (L). Journ für Ornithol. LXXIV, Heft 3, 1926. p 511—512.
19. В. В. Станчинский.—Экспедиция по изучению фауны Западной области летом 1925 г. (предварительный отчет). Отд. оттиск из журн. „Экономическая Жизнь" № 4-5 1925-26 г. Смоленск, 1926.
20. Г. Л. Граве.—Очерк авифауны Смоленской губернии. Отд. оттиск из т. III Трудов О-ва Изучения Смоленского края. 1926. Смоленск.
21. В. Л. Бианки —Птицы, наблюдавшиеся в июне 1913 г. в Оршанском уезде, Могилевской губернии. Орнитол. Вестник, № 4. 1914 г.
22. C. E. Hellmayer.—Zur Nomenklatur Zweier paläarkitscher Krähen. Verhandlungen des Ornithologischen Gesellschaft in Bayern Bd XIII. 2, 1917.
23. Gengler —J. f. O. 1919, S. 222.
24. Zedlitz O.—Ett litet bidrag ill kännedomen om de Skandinaviska fägllraserna. Fauna och Flora, 1925, p. 145—173.
25. E. Stresemann Ornithologische Monatsberichte, 1925, № 6. S. 198.
26. В. Станчинский —Очерк фауны Смоленской губернии. Отд. оттиск из сборника: „Очерк естественно-исторических условий Смоленской губернии". Смоленск, 1924.
27. В. Станчинский —Полевой конек (Agrodroma campestris (L) в Смоленской губернии, как возможный реликт пустынно-степной фазы, Труды Смол. О-ва Ест. и Врачей, т. I. 1926. Смоленск.
28. В. Станчинский.—Птицы Смоленской губернии ч. I. Смоленск. 1927.
29. А. В. Федюшин О птицах Витебщины. Бюллетень Московского О-ва Испытателей Природы. Кн. 2. 1926.
30. В. Артоболевский.—Матеріяли до списку птахів південної половини Чернігівщини. Зап. Кіевск. Инстит. Нар. Осв. I, 1926. Киев.
31. М. А. Мензбир.—Зоологические участки Туркестанского Края и вероятное происхождение фауны последнего. Отд. оттиск из приложения № 4 к „Временнику" О-ва содействия успехам опытных наук и их практических применений имени Х. С. Леденцова. Москва. 1914.
32. М. А. Мензбир.—Орнитологическая география Европейской России. Ученые Записки Московского Университета, отд. естеств., вып. 2 и 3. Москва, 1882.
33. B. Stegmann.—Eine neue Auerhuhnform. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S. 1926. 19. II. Leningrad.
34. A. Fediuschin. Neue Formen paläarktischer Yogel. Neue östliche Formen der Gattung *Parus* L. I. f. O. LXXV Heft 3, 1927. Berlin. S. 490.
35. М. Шарлемань. Про збільшення гніздового ареалу червонодзьбой черни *(Netta rufina Pall.)*. Збірнік праць Зоол. Музэю Украін. Акад. Наук, Київ, 1927 стр. 163.

A. W. Fediuschin

Materialien zum Studium der Vögel Ost-Weissrusslands

(Kurze Uebersicht)

Folgender Artikel erscheint als das Ergebniss der Bearbeitung von Materialien und Beobachtungen die vom 15. bis zum 25. September 1924 und vom. I. bis zum 28. August 1925 im Bezirk Retchitzky am Flusse Dnieper und an der Braginka im Kreise des Dorfes Gden Joltscha, ferner vom 30. Mai bis zum 1. August 1925 auf dem Gebiet der Bezirke: Bobruisk (Nördl. Teil) Mogilew, Kalinin und teilweise Orschansk (Gebiet von Dribin) und in der Umgegend der Stadt Gorki im April 1926 gesammelt worden waren.

Als Grundlage zu dem hier Mitgeteilten dient die Sammlung von Vogelbälgen, die in den obengenannten Bezirken erbeutet worden sind, über 800 Exemplare.

Die östlichen Bezirke Weissrusslands mit Ausname des Retschitzky Bezirks unterscheiden sich von den nördlichen durch Mangel an Wald, Seen und Sümpfen und durch den Typus der Flüsse, wenn man diese mit denen des südlichen Teils der Republik, dem Polesje vergleicht. Folglich trifft man hier oder gar keine Vertreter vieler Arten der Wild-und Waldfauna, oder nur in sehr geringer Zahl. Auch Sumpfvögel sind selten. In starkem Widerspruch zu den mittelöstlichen Bezirken steht der Bezirk Retschitzky, sehr waldig und sumpfig, was man auch gleich am Reichtum der Fauna gewahr wird.

In den Bezirken Mogilew und Kalinin, den am meisten entwaldeten ist das *Auerhuhn* fast gänzlich verschwunden, sehr selten trifft man *Haselhühner*, grössere Raubvögel und andere Bewohner der früheren Waldes an. Dagegen nimmt die Fauna der Kommensalien stark zu: *Haussperlinge* und *Feldsperlinge*, beide Formen der *Schwalbe-Rauchschwalbe* und *Hausschwalbe, Goldammern* (*E. hortulana* und *citrinella*), *Staare, Saatkrähen, Graue Fligenfänger* und s. w. Auf den Feldern sieht man sehr viele *Feldlerchen, Haubenlerchen* und *Brachpieper* (*Agrodroma campestris*).

In der Ornithofauna des Gebietes findet man vieles was sich als etwas ganz verschiedenes von dem was man in West-und Nordweissrussland sieht, erweist, was durch die Verschiedencheit der geographischen Lage desselben erklärbar ist. Einersteits finden wir hier eine Reihe neuer Elemente der Ornithofauna mehr südlichen und südöstlichen Characters, andererseits sehen wir das Schwinden vieler nördlicher Formen, die noch in normaler Zahl im nördlichen Weissrussland hausen. Ausserdem wird beschriebenes Gebiet durch eine ganze Reihe geographischer Grenzen verschiedener Arten durchschnitten.

Aus der Zahl der neuen Arten im Vergleich mit den nördlichen und nordwestlichen Bezirken der Republik, deuten wir auf das Erscheinen im Bezirk Retschitzky von: *Miliaria miliaria L, Acanthopneuste viridanus Blyth, Sterna minuta Pall, Remiza pendulina, Oedicnemus oedicnemus L, Otis tarda L, Acrocephalus arundinaceus L, Locustella luscinioides Savi,*

und *Erythropus wespertinus,* der im Retschitzky Polesje nistet. Freilich sind fast alle diese Arten (ausser dem grünen Laubsänger) nur im Bezirk Retschitzky, der durch den Character seiner Fauna und seine geographische Lands haft ganz mit den südlichen Teil Weissrusslands stimmt, beobachtet worden. Im Bezirk Mogilew ist auch der Steinkauz gemein *(Athene noctua Scop.)* zuweilen trifft man *Otus scops L* an.

In den östlichen und südlichen Bezirken Weissrusslands fehlt aber die Weindrossel—*Turdus iliacus L,* der grosse Gimpel—*Pyrrhulla pyrrhula L,* der Dreizehenspecht—*Picoides tridactylus L, Perisoreus infaustus L, Fringilla montifringilla L, Pinicola enucleator L* und im grössten Teil genannten Gebietes, *Lagopus lagopus.* Alle diese Arten findet man in der nördlichen Hälfte Weissrusslands.

Stark vermehrt sich hier die Zahl der: *Emberiza hortulana, Lanius minor, Turtur turtur, Carpodacus erythrinus Pall, Coracias garrullus, Upupa epops, Dryocopus medius, Dryobates leucotos, Galerida cristata, Agrodroma campestris.* Sehr bemerkenswehrt ist das Einwandern in die östlichen Teile Weissrusslands der Steppenartee, win z. B. der *Trappe—Otis tarda,* des *Triels—Oedicnemus oedicnemus.* Und noch merkwürdiger ist das Vorkommen von Elementen aus der Mamalienwelt der Steppen z. B. *Spalax typhlus* und *Cricetus cricetus L.*

Was die Verbreitungsgrenzen einiger Arten betrifft die Weissrussland durchkreuzen, so wollen wir fürs Erste nur folgende bezeichnen: die südliche Grenze des Moorschneehuhnes—*Lagopus lagopus,* beginnt westlich ungefähr auf dem Breitegrade von Slutzk (nicht vom Niemen wie man es bis jetzt annahm) und zieht sich östlich über Bobruisk und weiter nach Dschurawitschi (Mogilew Bezirk); von dort geht sie nördlicher, östlich vom Dnieper, auf Mogilew zu und dann über das Gebiet Rjasna—Mstislawl ins Gouvernement Smolensk. Die südliche Grenze *Turdus iliacus L.* ziehr sich über das Gebiet Borissow—Orschanski und weiter östlich schon im Bereich des Gouvernement Smolenski. Der Merlinfalke—*Falco columbarius alaunicus Fediuschin* ist bis jetzt als nistender Vogel nur nördlich der Linie Minsk-Klimowitschi gefunden worden. *Lanius minor* findet man südlicher der Linie die im Westen durch das Gebiet Ouschatscheski, den Bezirk Orschanski und im Gouvernement Smolensk in den Grenzen des Bezirkes Roslawlsk, im Osten der Republik, sich zieht. Die nördliche Grenzlinie der *Emberiza hortulana L.* durchschneidet Weissrussland indem sie ihre Anfang in den Gebieten Be϶omlski und Lepelski im Westen hat und sich dann im Bezirk Roslawlski das Gouvernement Smolensk verliert. *Remiza pendulina* ist in den östlichen Gebieten nordlicher des Flusses Sosch nicht bemerkt worden. Die nördliche Grenze der *Gerstenammer* kann ungefähr im Bezirk Gomel gezogen werden, jedenfalls nicht nördlicher, eher südlicher. Nördlicher des Bezirkes Retschitzki hat man keine nistende Abendfalken—*Erythropus vespertinus* gefunden; ebendaselbst verliert man die nördliche Verbreitungsgrenze in Weissrussland der *Nachtigall-Rohrsänger-Locustella luscinioiodes.*

Wollen wir nun zur Zahlenanalyse der Ornithofauna des hier beschriebenen östlichen Weissrusslands übergehen, so können wir behaupten, dass die Zahl der hier nistenden Formen um ganze 10 Arten grösser ist als im nördlichen Weissrussland und fast 190 Arten zählt. Aus diesen gehören ungefähr 23 Arten zu den Vertretern der Taiga, fast um ein Halbes weniger als die Zahl der Vögel derselben Kategorie in der Witebstschina was man $^{0}/_{0}$ mässig mit den Zahlen $12^{0}/_{0}$ u. $21^{0}/_{0}$ bezeichnen kann. Dagegen findet mann hier nicht weniger als 37 südliche Arten, was $20^{0}/_{0}-9{,}5^{0}/_{0}$ der Witebstschina (nördlicher Teil Weissrusslands) ergiebt.

Aus Allem hier gesagten geht hervor, dass man die gesammte Ornithofauna Weissrusslands nicht als ein Ganzes betrachten kann, welches man in

die Grenzen einen kleinen zoogeographischen Einheit drängen kann und dass sie auch nicht in einem zoologischen Teil *(Pagus* nach Menzbier*)* einzupassen ist. Es ist notwendig eine Einteilung festzustellen, wenigstens in einen nördlichen und einen südlichen T.il, was übrigens auch selbst Professor Menzbier andeutete bei der Charakteristik seines Alauno-lithauischen ornithogeographischen Bezirkes.

Eine ganze Reihe südlicher Arten aus dem Reihe der Wirbeltiere, deren normaler Wohnort Polesje ist, z B. *Emys orbicularis, Lacerta viridis, Coronella austriaca, Hyla arborea, Nyctalus leissleri,* zind wed.r in den nordlichen als auch in den mitleren Bezirken Weissrusslands zu finden, was noch stärker die Notwendigkeit einer genaueren zoogeographischen Einteilung dieser sehr verschiedenartigen Tierwelt betont. Die Forschungen der deutschen Ornithologen (Zedlitz, Schachtleben, Reichenow, Grassmann, Dennler, Gengler, Rüdiger und and.) in den westlichen Weisssrussischen Provinzen (fr. Gouvernement Grodno und Pinski Sümpfe) deuten ihrerseits auf eine Reihe neuer origineller Züge in ihrer Ornithofauna die eine mehr westeuropäischen Carakter zeigt, der seinen Ausdruck in dem vorhanden sein solcher Arten wie *Buteo buteo, Certhia brachydactyla, Regulus ignicapillus, Milvus milvus, Serinus canarius serinus* und and. findet, da diese in den Grenzen des jetzigen Weissrusslands nicht vorkommen.

Dieser Umstand wird in der Zukunft von grossen Nutzen sein beim fixiren einer richtigen westlichen Grenze zoologischer Gebiete (oder auch kleinerer Einteilungen), ausser der schon früher erwähnten Teilung in Norden und Süden.

С. А. Гусева

Исследования над Tardigrada

(из кабинета биологии и зоологии беспозвоночных Б.Г.У.)

Среди органического мира Белоруссии весьма интересной и своеобразной является микроскопическая фауна ее болот и мхов. Несмотря на ряд исследований в этой области многое еще остается мало известным.

Приступив весной 1925 г. к изучению беспозвоночных г. Минска и его окрестностей, я не могла не обратить внимания на эту фауну, среди которой очень распространенной является группа микроскопических организмов, причисляемая к Arthropoda, а именно, Tardigrada, называмые тихоходками, а также „бородавконогими"—Colepoda, Bärthierchen немецких авторов.

В Белоруссии из сравнительно немногих родов и видов Tardigrada самым распространенным является Macrobiotus lacustris, который и стал об'ектом моих исследований. Средняя величина Macrobiotus lacustris из проб минского мха равна 240—570 μ. Среди мхов, взятых с камней Macrobiotus lacustris, обычно же встречается, во мхах с деревьев попадались только единичные экземпляры, но за то, положительно, в каждой пробе мха, взятого с крыш, он встречался в очень большом количестве.

Что касается техники исследования, то Tardigrada являются об'ектом чрезвычайно трудным как для фиксации, так и для изготовления цельных препаратов, особенно серий разрезов.

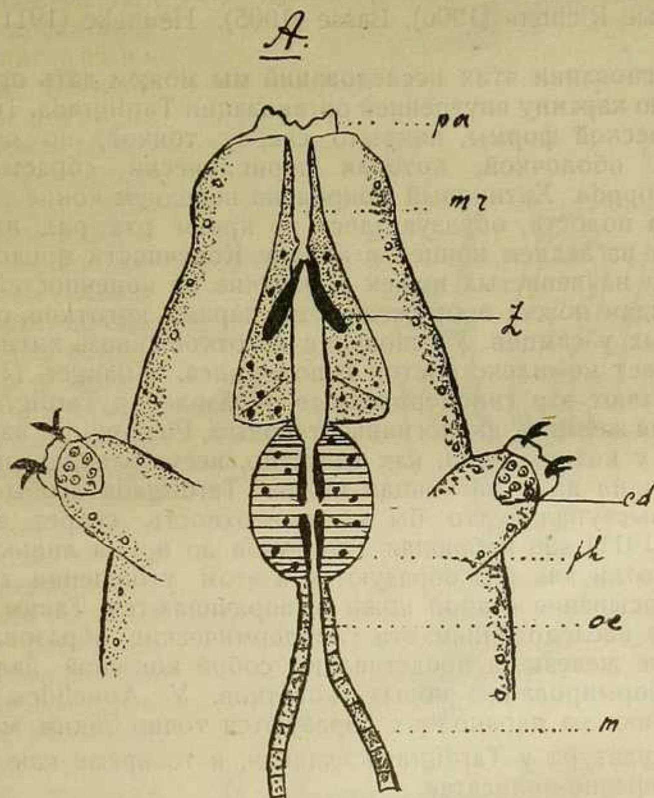
Трудности фиксации и окраски об'ясняются присутствием у Tardigrada плотного хитинового покрова, который препятствует проникновению фиксаторов, так что при проведении через спирты и xylol для заливки в параффин об'ект сильно ежится. Мною был испробован, но без большого успеха, целый ряд фиксирующих жидкостей, „Senkmetode" —„метод насечки" и разрезания живых Tardigrada перед фиксацией, пока, наконец, я не остановилась на жидкости Carnoy[1]), которая и дала хорошие результаты.

Tardigrada обычно причисляются к членистоногим—Arthropoda, однако они во многом уклоняются от общей схемы этого типа, хотя бы по строению своих конечностей, которые в противоположность всем членистоногим вовсе не являются членистыми. Уже одно это обстоятельство делает эту группу организмов весьма интересной в сравнительно-анатомическом отношении.

Тип Arthropoda, как известно, самый многочисленный (количество видов типа Arthropoda равно около 70% всех известных видов животных), является все же резко ограниченным по отношению к другим типам, подобно, напр., позвоночным. Что же касается до взаимоотношений отдельных классов этого столь богатого видами типа, то он не показывает полного единства, как напр., представители типа Echi

[1]) 3 ч. Chloroforma
6 ч. Alcoh. abs.
1 ч. Acid. acetic. glac.

nodermata. В нем кроме основных четырех групп: Crustacea, Arachnoidea, Myriapoda и Insecta имеется еще ряд мелких групп, а именно: Trilobitae, Pantopoda, Limulus и Gigantostraca, Peripatus (Protracheata), Linguatulidae и наконец Tardigrada. Последние были известны еще с XVIII ст.; первые исследования над ними были сделаны O. F. Müller'ом



A. Анатомия Tardigrada

pa — ротовые сосочки

mr — ротовая полость

Z — зубы

cd — коксальные железы

ph — глотка

oe — пищевод

m — желудок

Рис. 1

в 1785 г., который на основании внешних признаков,—наличию 4-х пар ножек как у клещей—поставил Tardigrada в системе в группе Arachnoidea рядом с клещами. Долгое время Tardigrada останавливали на себе внимание биологов только своей способностью впадать в анабиоз от высыхания; кроме того на живых об'ектах Doyère (1840) наблюдал

впервые хорошо нервные окончания; этим и исчерпывается все знакомство с ними до самого последнего времени.

Что касается до анатомического и гистологического исследования Tardigrada, то ими стали заниматься сравнительно недавно.

Кроме старых работ Doyère (1840), Dujardin (1851), Plate (1889), Kennel (1892), Dujardin (1896), Erlanger (1895) и Lance (1896), имеются более новые Richters (1906), Basse (1905), Henneke (1911) и W. Wenck (1914).

На основании этих исследований мы можем дать приблизительно следующую картину внутренней организации Tardigrada. Тело Tardigrada цилиндрической формы, покрыто сверху тонкой, но очень плотной хитиновой оболочкой, которая периодически сбрасывается как у всех Arthropoda. Хитиновый покров на переднем конце заворачивается в ротовую полость, образуя здесь по краям рта ряд выступов—„сосочков", а на заднем конце—в клоаку. Конечности представлены в виде 4-х пар нечленистых ножек в отличие от конечностей всех Arthropoda. Каждая ножка вооружена 2-мя парами коготков, особенно сильно развитых у самцов. У основания коготков сквозь хитиновый покров просвечивает комплекс клеток гиподермиса. Erlanger (1895) и Basse (1906) считают эти гиподермальные образования Tardigrada за т. наз. коксальные железки, аналогичные таковым, Phalangidae из Arachnoidea и Peripatus, у которых они, как известно, несут экскреторные функции. Basse находил даже на концах ножек Tardirgada особые поры, через которые выступал будто бы на поверхность секрет этих железок. Henneke (1911) же, наблюдая Tardigrada во время линьки, нашел, что новые коготки как раз образуются в этом утолщении гиподермиса и после сбрасывания старой кожи выворачиваются. Таким образом, согласно его исследованиям, эти гиподермические образования не есть коксальные железы, а представляют собой когтевой валик, где происходит формирование новых коготков. У Annelides, между прочим, щетинки на параподиях образуются точно таким же способом.

Мускулатура у Tardigrada гладкая, в то время как у всех Arthropoda поперечно-полосатая.

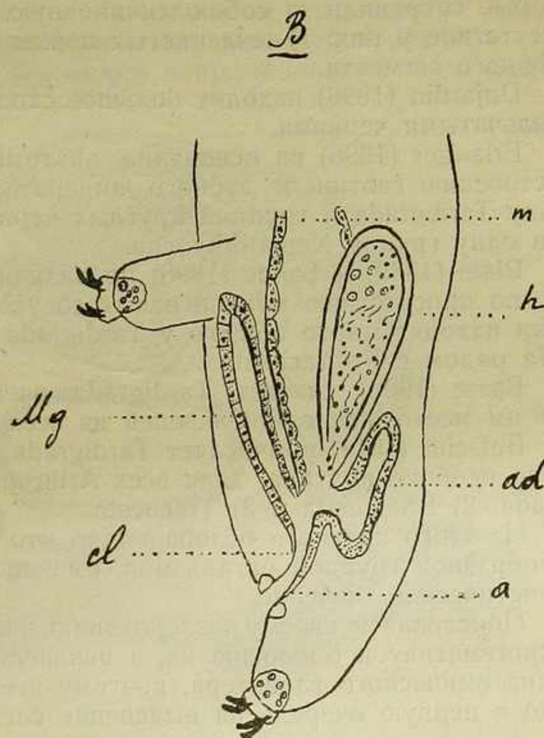
Нервная система состоит из брюшной цепочки из 4-х ганглиев с парными камиссурами и одним церебральным ганглием. Из органов чувств у Tardigrada имеется пара пигментных глазков.

Относительно полости тела у Tardigrada в литературе нет никаких указаний. Органов дыхания нет, что касается до кровеносной системы, то в тканях и между отдельными органами можно найти много бесцветных кровяных одноядерных клеток, содержащих в протоплазме зерна из запасных питательных веществ.

Пищеварительный канал Tardigrada (Рис. 1) состоит из ротовой, резко ограниченной как у нематод, бокаловидной полости с двумя стилето подобными подвижными зубами, состоящими из уплотненного хитина с известковыми отложениями, из пищевода с глоточным утолщением шаровидной формы. По бокам в глотку открывается пара сильно развитых слюнных желез. Пищевод, расширяясь, переходит в обширный мешковидный желудок, стенка которого состоит из крупных кубических клеток, у взрослых форм от пищи окрашенных в темно желтый цвет, а у молодых совершенно прозрачных. Желудок переходит в прямую кишку, открывающуюся в клоаку. Задний проход расположен терминально между последней парой ножек. В месте перехода желудка в прямую кишку в нее впадают с брюшной стороны два слепых трубчатых сосуда, принимаемых исследователями за орга-

ны выделения—за мальпигиевы сосуды, аналогичные таковым Tracheata (рис. 2).

В месте впадения мальпигиевых сосудов со спинной стороны впадает в прямую кишку т. наз добавочная „ректальная“ железа, неизвестной функции. Протоки половых желез открываются в клоаку. Tardigrada раздельно полы.



В. Анатомия Tardigrada

m — желудок
Mg — Мальпигиевы сосуды
h — семенник
ad — добавочная „ректальная“ железа
cl — клоака
a — анальное отверстие

Рис. 2

Гонады представляют собой непарную спинную железу. Семенник очень мал, яичник же увеличивается по мере роста яиц и может покрывать собою весь желудок. Самка откладывает обычно яйца в период линьки в сброшенную хитиновую кожицу. Мне удалось наблюдать оплодотворение самцом самки, самец впрыскивает сперму в анальное отверстие сбрасываемой самкой кожицы, куда она уже отложила 4 яйца. Яйца оплодотворяются вне материнского организма. Через две недели из оплодотворенных яиц уже вылупились молодые Tardigrada, по форме ничем не отличающиеся от взрослых. Яйца претерпевают полное и равномерное дробление, развитие прямое без метаморфоза.

В весенние месяцы самцы и самки встречаются в равных количествах, причем самцы мельче самок. Rywosch u Henneke (1911) нашли, что самцы в конце лета исчезают, в то время как самки продолжают откладывать неоплодотворенные—партеногенетические яйца. Henneke (1911) здесь усматривает явление сходное с Rotatoria и с тлями—Aphidae, у которых имеется чередование поколений партеногенетического и полового, но эти факты еще нуждаются в подтверждении.

Из этого краткого обзора видно, что организация Tardigrada в ее главных чертах, насколько она известна, допускает весьма различные толкования о положении их в системе.

Старое мнение Muller'а о том, что Tardigrada относятся к клещам, т. е. к Arachnoidea, имеет для нас только историческое значение, но,

тем не менее, оно повторяется во многих новых учебниках зоологии, как напр.: Гертвига (1918), Boas (1922), Claus—Grobben (1917), Холодковского (1917) и др.

Dujardin (1851) и Doyère (1840) находят у Tardigrada сходство с Rotatoria и об'единяют их в одну группу червей „Cystolydae“.

Kennel (1892) считает Tardigrada за редуцировавшихся Arthropoda, которые сохранили за собою личиночную стадию, чем и об'ясняется присутствие у них: 1) нечленистых ножек и 2) слабо обособившегося головного сегмента.

Dujardin (1896) находит большое сходство и родство у Tardigrada с кольчатыми червями.

Erlanger (1896) на основании анатомических данных, а именно, по строению глотки и зубного аппарата, находит близкое родство между Tardigrada и группой круглых червей Nematodes и об'единяет их в одну группу Nematorhyncha.

Plate (1889) и Lance (1896) по наличию 4-х пар нечленистых ножек, по присутствию мальпигиевых сосудов и брюшной нервной цепочки находят много общего у Tardigrada с Peripatus и ставят Tardigrada рядом с Protracheata.

Basse (1906) считает Tardigrada очень примитивной группой и дает им место, как самой низшей из всех групп Arthropoda.

Butschli (1914) причисляет Tardigrada к Arthropoda в виде совершенно особого подтипа, деля всех Arthropoda на три подтипа: 1) Tardigrada, 2) Branchiata и 3) Tracheata.

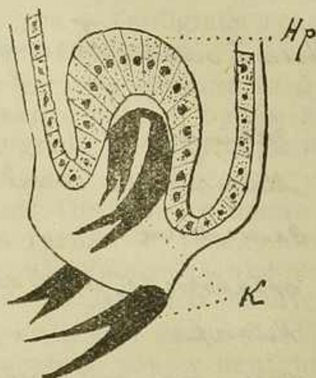
Из этого краткого обзора видно, что Tardigrada являются весьма своеобразной группой организмов, имеющей может быть большое филогенетическое значение.

Приступая к своему исследованию над Tardigrada, я имела в виду не систематику и биологию их, а исключительно вопросы сравнительно анатомического характера, поэтому все внимание было обращено мною в первую очередь на выяснение следующих пунктов:

1) Коксальные железы—их действительное строение.

2) Строение мускулатуры.

3) Полость тела.



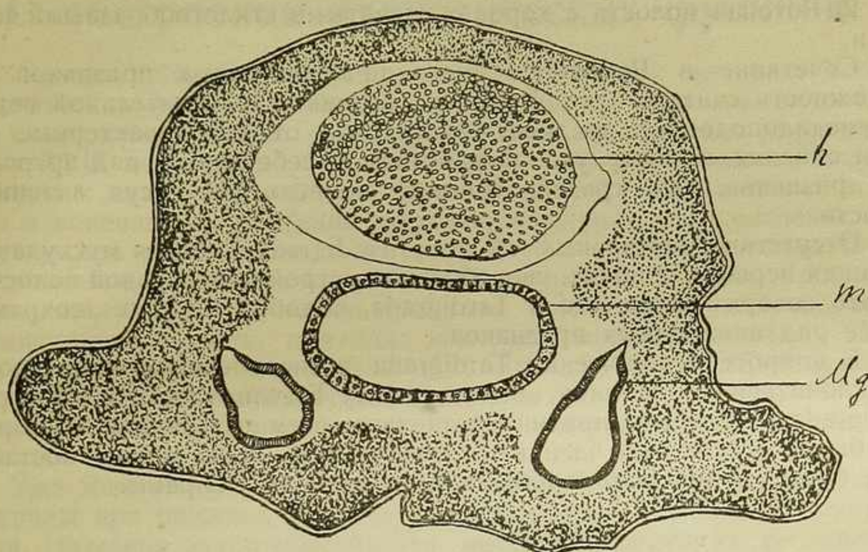
Конечность линяющей Tardigrada
Hp - утолщение эпидермиса
K - коготки

Рис. 3

Исследования над коксальными железами были произведены как на разрезах, так и по методу кормления живых Tardigrada красками: кармином, фуксином, Methylen—blau и др. Последний метод не дал положительных результатов—краска в коксальные железы ни разу не проникала, что говорит за то, что эти гиподермические образования, находящиеся на концах ножек, не несут экскреторной функции, как это наблюдается у Phalangidae и у Peripatus. Изучение разрезов ножек подтвердило

мнение Henneke (1911) о том, что эти образования представляют собою типичные когтевые валики, где происходит формирование новых коготков при линьке. (Рис. 3).

Детальное микроскопическое исследование разрезов (Рис. 4) не дало также никаких указаний на присутствие у Tardigrada в полости тела выстилки из перитонеального эпителия или присутствие мезентериев, следовательно у Tardigrada мы имеем дело или с первичной полостью тела, столь характерной для всех Nematodes, или с таким изменением целома, какое мы видим напр., у высших насекомых.



Поперечный разрез через тело Tardigrada

h - семенник

m - желудок

Md - мальпигиевы сосуды.

Рис. 4

Мускулатура у Tardigrada по моим исследованиям гладкая. Даже при самых сильных увеличениях мускульная ткань лишена какой бы то ни было поперечной штриховки. Исследования над нервной системой и ротовой полостью вполне подтвердили все данные прежних авторов.

Если мы обратимся теперь к вопросу о положении Tardigrada в системе, то из всех групп Arthropoda, упомянутых выше, ближе всего к ним мы должны поставить Peripatus, с которым их об'единяют в одну группу—Protracheata такие исследователи, как Plate (1889) и Lance (1896).

Как известно Peripatus, внутренняя организация которого мною была изучена в общих чертах, соединяет в себя ряд аннелидных и артроподных признаков.

Аннелидные признаки у Peripatus следующие:

1) Сегментарная выделительная система—типичные нефридии.

2) Коксальные железы—аналогичные щетинковым железам Annelida.

3) Кожно-мускульный мешок.

4) Брюшная нервная цепочка.

Артроподные признаки Peripatus'а следующие:

1) Трахейная дыхательная система.

2) Ротовая полость с хорошо развитыми стилетообразными челюстями.

Сочетание в Peripatus'е аннелидо-артроподных признаков дает возможность считать, что Peripatus возник самостоятельной ветвью от аннелидоподобных предков, унаследовав от них характерные признаки аннелид, а затем уже выработали в себе целый ряд артроподных признаков, как: трахеи, спинной кровеносный сосуд, антенны и челюсти.

Отсутствие коксальных желез у Tardigrada, гладкая мускулатура, брюшная нервная цепочка, своеобразное устройство ротовой полости—все это говорит за то, что и Tardigrada, подобно Peripatus, сохранили в себе ряд аннелидных признаков.

В вопросе о положении Tardigrada в системе мы должны поэтому склониться ко взгляду, высказанному Бючли (1914), по которому Tardigrada могут быть противопоставлены всем остальным Arthropoda, хотя бы по отсутствию членистых конечностей, и их можно поставить даже ближе к аннелидоподобным предкам, чем Peripatus.

ЛИТЕРАТУРА:

Plate. 1889. Beiträge zur Naturgeschichte der Tardigraden. Zool. Jahrb. Bd. 3.

Kennel. 1892. Die Abstammung der Tardigraden. Sitz. Berichte Nat. Ges. Dorpat. Bd. 9.

Erlanger. 1895. Beiträge zur Morphologie der Tardigraden. Morpholog. Jahrb. Bd. 22.

Lance. 1896. Contribution a l'étude anatomique et biologique des Tardigrades (Genre Mac. Schultze Thèse. Paris).

Lang A. 1900. Traité d'Anatomie comparée t. I

Basse. 1906. Beiträge zur kenntnis des Baues der Tardigraden, in Z. wiss. Zool. Band. 80.

Richters. 1906. Wiederbelebungsversuche mit Tardigraden.

Richters. 1909. Tardigraden-Studien. Bericht Natur. Ges.

Korschelt u. Heider. 1909. Lehrbuch der vergl. Entwicklungsgeschichte der Wirbellosen Tiere Allg. Teil.

Henneke. 1911. Beiträge zur Kenntnis der Biologie und Anatomie der Tardigraden.

Wenck W. 1914. Entwicklungsgeschichtliche Untersuchungen an Tardigraden Zool. Jahrbüch. Bd. 37.

О. Бючли. 1917 г. Лекции по сравнит. анатомии, т. I.

Claus-Grobben. 1917. Lehrbuch der Zoologie.

Boas I. 1922. Lehrbuch der Zoologie.

ЛАБОРАТОРНАЯ ПРАКТИКА. ОБЗОРЫ

В. Л. Левкович

О построении эллиптических функций

Сначала привожу краткий исторический очерк вопроса. Теория эллиптических функций появилась в результате изучения эллиптических интегралов. Вопрос об эллиптических интегралах относится к началу XVIII века. Давно было замечено, что интегральное исчисление приводит к новым трансцендентным всякий раз, как интеграл не берется в конечном виде. Таким образом, интегральное исчисление разделяет участь всех обратных действий. В самом деле вычитание, обратное сложению, привело к числам отрицательным; деление, обратное умножению, привело к числам дробным; извлечение корня, обратное возвышению в степень, приводит к числам иррациональным. Так и интегральное исчисление, будучи обратным дифференциальному, приводит к новым трансцендентным функциям. К числу наиболее замечательных трансцендентных, вводимых интегральным исчислением, относятся эллиптические функции.

Уже Якову Бернулли пришлось натолкнуться на эллиптические интегралы при решении вопроса, относящегося к колебаниям упругих линий. Название эллиптических эти интегралы получили со времени Маклорена, который получил эти интегралы при решении задачи о спрямлении дуги эллипса.

В начале XVIII века итальянский математик Фаньяно открыл теорему, относящуюся к сложению эллиптических интегралов. Обобщением теоремы Фаньяно является найденная Эйлером так называемая теорема сложения эллиптических интегралов. Эта теорема была открыта Эйлером при решении задачи относительно притяжения точки двумя неподвижными центрами. Эйлер сразу понял, какое важное значение имеет эта теорема для эллиптических интегралов. Теорема эта помещена в 1-ом томе его трактата: „Institutiones calculi integralis". Среди последующих математиков, занимавшихся эллиптическими интегралами, особого внимания заслуживает Лежандр. Он в продолжение 40 лет занимался исследованием эллиптических интегралов. В 1825 году Лежандр напечатал большой трактат, посвященный этим интегралам, под названием: „Traitè des fonctions elliptiques".

Эллиптическим интегралом называется интеграл вида

$$\int f\left(x, \sqrt{P(x)}\right) dx,$$

где f содержит рационально независимую переменную и корень квадратный из $P(x)$—полинома 3-ей или 4-ой степени, не имеющего кратных корней. Если бы полином $P(x)$ имел кратные корни, то некоторые множители вышли бы из-под знака корня, и мы имели бы элементарный случай. Случай 3-ей степени подрадикального полинома не отличается от случая 4-ой степени, так как легко перейти от полинома 4-ой степени к полиному 3-ей степени. Для этого достаточно ввести

подстановку $x = a + \frac{1}{y}$, где „а“ произвольно. Тогда, применяя строку Тэйлора, получим:

$$P(x) = P\left(a + \frac{1}{y}\right) = P(a) + \frac{P^{I}(a)}{1}\cdot\frac{1}{y} + \frac{P^{II}(a)}{1.2}\cdot\frac{1}{y^2} + \frac{P^{III}(a)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{y^3} + \frac{P^{IV}(a)}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{y^4}.$$

Поэтому:

$$\sqrt{P(x)} = \frac{1}{y^2}\sqrt{P(a)y^4 + P^{I}(a)y^3 + \frac{P^{II}(a)y^2}{1.2} + \frac{P^{III}(a)y}{1.2.3.} + \frac{P^{IV}(a)}{1.2.3.4}}.$$

Возьмем за „a“ один из корней полинома $P(x)$; тогда $P(a) = 0$, и под корнем получится полином 3-ей степени.

Эллиптических интегралов, как очевидно, бесчисленное множество. Возникает вопрос, нельзя ли, не рассматривая всех таких интегралов, ограничиться рассмотрением лишь некоторых из них. Вопрос этот разрешил Лежандр в упомянутом сочинении. Тут он показал, что рассмотрение всех эллиптических интегралов сводится к рассмотрению таких трех простейших:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad \int_0^x \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

где „a“ не есть корень подрадикального полинома. Лежандр назвал эти интегралы соответственно интегралами 1-го, 2-го и 3-его вида. Потом оказалось, что простейший из этих интегралов, т.-е. интеграл 1-го вида, обладает наиболее важными свойствами.

Как Лежандр, так и его предшественники занимались только эллиптическими интегралами; перехода от эллиптических интегралов к эллиптическим функциям они не сделали. Теория эллиптических функций начинается лишь со времени работ Якоби и Абеля; последний воспользовался собранным Лежандром материалом об эллиптических интегралах, на котором испробовал свои превосходные способности. К открытию эллиптических функций Абеля привели аналогии с тригонометрическими функциями. Абелю пришло на мысль по аналогии с тригонометрическими функциями рассматривать функции, получившиеся от обращения эллиптического интеграла 1-го вида. Это будет понятно, если сопоставить два интеграла: эллиптический интеграл 1-го вида:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

и известный интеграл.

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsinx.$$

Мы видим, что 1-ый интеграл, по мере приближения „κ“ к нулю, будет приближаться ко второму. Но из тригонометрии известно, что больший интерес представляет не функция

$$u = arcsinx,$$

а обратная ей

$$x = sin u,$$

которая получается от обращения 2-го интеграла. Исследовать ли „x", как функцию от „u", или наоборот, в сущности все равно. Но, очевидно, удобнее и проще рассматривать обратную функцию, т. е. $sin u$, как однозначную, чем многозначную $arcsin x$. Эти соображения и навели Абеля и Якоби на мысль изучать функции, обратные интегралу:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}.$$

Тогда верхний предел интеграла, как функция самого интеграла, будет эллиптическая функция, которую обозначают:

$$x = sn u.$$

Это не только аналогия, но и обобщение *sinus—a*. Вместе с нею вводят другие эллиптические функции, зависящие от $sn u$, как-то:

$$Cn u = \sqrt{1-x^2}, \quad dn u = \sqrt{1-k^2 x^2}.$$

Функции $sn u$, $cn u$, $dn u$, зависящие от полинома 4-ой степени, носят название Якобиевских.

Если взять в эллиптическом интеграле $k = o$, то

$$sn u, \; cn u, \; dn u$$

обратятся в

$$sin u, \; cos u, \; 1.$$

Якоби ввел такие обозначения.

Если ввести новую переменную φ при помощи равенства,

$$sin \varphi = x,$$

то получим

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sn^2 \varphi}}.$$

Функцию, обратную этому интегралу, Якоби назвал амплитудой и обозначает так:

$$\varphi = am u.$$

Тогда получим:

$$X = Sin am u, \quad \sqrt{1-x^2} = Cos am u, \quad \sqrt{1-k^2 x^2} = \triangle am u.$$

Занимаясь изучением эллиптических функций, Абель и Якоби открыли их двоякую периодичность; это открытие принадлежит к числу важнейших открытий XIX века в математике.

Абель и Якоби в своих работах установили главнейшие свойства эллиптических функций, но изложение оставляло желать лучшего с точки зрения теории функций. Это об'ясняется тем, что еще не получили распространения работы Коши по теории аналитических функций. И только, начиная с Лиувиля, стали применять общую теорию функций при изложении теории эллиптических функций.

Абель и Якоби рассматривали лишь полиномы 4-й степени. Начиная с Вейерштрасса вводят в рассмотрение и полиномы 3-ей степени. Для подрадикального полинома Эрмит нашел такую каноническую форму: $P(x) = 4x^3 - g^2 x - g_3$.

Эта форма была принята Вейерштрассом в его лекциях. Эллиптическая функция, обратная эллиптическому интегралу

$$u=\int_{\infty}^{x}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}},$$

обозначается так:

$$x=p(u)$$

и носит название Вейерштрассовской. В последнее время Вейерштрассовским функциям отдают предпочтение, как более простым в некоторых отношениях.

В настоящее время при изложении теории эллиптических функций чаще всего поступают так: сначала строятся эллиптические функции на основании их свойств, а потом уже устанавливается их связь с эллиптическими интегралами.

Приступая к построению эллиптических функций, прежде всего будем основываться на основном их свойстве—двоякой периодичности.

Пусть функция имеет два основных периода: 2ω и $2\omega_1$, т. е.

$$\text{пусть } f\,(x+2\omega)=f\,(x),$$
$$f\,(x+2\omega_1)=f\,(x),$$

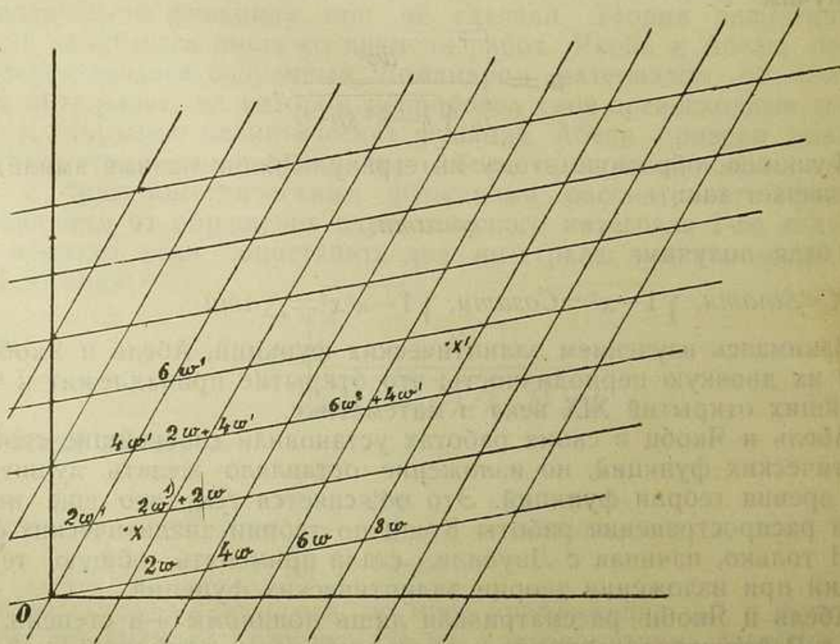
при чем 2ω и $2\omega_1$ не являются кратностями некоторого 3-го периода.

Тогда все числа:

$$2m\omega+2m^1\omega^1,$$

где m и m^1 произвольные целые числа, будут также периодами функции; значит

$$f\,(x+2m\omega+2m^1\omega^1)=f\,(x)$$



Якоби показал, что отношение основных периодов эллиптических функций есть число мнимое. В виду этого свойства двойная периодичность имеет следующую простую геометрическую интерпретацию.

Пусть 2ω и $2\omega^1$—периоды эллиптической функции $f(x)$. Проведем из начала координат векторы 2ω и $2\omega^1$, которые не лежат на одной прямой, так как отношение $\frac{2\omega^1}{2\omega}$—число мнимое. Построим на них параллелограмм. Будем проводить параллельные прямые так, чтобы в результате их пересечения вся плоскость разбилась на равные параллелограммы. Тогда точка 1) изобразит число $2\omega+2\omega_1$, точка 2)—число $6\omega+4\omega^1$ и т. д.

Ясно, что точки пересечения этих двух систем прямых изобразят все числа вида $2m\omega+2m^1\omega^1$. Точки параллелограммов, которые при параллельном перенесении получаются из одной и той же точки основного параллелограмма, называются соответственными. Легко видеть, что если точки x и x^1 суть соответственные точки, то справедливо равенство:

$$x^1=x+2m\omega+2m^1\omega^1$$

Числа x и x^1—комплексные числа, аффиксами их служат точки x и x_1. На основании двоякой периодичности функции $f(x)$ выводим заключение, что в соответственных точках функция $f(x)$ имеет одинаковые значения. В самом деле

$$f(x^1)=f(x+2m\omega+2m^1\omega^1)=f(x).$$

Отсюда следует, что изучение функции $f(x)$ на всей плоскости приводится к изучению этой функции внутри одного из параллелограммов, называемых параллелограммами периодов. Если периоды 2ω и $2\omega^1$ основные, то и параллелограмм, построенный на векторах 2ω и $2\omega^1$, носит название основного.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые термины. Если для значения $z=z_0$ функция $f(z)$ обращается в бесконечность, то точка z_0 называется полюсом функции $f(z)$. Положим, что $f(z)$ в смежности с z_0 разлагается в такой ряд

$$f(z)=\frac{A_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{A_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_{-1}}{z-z_0}+A_0+A_1(z-z_0)+\ldots$$

В этом случае дробная часть функции носит название главной части; точка z_0 называется полюсом порядка „m“ функции $f(z)$. A_{-1}, коэффициент при $\frac{1}{z-z_0}$, называется вычетом функции в полюсе $z=z_0$. Функция, имеющая полюсы, называется дробною.

Теперь уже можно сказать, что эллиптическими функциями называются дробные функции с двумя основными периодами, отношение которых мнимое.

Изучение эллиптических функций внутри основного параллелограмма привело Лиувилля к открытию ряда их свойств, из которых назовем следующие:

1) Сумма вычетов эллиптической функции по отношению к полюсам, лежащим в основном параллелограмме, равна нулю.

2) Число корней эллиптической функции в основном параллелограмме равно числу полюсов.

Из 1-го свойства вытекает такое следствие: не существует эллиптической функции, имеющей только один простой полюс в основном параллелограмме. В самом деле, вычет, соответствующий этому полюсу,

равнялся бы нулю, т.-е. полюс совсем бы не существовал. Сумму порядков полюсов эллиптической функции в основном параллелограмме называют порядком функции. Теперь приведенное следствие можно высказать так: не существует эллиптической функции 1-го порядка. Значит простейшими эллиптическими функциями будут функции 2-го порядка, одну из которых постараемся построить.

Для этого воспользуемся теоремой Вейерштрасса, которая дает возможность построить целую трансцендентную функцию, если известны ее корни и их кратность. Теорема эта состоит в следующем.

Пусть корни функции суть точки:

$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_k,\ \ldots$

где $|a_1| \leq |a_2| \leq \ldots \leq |a_k| \leq \ldots$

Пусть нуль не есть корень функции $\Phi(z)$.

Далее пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^r}$$

сходится при некотором определенном r; пусть корни функции $\Phi(z)$ суть первого порядка. Тогда целая трансцендентная функция $\Phi(z)$ представится в виде:

$$\Phi(z)=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{z^2}{2a_n^2}+\ldots+\frac{z^{r-1}}{(r-1)a_n^{r-1}}}$$

Приступая к построению эллиптической функции 2-го порядка, построим предварительно целую трансцендентную функцию, имеющую корни в точках

$2m\omega+2m^1\omega^1,$

где отношение $\frac{2\omega}{2\omega^1}$ есть число мнимое. Чтобы воспользоваться теоремой Вейерштрасса, надо убедиться в сходимости ряда

$$\sum{}^{1}\frac{1}{(2m\omega+2m^1\omega^1)^r}$$

Знак[1] указывает, что суммирование распространяется на все возможные совокупности целых значений m и m', за исключением m=m'=o.

Легко доказать, что этот ряд сходящийся, и притом абсолютно сходящийся. Положив

$w=2m\omega+2m'\omega',$

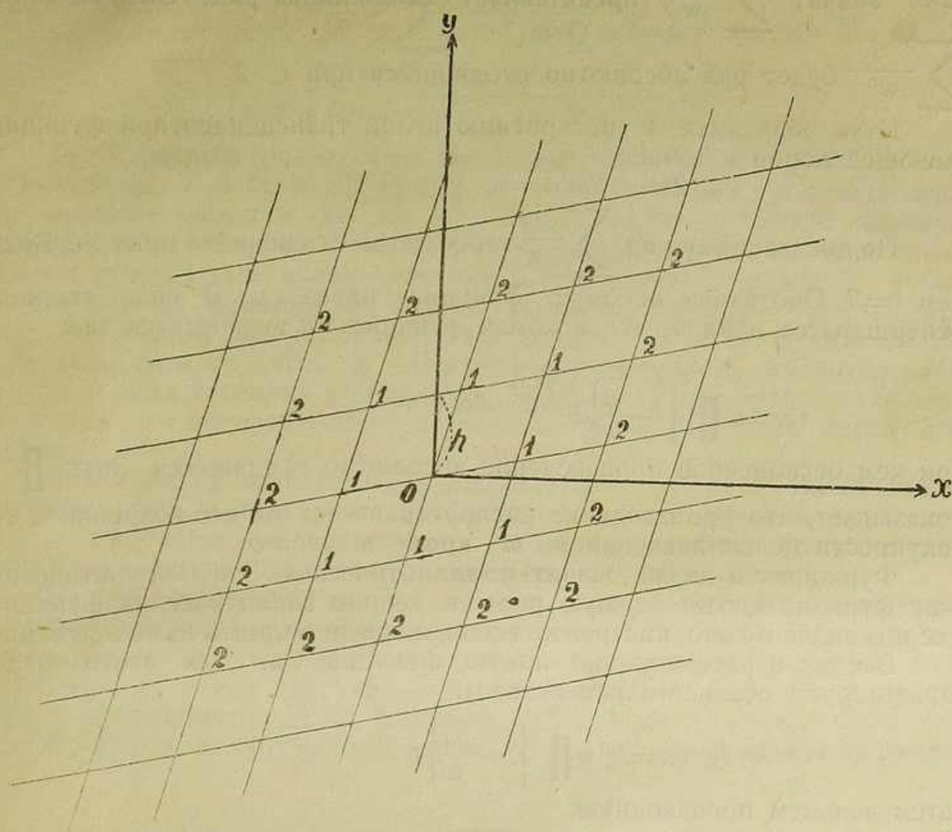
представим упомянутый ряд в виде

$$\sum{}'\frac{1}{w^r}$$

Для доказательства его сходимости обратимся к ряду

$$\sum{}'\frac{1}{|w|^r}$$

Разобьем члены этого ряда на группы таким образом. Разбиваем плоскость на параллелограммы, вершины которых изобразят точки w.



В первую группу возьмем члены, соответствующие тем точкам w, которые получаются при $m, m' = 0, 1$; таких точек будет 8; на чертеже они обозначены цифрою 1. Обозначим через h расстояние от начала 0 до стороны того параллелограмма, на контуре которого лежат точки 1. Ко второй группе отнесем члены, соответствующие тем точкам w, которые получаются при $m, m' = 0, 1, 2$; при этом исключаются точки, взятые раньше. Таких точек будет 16; они обозначены на чертеже цифрою 2. Расстояние от точк 0 до стороны параллелограмма, на контуре которого лежат эти точки, равно $2h$. Так же найдем, что членов 3-ей группы будет 24, расстояние $3h$ и т. д.

Легко видеть, что каждый член первой группы не больше $\frac{1}{h^r}$, а их сумма меньше $\frac{8}{h^r}$; точно также сумма членов 2-й группы меньше $\frac{16}{(2h)^r} = \frac{8}{2^{r-1}h^r}$, сумма членов 3-й группы меньше $\frac{24}{(3h)^r} = \frac{8}{3^{r-1}h^r}$ и т. д.

Отсюда следует, что

$$\sum{}' \frac{1}{|w|^r} < \frac{8}{h^r}\left(1 + \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{3^{r-1}} + \ldots\right)$$

Но сумма, стоящая в правой части неравенства, конечна при $r>2$; значит $\sum' \frac{1}{|w|^r}$ представляет сходящийся ряд; следовательно $\sum' \frac{1}{w^r}$ будет ряд абсолютно сходящийся при $r>2$.

Итак обратимся к построению целой трансцендентной функции, имеющей корни в точке

$$2m\omega+2m'\omega'=w$$

По доказанному ряд $\sum' \frac{1}{w^r}$ абсолютно сходящийся при $r>2$. Возьмем $r=3$. Обозначим искомую функцию через σu. В силу теоремы Вейерштрасса найдем, что искомая функция σu выражается так:

$$\sigma u=u\prod{}'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{u^2}{2w^2}},$$

при чем бесконечное произведение абсолютно сходящееся. Знак $\prod'$ показывает, что произведение распространяется на все возможные совокупности целых значений m, m', кроме $m=m'=o$.

Функция σu целая, значит не эллиптическая. Эта Вейерштрассовская функция играет важную роль в теории эллиптических функций; с ее помощью можно построить всевозможные эллиптические функции.

Введем в рассмотрение новую функцию ζu. Для этого прологарифмируем обе части равенства [1])

$$lg\,\sigma u=lg\,u\prod{}'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{u^2}{2w^2}},$$

затем возьмем производную:

$$\frac{d}{du}\left(lg\,\sigma u\right)=\zeta u=\frac{1}{u}+\sum{}'\left(\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right).$$

Мы видим, что новая функция ζu дробная, главная ее часть $\frac{1}{u-w}$, вычет$=1$; эта функция не эллиптическая, так как в основном параллелограмме только один простой полюс „w." А уже было раньше сказано, что не может быть эллиптической функции 1-го порядка.

Наконец рассмотрим функцию $p\,u$, определяемую равенством:

$$p\,u=-\zeta' u$$

Продифференцируем выражение для

$$\zeta u=\frac{1}{u}+\sum{}'\left[\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right],$$

получим, что

$$Pu=-\left\{\frac{1}{u}+\sum{}'\left[\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right]\right\}'=\frac{1}{u^2}+\sum{}'\left[\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right]$$

Легко убедиться, что новая функция Pu есть функция эллиптическая. В самом деле функция pu есть функция дробная; ее полюсы лежат в точках w; они двойные; вычеты равны нулю. Значит функция pu 2-го порядка. Чтобы окончательно убедиться в том, что функция pu эллиптическая, надо доказать, что она двоякопериодическая с периодами 2ω, $2\omega'$.

Для этого возьмем разность:

$$P(u+2\omega)-pu=\frac{1}{(u+2\omega)^2}-\frac{1}{u^2}+\sum{}'\left[\frac{1}{(u-2\,(m-1)\,\omega-2m'\omega')^2}-\frac{1}{(u-2m\omega-2m'\omega')}\right]=$$

$$=\sum\left[\frac{1}{(u-2(m-1)\omega-2m'\omega')^2}-\frac{1}{(u-2m\omega-2m'\omega')^2}\right].$$

Тут Σ распространяется на все целые значения m, m', в том числе и нулевые. Разобьем эту сумму на частные суммы, соответствующие членам с одним и тем же m'. Выпишем члены такой частной суммы; увидим, что они попарно уничтожаются; следовательно такая частная сумма равна нулю; поэтому и вся сумма Σ равна 0. Итак, 2ω есть период функции pu. Так же докажем, что и $2\omega'$ есть ее период. Мы видим, что pu есть эллиптическая функция с основными периодами 2ω и $2\omega'$. Это и есть Вейерштрассовская эллиптическая функция, тождественная с функцией, получаемой от обращения Вейерштрассовского эллиптического интеграла, что может быть легко доказано.

При помощи выведенных функций можно цостроить Якобиевские функции, а также эллиптические функции высших порядков.

В заключение следует сказать, что эллиптические функции являются дальнейшим обобщением функций тригонометрических.

Между теми и другими есть много общего: тригонометрические функции однозначны, эллиптические—тоже; тригонометрические функции выражаются в виде бесконечных рядов, расположенных по возрастающим степеням аргумента, эллиптические—в виде бесконечных дробей; тригонометрические функции периодичны и имеют один основной период, эллиптические—тоже, но имеют два основных периода.

В. Л. Левкович

Вычисление по способу Коши, т. е. через интегрирование по контуру, некоторых определенных интегралов от вещественных функций

Применим способ Коши к вычислению определенного интеграла

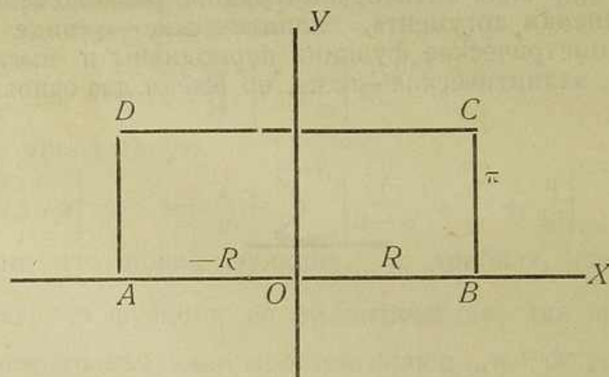
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^{x}}\,dx,$$

если $o \angle a < 1;\ o \angle b < 1$.

Для решения нашей задачи возьмем функцию от комплексного переменного

$$f(z) = \frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}}.$$

Рассмотрим интеграл этой функции вдоль контура прямоугольника $ABCD$, в котором



сторона $CB = \pi$, $0B = R$, $A0 = -R$.

Функция $f(z)$ имеет внутри этого прямоугольника только один полюс в точке $Z = 0$. Вычет, соответствующий полюсу $Z = 0$, равен

$$\frac{e^{ao}-e^{bo}}{e^{o}} = 0.$$

На основании теоремы Коши можем написать:

$$\int_{ABCDA} \frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}}\,dz = \int_{AB} \frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}}\,dz + \int_{BC} \frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}}\,dz + \int_{CD} \frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}}\,dz +$$

$$+ \int_{DA} \frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}}\,dz = 2\pi i . 0 = 0.$$

Заметим теперь, что на отрезке AB переменное Z равно вещественному переменному X, поэтому

$$\frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}}=\frac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^{x}};\ dz=dx. -R\leq x\leq R.$$

Вдоль отрезка BC имеем:

$$Z=R+ti;\ 0\leq t\leq\pi;\ dz=idt;$$

$$\frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}}=\frac{e^{aR+ati}-e^{bR+bti}}{1-e^{R+ti}}$$

Вдоль отрезка CD имеем:

$$Z=X+\pi i; -R\leq x\leq R;\ dz=dx;$$

$$\frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}}=\frac{e^{ax+a\pi i}-e^{bx+b\pi i}}{1-e^{x+\pi i}}=\frac{e^{ax+a\pi i}-e^{bx+b\pi i}}{1+e^{x}}=\frac{\operatorname{cs}a\pi\, e^{ax}-\operatorname{cs}b\pi e^{bx}}{1+e^{x}}+$$

$$+\,i\,\frac{\operatorname{sn}a\pi e^{ax}-\operatorname{sn}b\pi e^{bx}}{1+e^{x}}$$

На основании всего этого можно написать:

$$\int\limits_{ABCDA}\frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}}\,dz=\int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^{x}}\,dx+i\int\limits_{0}^{\pi}\frac{e^{aR+ati}-e^{bR+bti}}{1-e^{R+ti}}\,dt+$$

$$+\int\limits_{R}^{-R}\frac{\operatorname{cs}a\pi e^{ax}-\operatorname{cs}b\pi e^{bx}}{1+e^{x}}\,dx+i\int\limits_{R}^{-R}\frac{\operatorname{sn}a\pi e^{ax}-\operatorname{sn}b\pi e^{bx}}{1+e^{x}}\,dx+$$

$$+\,i\int\limits_{\pi}^{0}\frac{e^{-aR+ati}-e^{-bR+bti}}{1-e^{-R+ti}}\,dt=0.$$

Правая часть равенства равна 0, почему в левой части должны быть равны 0 вещественная и мнимая части в отдельности. Приравниваем 0 вещественную часть

$$\int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^{x}}\,dx+\int\limits_{R}^{-R}\frac{\operatorname{Cs}a\pi e^{ax}-\operatorname{Cs}b\pi e^{bx}}{1+e^{x}}\,dx=0.$$

Отсюда, увеличивая R беспредельно, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}\ \ e^{bx}}{1-e^{x}}\,dx=\operatorname{Cs}a\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}\,dx-\operatorname{Cs}b\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{bx}}{1+e^{x}}\,dx.$$

Дело свелось к определению интегралов

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx \text{ и } \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{bx}}{1+e^x}\,dx$$

Интегрированием по контуру можно найти, что (при $o<a<1$, $o<b<1$) первый интеграл равен $\frac{\pi}{\operatorname{sn} a\pi}$, а 2-ой$=\frac{\pi}{\operatorname{sn} b\pi}$.

Принимая это во внимание, окончательно получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^x}\,dx=\pi\,(Ctga\pi-Ctgb\pi).$$

Применим теперь способ Коши к вычислению таких определенных интегралов

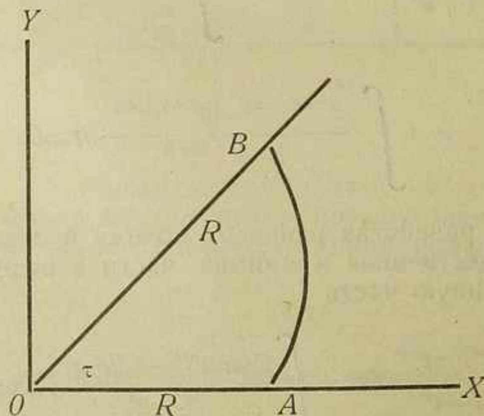
$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax^2}\operatorname{Cs} bx^2\,dx \text{ и } \int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax^2}\operatorname{sn} bx^2 dx$$

при том условии, что $a>o$ в обоих интегралах, а „b“ может быть каким угодно.

Для решения нашей задачи возьмем такую функцию от комплексного переменного

$$f(z)=e^{-z^2}.$$

Возьмем интеграл от этой функции вдоль контура сектора OAB радиуса R.



Пусть $\angle\, AOB=\tau$.

Функция $f\,(z)$ внутри контура и на самом контуре целая, а потому можно применить теорему Коши:

$$\int\limits_{0AB0} e^{-z^2} dz=\int\limits_{0A} e^{-z^2} dz+\int\limits_{AB} e^{-z^2} dz+\int\limits_{B0} e^{-z^2} dz=0.$$

Теперь заметим, что на отрезке $0A$ переменное Z равно вещественному переменному X;

$$e^{-z^2}=e^{-x^2};\ 0 \le x \le R;\ dz=dx.$$

Вдоль дуги AB имеем:

$$Z=R(\mathrm{cs}\varphi+\mathrm{i}\ \mathrm{sn}\varphi)=Re^{\varphi\mathrm{i}};\ e^{-z^2}=e^{-R^2(\mathrm{cs}2\varphi+\mathrm{i}\ \mathrm{sn}2\varphi)};\ dz=Ri\,e^{\varphi\mathrm{i}}\,d\varphi;\ 0 \le \varphi \le \tau.$$

Вдоль BO имеем:

$$z=r(\mathrm{cs}\tau+\mathrm{i}\ \mathrm{sn}\tau)=re^{\tau\mathrm{i}};\ dz=e^{\tau\mathrm{i}}dr;\ 0 \le r \le R;\ e^{z^2}=e^{-r^2(\mathrm{cs}2\tau+\mathrm{i}\ \mathrm{sn}2\tau)}=$$

$$=e^{-r^2\mathrm{cs}2\tau}e^{-r^2\mathrm{i}\,\mathrm{sn}2\tau}.$$

Полагая

$$\mathrm{cs}2\tau=a,$$

$$\mathrm{sn}2\tau=b,$$

получим, принимая $\tau \le \frac{\pi}{2}$,

$$\mathrm{cs}\tau=\sqrt{\frac{a+p}{2}},$$

$$\mathrm{sn}\tau=\sqrt{\frac{p-a}{2}},$$

где $p=\sqrt{a^2+b^2}$.

Теперь можем написать

$$e^{-z^2}=e^{-ar^2}(\mathrm{cs}\,br^2-\mathrm{i}\ \mathrm{sn}\,br^2).$$

Легко видеть, что в последнем равенстве „b“ не зависит от „a“ и может быть по величине каким угодно. Это можно легко доказать, основываясь на периодичности cs и sn.

Принимая все это во внимание, можем написать

$$\int_{0AB0} e^{-z^2}dz=\int_0^R e^{-x^2}dx+\mathrm{i}\int_0^{\tau} e^{-R^2(\mathrm{cs}2\varphi+\mathrm{i}\ \mathrm{sn}2\varphi)}\,Re^{\varphi\mathrm{i}}\,dz+$$

$$+e^{\tau\mathrm{i}}\int_R^0 e^{-ar^2}(\mathrm{cs}\,br^2-\mathrm{i}\ \mathrm{sn}\,br^2)\,dr=0.$$

Положим теперь, что $R=\infty$. Тогда 1 ый интеграл, как известно, равен $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Второй интеграл обратится в нуль.

Это можно доказать, основываясь на теореме Дарбу; по этой теореме

$$\left|\int_{AB} f(z)\,dz\right| \leq MS, \text{ где } M \geq \left|f(z)\right|;$$

S—длина дуги кривой, вдоль которой берется интеграл.

Применяя эту теорему к нашему случаю, найдем

$$\left|\int_{AB} e^{-z^2} dz\right| \leq R\tau e^{-R^2 \operatorname{cs} 2\tau}.$$

Как легко видеть, правая часть неравенства при $\tau < \frac{\pi}{4}$ стремится к нулю. Итак, модуль интеграла стремится к нулю, а потому и интеграл должен стремиться к нулю.

Теперь уже можно написать

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} + e^{\tau i}\int_{\infty}^{0} e^{-ar^2}(\operatorname{cs} br^2 - i \operatorname{sn} br^2)\,dr = 0,$$

откуда

$$(\operatorname{cs}\tau + i \operatorname{sn}\tau)\left[\int_0^\infty e^{-ar^2}\operatorname{cs} br^2 dr - i\int_0^\infty e^{-ar^2}\operatorname{sn} br^2 dr\right] = \sqrt{\frac{a+p}{2}} \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-ar^2}\operatorname{cs} br^2 dr + \sqrt{\frac{p-a}{2}}\int_0^\infty e^{-ar^2}\operatorname{sn} br^2 dr + i\left[\sqrt{\frac{p-a}{2}}\int_0^\infty e^{-ar^2}\operatorname{cs} br^2 dr - \right.$$

$$\left. -\sqrt{\frac{p+a}{2}}\int_0^\infty e^{-ar^2}\operatorname{sn} br^2 dr\right] = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Сравнивая вещественные части, получим

$$\sqrt{\frac{p+a}{2}}\int_0^\infty e^{-ar^2}\operatorname{cs} br^2 dr + \sqrt{\frac{p-a}{2}}\int_0^\infty e^{-ar^2}\operatorname{sn} br^2 dr = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Приравнивая нулю мнимую часть, получим

$$\sqrt{\frac{p-a}{2}}\int_0^\infty e^{-ar^2}\operatorname{cs} br^2 dr = \sqrt{\frac{p+a}{2}}\int_0^\infty e^{-ar^2}\operatorname{sn} br^2 dr.$$

Решая два последние равенства относительно интегралов и заменяя переменную r через x, окончательно получим

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \mathrm{cs}\, bx^2 dx = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{p+a}\,,$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \mathrm{sn}\, bx^2 dx = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \sqrt{p-a}\,, \text{ где } p = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Положив $a=o$, $b=1$, получим известные в физике интегралы Френеля

$$\int_0^\infty \mathrm{cs}x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

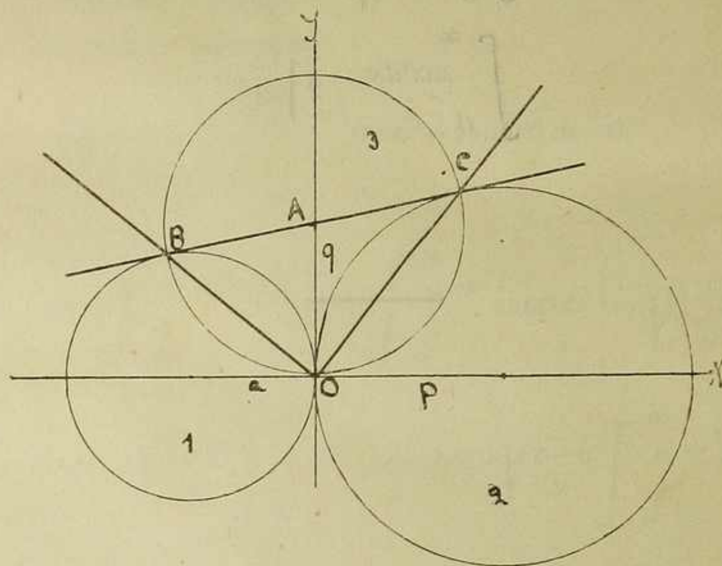
$$\int_0^\infty \mathrm{sn}x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Е. А. Фортунатова

Заметка об одном способе черчения циссоиды*)

Способ этот основан на решении следующей задачи.

Неподвижный круг радиуса a касается переменного круга в постоянной точке O. Найти геометрическое место точки касания переменного круга и общей касательной к постоянному и переменному кругам.



Чертеж 1

Принимаем точку O за начало координат, а линию центров данных кругов за ось X-ов (черт. 1). Тогда уравнение постоянного круга будет

$$x^2+2ax+y^2=O, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

а для переменного будем иметь:

$$x^2-2px+y^2=O, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

где p радиус переменного круга.

Проводим общую касательную BC и ищем геометрическое место точки C. Заметив, что $AB=AO=AC$, проводим радиусом AO вспомогательный круг, принимая A за центр.

Пусть $AO=q$, тогда

$$x^2+y^2-2qy=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

будет уравнение третьего круга.

[1]) Статья по недосмотру помещена в этом отделе.

Уравнение прямой OB, как радикальвой оси для (1) и (3), будет

$$ax+qy=O \quad \text{или} \quad y=-\frac{a}{q}x$$

Уравнение OC, радикальной оси для кругов (2) и (3), будет

$$px-qy=O \quad \text{или} \quad y=\frac{p}{q}x, \quad \text{откуда}$$

$$\frac{ap}{q^2}=1$$

так как OB перпендикулярна к OC.

Из (2) и (3) имеем:

$$p=\frac{x^2+y^2}{2x} \quad \text{и} \quad q=\frac{x^2+y^2}{2y},$$

Подставляя найденные значения в $q^2=ap$, получаем:

$$\frac{(x^2+y^2)^2}{4y^2}=\frac{a(x^2+y^2)}{2x} \quad \text{или, сокращая на} \quad \frac{x^2+y^2}{2},$$

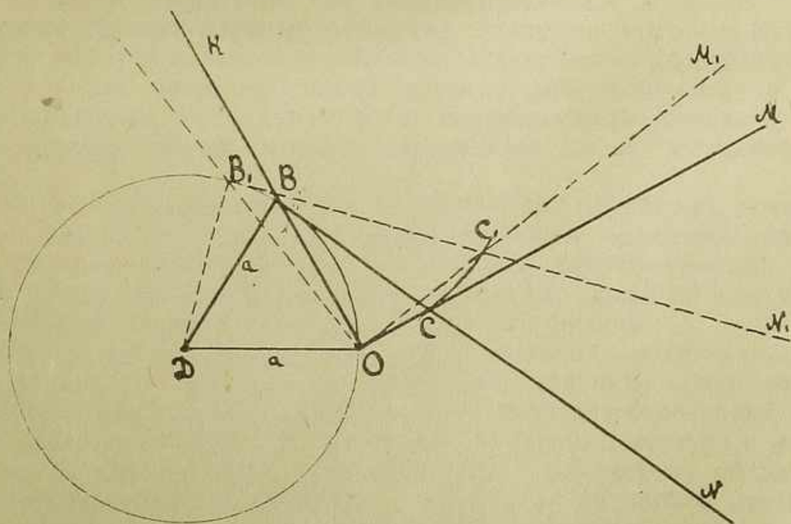
$$\frac{x^2+y^2}{2y^2}=\frac{a}{x}$$

и окончательно

$$y^2=\frac{x^3}{2a-x}$$

уравнение циссоиды.

(Другое решение $x^2+y^2=O$, дающее точку—начало координат, нам не нужно).



Чертеж 2

Обращаем внимание на переменный $\triangle$ OBC, вершина которого C принадлежит циссоиде. Он остается всегда прямоугольным, так как опирается на диаметр вспомогательного круга, причем вершина прямого угла всегда лежит в начале координат. Итак $\triangle$ OBC вращается

около точки O, меняясь по величине. Но достаточно определить положение точки B на постоянном круге, чтобы весь треугольник сделать определенным. В самом деле, фиксируя точку B на постоянном круге, мы тем самым определяем положение касательной к нему в этой точке, т. е. катет OB и прилежащий острый угол OBC делаются определенными по величине и положению.

Пользуясь этими соображениями, можно построить прибор для черчения циссоиды.

Пусть прямой угол DBN (черт. 2) закреплен в точке D, лежащей на расстоянии a от вершины B. Тогда точка B, очевидно, будет описывать постоянный круг радиуса a, а BN будет к нему касательной. Второй прямой угол KOM вращается около своей вершины O, причем сторона OK всегда проходит через точку B. Тогда, при движении B по кругу, точка пересечения прямых OM и BN (т. е. точка C) будет двигаться в циссоиде.

Для данной циссоиды $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ отрезок $OD = a$ остается постоянным по величине и положению.

Е. Е. Сиротин

Ньютон, как основоположник современного физического миропонимания*)

Democritus ait: Unus mihi pro populo est... Миллионы людей жили и умирали для того, чтобы мог распуститься высший цветок мысли.. Природа растрачивает племена, чтобы создать Иисуса, Будду, Эсхила, Винчи, Ньютона, Бетховена.

Р. Роллан.

Чтобы лучше уяснить роль Ньютона в современной науке, нам нужно дать общую, хотя бы и самую сжатую, характеристику главных путей современного естествознания и особой роли физики, которую она играет среди других отраслей человеческого знания.

Индуктивный метод исследования, введенный в употребление на границе средних и новых веков целым рядом гениальных исследователей, обогатил науку громадным запасом фактического материала. Знания о живой и неживой природе, географические и этнографические сведения, расширившиеся, как никогда раньше, благодаря открытию Нового Света, факты звездного неба—накопляются все в большем и большем количестве. Как знамение времени, возникают во всех культурных странах научные общества, академии, которые своей коллективной работой сильно способствуют дальнейшему расцвету естествознания. В науку вводится новый элемент: искусственный опыт, при помощи которого исследователь в искусственной обстановке вырывает у природы тайны, ревниво охраняемые ею от пытливого взора человека

Опытный материал требует теоретической обработки, хотя бы уж с точки зрения наиболее экономных способов овладения им. Появляются системы классификаций, выявляются закономерности, охватывающие целые области фактов, скопленных до сих пор еще в сыром виде. Дифференцируются науки и среди них физика.

Область явлений, закрепившихся за физикой—область самых распространенных в природе, „физических", явлений—сразу заставила отвести ей почетное место среди других наук естествознания, а гениальные работы Галилея, Джильберта, Декарта, Гюйгенса и особенно Ньютона, подведших физический фундамент под систему общего научного миропонимания, выдвинули ее прямо уже на первое место.

С течением веков это место за ней упрочилось, пока в 19-ом и особенно в 20-ом веке, она не стала во главе всего естествознания.

Еще Ог. Конт выявил роль физического исследования в чисто гуманитарных областях человеческого знания, а знаменитый философ-

*) Речь, произнесенная на открытом торжественном заседании Научного Общества при БГУ, 10 апреля 1927 г., посвященном 200-летию со дня смерти Ньютона.

физик Эрн. Мах пытался обосновать одну из главнейших дисциплин философии—теорию познания—на чисто физическом фундаменте. Да и сам великий король философов Эм. Кант не был чужд такого стремления, доказательством чего является его постоянный интерес к физическим проблемам (понятие живой силы, космогоническая гипотеза). Особенно это надо отнести, конечно, к материалистической философии и гегелианцам (Фр. Энгельс).

Гениальные работы Эйнштейна наносят особенно сильный удар обособленной позиции философии и ставят ее—по крайней мере в одной из главнейших отраслей—в положение чуть-ли не главы физики. Я имею в виду теоретико-познавательную концепцию в отношении времени и пространства. А в ней ведь, в сущности, и заключается смысл теории относительности, как особого этапа в развитии человеческой мысли.

И нет сомнения, что та же участь ждет и биологию. В ближайшем будущем науки о жизненных явлениях, которые как-будто в существенном стоят совсем особняком от явлений, протекающих в неорганическом мире, должны влиться опять-таки в единое русло с физикой. Доказательством являются громадные успехи, сделанные физиологией—физикой живого вещества—в области условных рефлексов, достигнутые трудами, главным образом, гениального Павлова, и успехи в деле применения физических методов и расчетов к процессам возбуждения в живых тканях, составляющие сущность биофизических работ Лазарева и его школы. Физико-химический механизм клетки и других простейших образований в живом веществе является в настоящее время главнейшим об'ектом биологических исследований.

И если бы только сейчас можно было говорить об единой универсальной науке, то на таковое место могла бы претендовать единственно только физика: широта ее горизонтов безгранична и „ни одна область человеческого знания не открывает такого простора для применения всех познавательных способностей человеческого ума, начиная со свободного полета творческой фантазии, проходя через горнило опытной индукции и завершаясь строгой дедукцией математического анализа“ (К. А. Тимирязев о физике).

В чем же сила физики? Ее сила, как в цели, к которой она стремится, так и в методах, которыми она пользуется для достижения этой цели.

Конечной целью физики является открытие самых общих принципов, заложенных в материальном мире, чтобы, переходя потом от общего к частному и пользуясь законами логического мышления, иметь возможность построить рациональное мировоззрение и связать бесконечное разнообразие фактов жизни вселенной и человека в одно единое целое. Методом физики является собирание самих фактов, как они непосредственно даются нашему сознанию, открытие новых фактов путем чисто логических операций, для чего служит наиболее могучее средство—математический анализ—и наконец опыт, являющийся, с одной стороны, незаменимым средством контроля над правильностью теоретических выводов и с другой—служащий средством для извлечения новых непредвиденных новых фактов. Только уж после накопления добытого таким образом фактического материала можно притти к конечной цели—открытию общих принципов, которыми живет природа, которых должно быть минимальное количество, ибо велико убеждение человека, что „природа проста и не роскошествует излишними причинами вещей“ (Ньютон).

В таком именно духе были формулированы цель и методы исследования природы около $2^1/_2$ столетий тому назад, у самых истоков

современного естествознания, его творцом, память которого мы сегодня благоговейно чтим.

Но им были не только указаны пути, по которым должно двигаться научное исследование: он сам пошел по этому пути, ведя за собой армию исследователей, он сам одолел главнейшие вершины, откуда открывается необ‘ятный простор мирозданья, залитый светом творческой мысли, он и сейчас ведет нас к дальнейшим победам, ибо эти вершины видны отовсюду, они являются маяком для всякого путника, проникающего в таинственный мир Космоса. Созданное им не умрет в памяти человечества: пока хоть искра разумного сознания останется на нашей планете.

Набросаем теперь основные штрихи физической картины мироздания по Ньютону и отметим главнейшие этапы его творчеств в различных областях естествознания.

Мир состоит из двух начал: 1) начала пассивного—инертной материи, разлитой по всему мировому пространству в разнообразных формах вещества и эфира, которая стремится пребывать в состоянии предшествующего момента и 2) начала активного—силы, опять-таки имеющей различные формы,—стремление которой—изменять предшествующеее состояние материи.

Но эти два начала вовсе не означают какого-либо дуализма в построении природы: они являются слитыми друг с другом и не могут существовать друг без друга. Если каким-нибудь образом сила действует на материю, то сейчас же появляется равное противодействие, т. е. в материи рождается сила, направленная навстречу активной силе, и с точки зрения результата, т. е. движения, мы не можем делать различия между действующей силой и противодействующей. Они являются единой сущностью и вместе с тем рождаются материей. Здесь круг замыкается, и оба начала, согласно философии Ньютона, оказываются разными сторонами одной и той же сущности—единого материального универсума.

Действие силы на изолированную часть материи выражается в перемещении последней. Движение есть результат действия силы: в нем должна количественно сказываться, как сама причина, т. е. сила, так и об‘ект ее действия, т. е. материя, со стороны своего главного свойства--инертности. И Ньютон устанавливает эту связь в аксиоматической форме,—связь, которая в точном естествознании имеет исключительное значение. Это так называемая вторая аксиома движения. Остальные же изложенные выше мысли, составляющие фундамент ньютоновского миросозерцания, формулированы им в первой и третьей аксиомах.

Эти три аксиомы или закона движения Ньютона и составляют краеугольный камень современного точного знания о природе. Они являются теми видимыми отовсюду маяками, к которым обращается исследователь, отправляясь в плавание по безбрежному океану неизвестного.

В самом деле, нам ни с чем более часто не приходится встречаться в природе, как с движением. Оно лежит в основе всевозможных явлеиий, которые на первый взгляд как-будто и далеки от какого бы то ни было движения. Мы не знаем в природе ни одного неподвижного материального об‘екта ни в макро-, ни в микрокосме.

Вот почему механика—наука о движении—основа всей физики, а законы Ньютона--основа всего человеческого знания. И вот почему

после установления Ньютоном законов механики многие крупные умы лелеяли мысль построить чисто механистическую систему мира, в которой все явления материальной природы сводились бы только к одному движению. И если такая система до сих пор еще не построена, да, повидимому, и не может быть построена, то это отнюдь не доказывает невозможности вообще построения системы точного естественно-научного миросозерцания: надо только заменить более узкое понятие „механическое“ всеоб‘емлющим „физическое“ и ждать, когда физика справится с трудностями, стоящими на ее пути к достижению конечной цели. Сейчас же, когда мы далеки от такого идеала, когда еще между различными науками стоят китайские стены обособленности, когда порой даже части самой физики отчуждены друг от друга, можно говорить не о законченной системе, а только об отдельных камнях в ее фундаменте.

Широкой публике часто приходится слышать, что теперь, мол, ньютоновская механика потерпела крушение, что законы ее, формулированные Ньютоном в аксиоматической форме, только приблизительны и что, мол, механика Энштейна чуть-ли не ниспровергла механику Ньютона. Это, конечно, плод глубокого недомыслия. Даже нелепо само противопоставление этих механик: новая механика—это разбор особого класса явлений при помощи все той же механики Ньютона. Она—эта классическся механика—есть единственное орудие, пользуясь которым Эйнштейн приходит к своим выводам, уточняющим основные механические понятия и дающим новые точки зрения на различные стороны явлений в природе.

Здесь необходимо отметить, что формулировки законов Ньютоном на столько строги и имеют такую всеоб‘емлющую форму, что даже выводы эйнштейновской механики, меняющие смысл старых механических понятий, не меняют самых формулировок, данных Ньютоном. Так второй закон о пропорциональности силы и изменения количества движения остается справедливым даже и при массе, изменяющейся взависимости от скорости [1]). Как будто Ньютон *предвидел* возможность такого изменения массы и дал этот закон не упрощенной форме, в какой он практически и используется вот уже в течение 2 с полов. столетий, т. е. „сила пропорциональна производимому ею ускорению“, а в наиболее общей, непреложной. Я сознательно подчеркиваю последние слова, хотя не мало лет тому назад Пуанкаре провозгласил тезис об эволюции законов: на мой взгляд механические понятия, после ревизии, произведенной Эйнштейном, на столько уточнены, что едва-ли возможна их дальнейшая существенная ревизия, а тем более какие-либо коренные изменения.

Как-будто Ньютон предвидел... Да таково уж свойство гениального ума. Он обладает каким-то особым сверх-чувствами, ему открыты свойства вещей, незримые обыкновенным людям. Он как-бы взглядом кудесника пронизывает внешнюю оболочку вещей, чтобы прозреть их сокровенные свойства. А ведь сущее обладает бесконечным множеством аттрибутов и сокровенного неизмеримо больше, чем внешнего. Ведь недаром Ньютон, проницательнейший из исследователей природы, на склоне лет прибегает к своему знаменитому сравнению, что он, Ньютон (которого мы знаем за величайшего гения!), был, в сущности, только мальчиком, вылавливавшим время от времени ту или иную красивую раковину вблизи берега, в то время как перед ним „великий океан истины лежал неразгаданным“.

---

[1]) См. С И. Вавилов. Давление света, масса и энергия. Усп. Физ. Наук. Т. III стр. 192.

Вот почему добытые интуицией гения истины не могут быть *опровергнуты* последующими исследователями, а только *дополняются* ими.

Система механики, данная Ньютоном, плодотворна не только в силу гениально обобщенных формулировок основных аксиом, но не менее того и тем математическим аппаратом, при помощи которого можно эти законы применять к исследованию природы. Этот аппарат Ньютона состоял в использовании до конца уже имевшихся в его время математических средств, преимущественно геометрических, и кроме того, он открыл новый, не применявшийся до него, метод —исчисление бесконечно малых. Этим последним открытием Ньютон прибавил к своим бессмертным заслугам еще одну.

Правда, а своих творениях Ньютон не очень широко пользовался открытым им методом, и в „Principia" имеются только несколько проблемм, решенных им помощью анализа бесконечно малых, но все дальнейшее развитие естествознания теснейшим образом связано с этим поразительным методом и даже трудно себе представить, как бы выглядело лицо современной науки, если бы исследователь не имел в своих руках этого могучего средства.

О значении этого открытого гением Ньютона метода здесь будут говорить другие докладчики, я же остановлюсь только на одной стороне философского характера, поскольку она отражает миросозерцание Ньютона.

В основе анализа бесконечно малых лежит понятие о непрерывности изменяемой величины. Но ведь одной из характернейших черт современного естествознания является учение о прерывности в природе, прерывности не только вещества, но и силы, и энергии. Представлял-ли Ньютон ясно это важнейшее свойство вселенной? Ведь в его время не было еще ни атомной, ни электронной, ни квантовой гипотез.

Мог-ли Ньютон считать об'екты физического измерения непрерывными? Являлась-ли для него, наприм., материя целиком заполняющей пространство?

На эти вопросы не может быть двух ответов. О прерывном строении физических тел Ньютон утверждает на столько категорически, говоря все время о свойствах мельчайших частиц тел (напр. начало 3-й книги и многие другие места „Principia", „Вопросы" в „Оптике"), что становится ясным, что для для него не оставалось ни малейшего сомнения на этот счет, так же как не оставалось сомнения и относительно делимости эфира, которому он приписывал те же функции, какие приписываем ему и мы в настоящее время. Вот что гласят заключительные строки „Principia": „Теперь следовало бы добавить кое-что о некоем тончайшем эфире, проникающем все тела и в них содержащемся, коего силой и действиями частицы тел при весьма малых расстояниях взаимно притягиваются, а при соприкосновении сцепляются, наэлектризованные тела действуют на большие расстояния, как отталкивая, так и притягивая близкие малые тела, свет испускается, отражается, преломляется, уклоняется, и нагревает тела, возбуждается всякое чувствование, заставляющее члены животных двигаться по желанию, передаваясь именно колебаниями этого эфира от внешних органов чувств мозгу и от мозга к мускулам"...

Вот почему мы можем заключить, что, создавая анализ бесконечно малых и вводя тем самым в рассмотрение непрерывность, Ньютон ни в коем случае не придавал ей характера реальности, а смотрел только как на абстракцию, удобную в качестве метода исследования явлений с количественной стороны. Ведь и современная физика постоянно использует для этой же цели такие математические

средства, в которых определения и понятия не имеют за собой никакого конкректного образа: вспомним хотя бы мнимые величины в теории функций комплексного переменного.

Установив основные законы механики и найдя универсальный математический аппарат для их применения к явлениям природы, Ньютон создал всеоб'емлющую теорию, которую сам же и наполнил конкретным содержанием.

Не останавливаясь почти на изучении материи (хотя он был и искусным химиком), Ньютон обратил все свое внимание на силы присущие материи, и при том силы наиболее универсальные.

Он подробно исследует законы сопротивления среды, т. е. силы трения, наиболее часто встречающиеся в природе, чтобы затем перейти к силам, создающим гармонию движения в небесных пространствах.

Здесь ему удается сформулировать закон всемирного тяготения, представляющий небывалое до того времени об'единение самых разнородных явлений, и тем связать воедино движения, как на земле, так и в небесном пространстве. Если мы теперь после 2 с пол. веков непрерывного движения науки знаем еще такие универсальные силы природы, как электрические и магнитные, и числовые законы, по которым они действуют, то это нам известно, благодаря гениальной формулировке закона всемирного тяготения, которая послужила прототипом для этих законов. Закон изменения обратно пропорционально квадрату расстояния повторяется всюду. Видимо, здесь Ньютон гениально нащупал одну из существеннейших сторон количественных соотношений в природе. И может быть только Эйнштейну, уже в наше время, удалось подчеркнуть в еще более резкой форме эту особенность в природе, связав ее с метрическими свойствами мирового пространства

Гениальные открытия Коперника и Кеплера о движении в солнечной системе, Галилея о падении вблизи земной поверхности—получили самое простое истолкование в свете закона всемирного тяготения, как его непосредственные следствия. Притяжение луной водной оболочки земного шара, вычисленное по законам Ньютона, вполне об'яснило, как с качественной, так и с количественной стороны явление приливов и отливов. Чисто аналитическим путем оказалось возможно проникнуть в тайны неба и земли, вычисляя и плотность внутренних слоев нашей планеты, и взвешивая солнце и другие небесные тела, и предначертывая пути комет, и предугадывая существование несвятящихся звезд и т. д. Кругозор естествоиспытателя расширился до небывалых размеров.

Открыв универсальную силу, Ньютон отыскивает действие ее не только в макрокосмосе: он пытается приложить открытые им законы и к тому материальному миру, который в виде мельчайших частиц тел скрыт от наших глаз, и даже, наконец, к тем самым мелким частицам в природе, в виде которых Ньютон представлял себе свет. Особенно этому посвящается много „Вопросов“ в „Оптике“ в виде поставленных на очередь проблем.

Из материальности, т. е. наличия массы у частиц света легко вывести световое давление и тем самым обосновать мысль Кеплера о роли такого давления, в мировом пространстве, которое, как мы теперь знаем, играет такую громадную роль при создании миров из первозданных газовых масс, стягивающихся электрическими и гравитационными силами. Мысль эта была блестяще подтверждена классическими исследованиями П. Н. Лебедева. Применяя к тем же световым частицам закон всемирного тяготения, можно предсказать явление притяжения

светового луча к тяжелым массам: перечисленное уже в настоящее время с точки зрения теории относительности это притяжение было действительно обнаружено астрономическим путем и явилось триумфом обобщенной теории относительности Эйнштейна.

Сам Ньютон таких выводов, правда, не делал, желая остаться на почве экспериментально проверенных фактов. Но в „Вопросах" в „Оптике" мы находим постоянное подчеркивание факта воздействия универсальных сил, обусловленных материей, на частицы света и подчинения их, тем самым, простейшим законам движения.

Таким образом Ньютон стремился представить оптику, как механику эфира, в основе которой лежит равномерное движение инертных частиц: его-то и воспринимает непосредственно наш глаз.

Всем известно, что Ньютонова теория света, царствовавшая в течение столетия, потерпела крушение на грани XVIII и XIX веков и была заменена волновой теорией. Но в последней мы опять имеем не что иное, как механику эфира, основанную на законах движения Ньютона. Только здесь в основе лежит гармоническое колебательное движение, и глаз воспринимает непосредственно не перемещение навстречу ему летящих частиц, а лишь волны, разбегающиеся в эфире по всем направлениям.

Любопытно, что сам Ньютон дал полное изложение главных явлений оптики с точки зрения волновой теории света в своих „Вопросах" в „Оптике", хотя вообще предпочитал пользоваться образами корпускулярной теории, не становясь, в сущности, на защиту ни той, ни другой.

Только впоследствии механические колебания заменяются колебаниями электро-магнитного поля. Теперь, когда оказывается, что электро-магнитная теория света в ее первоначальном виде, приданном ей Максвеллом, должна быть дополнена прежде всего введением понятия об электроне, как излучателе, и затем квантовых условий для внутриатомных движений, мы с удивлением замечаем, что главную отличительную черту явления Ньютон схватил правильно: свет распространяется действительно дискретными порциями (эта прерывность особенно сказывается в радиации высоких частот колебаний), и большая часть подробностей происходит именно так, как описал Ньютон. Даже те выводы, которые мы теперь считаем ошибочными, на самом деле вовсе не являются таковыми, но имеют характер частный а не общий, и требуют дополнения, а не отбрасывания.

Переводя на современный язык главную идею оптики Ньютона, мы можем сказать, что световая энергия перемещается отдельными порциями и что она имеет массу. Современная теория световых квантов является только обощением этого положения. И потому мы с полным правом можем считать Ньютона основоположником истинной теории света.

У Ньютона эта теория приобрела масштаб проблеммы космического значения. Да оно, в сущности, так и должно быть: ведь единственным источником знаний о вселенной в ее хотя бы самых близких к нам частях, является свет, идущий от светил.

Изучив разложение света на составные части призмой, интерференцию и диффракцию световых лучей, Ньютон дал такое полное изложение фактов о свете, что не запоздай бы химия в своем развитии по сравнению с физикой, Ньютон, наверное, поведал бы человечеству новую тайну вселенной—о химическом строении небесных тел, открыв спектральный анализ на $1^1/_2$ века раньше того, чем это случилось на самом деле.

Удивительна эта способность Ньютона ставить и разрешать величайшие проблеммы космического характера, и как общи эти решения! В „Principia“ он блестяще разрешил задачу о движении светил в небесных пространствах. А теперь, когда физика, во главе с гениальным Резерфордом, поставила на очередь вопросы внутри-атомной механики, мы с удивлением видим, что решение задачи требует почти буквального повторения ньютоновских приемов: микрокосмос повторяет макрокосмос. И даже сама история здесь как-бы повторяет самое себя: механика атома имеет уже своего Кеплера—Бора, открывшего законы внутри-атомных движений без об‘яснения их причин—и только место „Ньютона атомной механики“, долженствующего дать эти об‘яснения—еще вакантно, хотя уже имеются покушения и на это исключительно высокое звание.

Если закон всемирного тяготения внес невиданную до сих пор стройность в мир космических явлений, то не меньшую стройность он внес и в самую систему естественно-научного миропонимания: об‘единение такого огромного класса важнейших явлений в природе не могло не отразиться на философии естествознания. Сам Ньютон так и оценивал свои открытия, озаглавив свой главный труд как „Математические принципы философии природы“. И до сих пор термин: философия природы—у англичан в значительной степени означает физику.

И вот куда бы ни обратился взгляд исследователя, какими бы хотя бы самыми модными, вопросами он ни занимался, он неизбежно сталкивается со всеоб‘емлющей мыслью Ньютона. И пока в истории науки мы не знаем его поражений, по крайней мере, в существенных частях его философского миросозерцания. Мелкие детали—а он мог ошибаться и в вычислениях—в счет не идут. В сфере же основных физических идей он не ошибался, история рано или поздно возвращала яко-бы ошибочные мысли Ньютона на прежний пьедестал непогрешимости. Так было с законом всемирного тяготения, когда некоторые астрономы предлагали для об‘яснения тех или иных неравенств в движении небесных тел изменить показатель 2 в знаменателе, прибавив или отняв малые дробные числа, так будет, повидимому, и теперь, когда в силу различных затруднений в квантовой механике делаются попытки заменить основное понятие Ньютона—понятие материальной точки—волной.

Я кончаю

Если вдумаемся в те заслуги, которые имеет Ньютон перед человечеством, если поймем, какую роль играло построенное им изученное миросозерцание, очерченное мною в самых кратких чертах, на дальнейший ход человеческой культуры, как материальной, так и духовной, мы поймем, что трудно подойти с какой-либо обычной меркой, которой мы меряем заурядного или даже выдающегося человека. Мы можем оценивать физический труд, блага материальной культуры, техническое изобретение, а интуиция гения, рождающегося раз в тысячелетие, не оценима. Нет меры Ньютону: заслуги его так же необ‘ятны, как необ‘ятно его поле деятельности—безграничный космос. Это к нему в полной мере применимы слова древнего мудреца и современного знаменитого писателя, приведенные в эпиграфе.

Двести лет прошло с тех пор, как отлетел последний вздох великого человека. Все глубже и глубже стираются каменные плиты Trinity College, по которым некогда в задумчивости бродил Ньютон... Время наложило свой нивеллирующий отпечаток на барельефы в Вестминстерском

аббагстве, и даже локоны, благоговейно хранимые в Библиотеке Trinity College, как-будто еще больше поседели от пронесшихся годов... Много потрясений и великих побед узнало человечество за эти века. Наука сначала просто быстрыми, а потом прямо гигантскими шагами устремляется вперед, постепенно рассеивая таинственный мрак мира неведомого. Много славных имен отмечает это победное шествие. С ними связаны эпохи в жизни человечества. А ведь эпохи сменяются новыми эпохами, и имена превращаются в исторические даты, термины, схемы. Они ушли, как редкие уники, в музей прошлого...

Можем-ли мы то же сказать о Ньютоне? Можем-ли отнести его к тем художественным, изумительным по письму и древности иконам, которым мы удивляемся, которыми любуемся и восхищаемся, чтобы... поклоняться другим богам? Конечно, нет, тысячу раз нет! Ньютон и сейчас актуален, Ньютон сопутствует бешенно мчащемуся движению науки, он непрерывно толкает ее вперед и вперед. Его творения можно читать и изучать до бесконечности, открывая все новое и новое конкретное, материальное содержание, чуть не каждая строчка, вышедшая когда-то из-под его пора, так насыщена мыслью, что доставляет неисчерпаемый материал комментаторам.

Когда современный исследователь шагает по необ'ятным просторам мира неизведанного или взбирается на высочайшие вершины научных обобщений, или переходит по зыбким мосткам истины через топкое болото ложных, хотя порой и красивых, теорий—он идет не один, он чувствует направляющую руку гения, он пользуется неизменно мыслями, зародившимися и развившимися 2—3 века тому назад в чудесном инструменте, называемом мозгом Ньютона.

Переносится-ли он в неизмеримые пространства звездного мира, заглядывает-ли в сокровенные глубины атома или сосредотачивает внимание на повседневных вещах—он, часто может быть даже и бессознательно, пользуется законами и методами, которые завещал этот величайший в истории человечества прозорливец.

Он говорит с нами, живущими сейчас, устами великих естествоиспытателей 18, 19 и 20 веков, развивавших и продолжающих развивать идеи Ньютона, он говорит целой организованной армией исследователей разнообразных научных школ всех стран, с его именем связан победный ход техники, которая тысячами своих машин ежесекундно напоминает нам о великом создателе точного знания.

Больше двухсот лет время испытывало ценность идей и открытий Ньютона. Миллионы людей пользовались плодами его умственного творчества и в прямом и переносном смысле. И сейчас мы видим: его идеи лежат в основе всего общечеловеческого знания.

И вот почему, даже в настоящее время, когда каждый год подносит нам новые сюрпризы науки и техники, мы все-же не можем не удивляться, как природа могла произвести такое изумительное неповторимое чудо, как гений Ньютона, так же как этому в свое время не переставали удивляться и его современники, говоря о нем устами знаменитого тогда астронома Галилея:

„Не может смертный ближе стать к богам“ [1]).

---

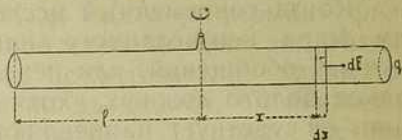
[1]) Цитир. по кн.: Лекции и речи А. Г. Столетова. Под редак. К. А. Тимирязева. МСК. 1897.

Е. Е. Сиротин

Центробежные силы в газе.

Вращением газа удобно воспользоваться для демонстрирования некоторых соотношений кинетической теории газового состояния. Так легко вывести связь между скоростью вращения и средней квадратичной скоростью газовых молекул, пользуясь основной формулой кинетической теории газов.

Пусть газ заключен в цилиндрическую трубку, вращающуюся вокруг оси, проходящей через средину трубки перпендикулярно к ее длине (черт.). Пусть длина половины трубки$=l$, сечение$=q$, плотность газа$=\delta_0$, масса его $=M_0$, период обращения$=T$.



Тогда центробежная сила dF для элемента газа $q.dx$, находящегося на расстоянии X от оси, будет

$$dF=dm.\frac{4\pi^2 x}{T^2}$$

где

$$dm=q.\delta.dx$$

δ—плотность газа в исследуемом месте трубки.

Сила dF уравновешивается разностью давлений dp на концах элемента $q.dx$

$$dF=q.dp.$$

Отсюда

$$dp=\frac{4\pi^2}{T^2}\delta.\ x.\ dx.$$

Плотность при неизменной температуре пропорциональна давлению

$$\delta=kp$$

или

$$dp=\frac{1}{k}d\delta.$$

После подстановки в предшествующее уравнение и разделения переменных получаем

$$\frac{d\delta}{\delta}=\frac{4\pi^2 k}{T^2}\ xdx$$

откуда решение будет иметь вид

$$lg\delta=\frac{4\pi^2 k}{T^2}\cdot\frac{x^2}{2}+C.$$

Для $x=0$, плотность будет$=\delta_0$, если трубка через отверстие по оси вращения соединена с атмосферой, где плотность$=\delta_0$. Значит,

$$lg\frac{\delta}{\delta_0}=\frac{2\pi^2 k}{T^2}x^2=\alpha x^2$$

где

$$\alpha=\frac{2\pi^2 k}{T^2}$$

или

$$\delta=\delta_0 e^{\alpha x^2}.$$

На практике α—малая величина, и потому приближенно

$$\delta=\delta_0(1+\alpha x^2)$$

Вычислим теперь новую массу газа. Элемент об'ема имеет массу

$$dm=q\delta_0(1+\alpha x^2)dx.$$

Масса всего цилиндра

$$M=2\int_0^l q\delta_0(1+\alpha x^2)dx=2q\delta_0\left(l+\frac{\alpha l^3}{3}\right)=M_0+\frac{2}{3}\alpha M_0 l^2.$$

Прирост массы

$$\triangle M=M-M_0=\frac{2}{3}\alpha M_0 l^2=\frac{4}{3}\frac{\pi^2 k}{T^2}M_0 l^2.$$

Вводя сюда выражение средней квадратичной скорости и линейную скорость конца трубки, получим простое соотношение между этими скоростями и изменением массы газа.

С этой целью выразим постоянную k через среднюю квадратичную скорость $\bar{v}$ из основного соотношения кинетической теории газов

$$p=\frac{1}{3}\delta\bar{v}^2$$

и вышенаписанного выражения

$$\delta=kp.$$

Получаем

$$k=\frac{3}{\bar{v}^2}.$$

Обозначив, кроме того, линейную скорость конца цилиндра через v, имеем

$$v=\frac{2\pi}{T}l.$$

После подстановки последних выражений прирост массы выразится в виде

$$\triangle M=M_0\left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^2$$

или

$$\frac{\bar{v}}{v}=\sqrt{\frac{M_0}{\triangle M}}.$$

Формула показывает таким образом, во сколько раз молекулярная скорость больше скорости конца вращающейся трубки.

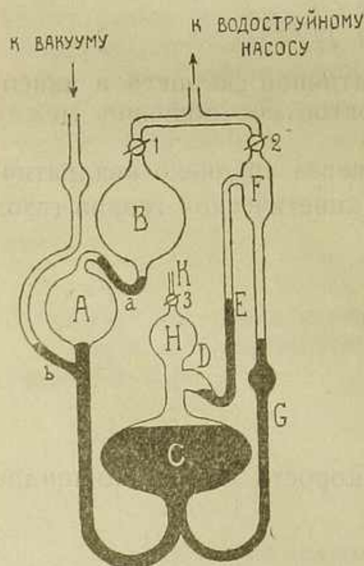
Определив $\bar{v}$, обычным образом находим наивероятнейшую и средне-арифметическую скорости.

Р. Х. Сталь и Е. Е. Сиротин

Простая модель автоматически-действующего ртутного насоса.

Описываемая ниже модель сконструирована нами для откачки рентгеновских трубок еще в 1917 году в одном из научно-технических учреждений Всероссийского Союза Городов, когда диффузионные насосы Гедэ и Лэнгмюра еще не были в большом ходу.

Модель сделана из стекла и состоит в существенном из двух частей: 1) из собственно ртутного насоса и 2) приспособления для автоматического под'ема и опускания уровня ртути в нем.



Собственно ртутный насос представляет собой насос Теплера с предварительным вакуумом. Главнейшие части его изображены на чертеже буквами *A*, *B* и *C*. Когда уровень ртути в *A* поднимается до предельно высокого положения, то воздух, выжимаемый ртутью через узкую трубку *A*, выходит в баллон *B*, являющийся предварительным вакуумом, присоединенным к водоструйному насосу, с которым он время от времени сообщается при помощи крана 1. При опускании ртути в *A*, между *B* и *A* в трубке *a* оказывается ртутная пробка, не позволяющая воздуху возвращаться из *B* в *A*. Дальнейшее опускание ниже трубки *b*, соединяющей *A* с откачиваемым пространством, заставляет воздух переходить из последнего в пустоту, образовавшуюся в *A*.

Остальные части *D*, *E*, *F*, *G* и *H* с кранами 2 и 3 (сюда надо включить также и непрерывно действующий водоструйный или масляный ротационный насос) представляют собой приспособление для изменения уровня ртути в сосуде *C*, а тем самым и в *A*. Действие его основано на периодическом повышении и понижении давления в пространстве *H*, *C* и *D* над уровнем ртути. Достигается оно соединением *H* с атмосферным воздухом капиллярной трубкой *K* через кран 3 и ртутной пробкой в *E*, которая. после натекания через *K* воздуха в достаточном количестве пробивается, вследствие чего уровень в *C* повышается до такой степени, что ртуть заливает ответвление *D*, и пробка в *E* опять восстанавливается. При непрерывном токе воздуха через *K* опускание и поднятие уровня в *C*, а след., и под'емы и опускания в насосе будут происходить периодически.

Действие прибора в целом представляется в следующем виде. Перед пуском в ход ртуть стоит в нижней части баллона H, заливая ответвленную и наклоненную вниз часть D. Открыв краны 1 и 2 и заперев кран 3, пускают в ход водоструйный насос. Когда достигнут максимальный вакуум, открывается кран 3 и пространство H соединяется с атмосферным воздухом через капилляр K. Струя входящего воздуха регулируется краном так, чтобы установилась желательная скорость работы прибора. Последняя под конец откачки, понятно, должна быть меньше, чем в начале, чтобы давление в вакууме и в баллоне A успевало выравниваться. Тогда уровень ртути из H опускается в C, а в E повышается. Соответственно повышается и ртуть в A. Как только произойдет переливание в B, должно произойти и пробивание пробки E: ртуть из нее переходит в F и через G возвращается в C. В H, D и C устанавливается давление, близкое к максимальному разрежению водоструйного насоса, если подводящие к нему трубки и пространство F имеют достаточно большой об'ем по сравнению с C, D и H. С поднятием ртути в C уровень в A опустится ниже b Ловушка D наполнится ртутью: пробка в E опять восстановится, и действие опять начнется в том же порядке.

Обращение с прибором очень не сложно. Только требуется регулировка кранов: в начале нужно 2-3 раза открывать кран 1, закрывая 2, чтобы удалить воздух, накапливающийся в предварительном вакууме, особенно если он недостаточно больших размеров, и, кроме того, регулировать кран 3, как уже сказано выше, уменьшая постепенно в течение всей откачки ток воздуха.

Если желательно не загрязнять ртути воздухом, когда она, выливаясь из трубки E, проходит затем через F в G, можно к капилляру K присоединить резервуар с любым другим газом, напр. водородом.

Скорость действия насоса сравнима с таковой для ртутного насоса Гедэ. Так 4-х литровая рентгеновская трубка, при размерах откачивающего баллона A около 8 см. в диаметре, откачивалась до предельно большой, необходимой в практике, жесткости примерно в 40-45 минут, если правильно регулировался период под'ема и опускания по мере разрежения в откачиваемом сосуде, как это указано выше, для чего нужно за все время 3-4 раза менять скорость втекания воздуха.

В заключение считаем своим приятным долгом выразить признательность бывшему в то время заведующим Под'отделом Спец. Методов Лечения Союза Городов, ныне преподавателю Высш. Учеб. Заведений в Москве, Дмитрию Дмитриевичу Галанину за любезное предоставление средств для выполнения описанной модели.

В. Н. Сирочинский

Из лабораторной практики по физике

Приготовление ареометров, удовлетворяющих заданным условиям в смысле размера и точности.

Когда один кожевенный завод обратился ко мне с просьбой указать ему книгу, в которой подробно разбирался бы вопрос об устройстве ареометра, отвечающего наперед заданным условиям, то, к сожалению, такой книги я указать не мог. Посвятивши некоторое внимание этому вопросу, я увидел, что рачеты ареометра, исследование его точности и чувствительности и, наконец, приготовление ареометра определенной чувствительности и определенных размеров является весьма ценной работой в методическом отношении для студентов педфака, приступающих к самостоятельным работам по физике.

Ценность этой работы заключается в том, что тема ее на вид очень проста, так что кажется ее можно решить одним махом, и учащиеся, втягиваясь в нее, приходят в некоторый азарт, кода она не совсем легко поддается решению.

Во-вторых, та же простота и ясность темы подсказывает самому учащемуся ряд вопросов, которые необходимо поставить для лабораторного исследования.

В-третьих, учащийся не встретит затруднения в изготовлении прибора и его видоизмений, необходимых для решения поставленной задачи: пробирки, стеклянные трубки, перегоревшие электрические лампочки, замазки имеются во всякой лаборатории. Техника изготовления самодельных простых и сложных ареометров не представит больших трудностей для среднего студента.

В четвертых, студент в этой работе втягивается практически в тот процесс, где исследование теснейшим образом связано с техникой усовершенствования приборов: студент не только исследует, но и строит новый прибор согласно выводам, полученным в результате исследования.

В заключение мы отметим, что ход рассуждений, порядок работы и некоторое, может быть, злоупотребление числовыми примерами в нашей статье продиктованы нашим небольшим лабораторным опытом решения поставленной выше задачи в методической лаборатории по физике Белорусского Государственного Университета.

Приготовление простого ареометра.

Как известно, одно и то же плавающее тело (назовем его поплавком) погружается на разную глубину в разных жидкостях.

Не трудно показать, что плотность жидкости (D), в которой плавает поплавок, равна весу (P) поплавка, деленному на об'ем v, погруженной части поплавка:

$$D=\frac{P}{v}$$

В самом деле, вес поплавка равняется весу вытесненной поплавком жидкости, а об‘ем погруженной части поплавка равняется об‘ему той же вытесненной жидкости. Следовательно, удельный вес данной жидкости равняется весу Р, деленному на об‘ем v. Плотность, конечно, будет выражаться тем же числом, но с другим наименованием.

Выведенное уравнение дает возможность путем простого расчета проградуировать поплавок, т. е. превратить его в ареометр.

Приготовим сначала простой ареометр из пробирки. Для этого насыпаем в пробирку столько дроби, чтобы пробирка в воде стояла вертикально и не тонула. Затем берем бумажную полоску, разделенную на миллиметры, и наклеиваем ее на внутреннюю поверхность поплавка. Прибавляя или убавляя количество дроби в нем, можно заставить его погрузиться на столько, чтобы ватерлиния поплавка совпала с желательной для нас чертой полоски, будущей шкалы нашего простого ареометра.

Посмотрим, как можно теперь проградуировать поплавок.

Возьмем пример из нашей лабораторной практики. Пробирка у нас имела длину 14 см. Дроби в ней находилось столько, что она погружалась в воде до 13 деления шкалы. Поплавок весил 22 грамма. Значит, об‘ем погруженной части поплавка равнялся 22 куб. см. и одному делению шкалы соответствовал об‘ем 22 см.: 13=1,7 куб. см.

Плотность жидкости, в которую погружен поплавок, равняется весу поплавка, деленному на об‘ем погруженной его части $D_1 = \frac{P}{v_1}$

Плотность другой жидкости $D_2 = \frac{P}{v_2}$

Разделив первое уравнение на второе, имеем $D_1 : D_2 = v_2 : v_1$, т. е., отношение плотностей равняется обратному отношению об‘емов погружения. Откуда $D_2 = \frac{D_1\ v_1}{v_2}$ . . . . . (2)

Так как отношение об‘емов не зависит от того, в каких единицах они выражены, то мы для удобства расчета об‘емы можем выражать в условных единицах, именно, принять об‘ем погруженной части нашего ареометра (в воде) за 13 условных единиц; тогда, приняв плотность воды за единицу, мы получим, что плотность жидкости, в которой ареометр погрузился до 12 деления,

будет равняться . . . 13 : 12=1,08 гр/см^3
до 11 . . . . . 13 : 11=1,18 —
10 . . . . . 13 : 10=1,3 —
15 . . . . . 13 : 15=0,86 —

и т. д. по формуле $D_2 = D_1 \frac{v_1}{v_2}$ (D_1—плотность воды)

Можно итти и другим путем в градуировке ареометра: можно отметить деления, соответствующие заданным плотностям, путем такого соображения и расчета:

плотности 1 гр/см соответствует деление 13 : 1 =13 деление
плотности 1,1 . . . . . 13 : 1,1 =11,8 —
1,2 . . . . . 13 : 1.2 =10,8 —
1,3 . . . . . 13 : 1,3 =10—
0,9 . . . . . 13 : 0,9 =14,4 —

И т. д. по формуле $v_2 = v_1 \frac{D_1}{D_2}$ (v_1—об‘ем погруженной части поплавка в воде).

Прежде чем определить, насколько такой простой ареометр точен и чувствителен и заняться его усовершенствованием, заметим, что поплавок-ареометр является очень удобным прибором для быстрой проверки мензурки и для приготовления мерных сосудов вообще. Если поплавок-ареометр весит, скажем, 22 грамма, то ясно, что воды он вытесняет 22 куб. сантиметра. Погрузивши его в мензурку с водой, можно сразу определить, правильно ли нанесено некоторое деление на мензурке. Правда, точность такой проверки небольшая, но для многих практических задач вполне достаточная и, как первое приближение к более точным и серьезным проверкам, имеет смысл и значение. Чтобы наскоро приготовить мензурку (не очень точную), достаточно приготовить поплавок весом, скажем, в 10 гр.; при помощи такого поплавка легко откладывать по 10 куб. см. на каком-нибудь цилиндрическом сосуде. Прибавивши в поплавок дроби один грамм, проверяем деление в один куб. см.

Определение точности и чувствительности ареометра.

Условимся под точностью ареометра разуметь то приращение плотности, которое соответствует одному наименьшему, но легко различимому делению шкалы ареометра, скажем, одному полсантиметру.

Нетрудно сообразить, что точность показаний ареометра зависит от величины диаметра поплавка: чем уже поплавок, тем большее перемещение его будет соответствовать одному и тому же приращению плотности. Разные поплавки, *но равного веса*, в одной и той же жидкости погрузятся на разную глубину, хотя об'емы, вытесняемые ими, будут одинаковы и равны $v = \frac{P}{D}$

Это происходит оттого, что глубина погружения ареометра h прямо пропорциональна об'ему вытесненной жидкости v и обратна пропорциональна поперечному сечению поплавка s, что запишется таким уравнением

$$h = \frac{v}{s} \text{ и, след., } \Delta h = \frac{\Delta v}{s}$$

где h глубина погружения, v—об'ем вытесненной жидкости, s— поперечное сечение поплавка.

$$\text{Так как } v = \frac{P}{D};\ v = hs,$$

$$\text{то } h = \frac{P}{Ds}$$

Изобразим графически соотношение между глубиной погружения ареометра h и плотностью D, считая P и S постоянными (см. график стр. 00).

Рассматривая эту кривую (равнобокую гиперболу), мы замечаем, что одним и тем же приращениям плотности ΔD соответствует не одно и то же приращение Δh глубины погружения ареометра. Другими словами, чувствительность ареометра зависит от плотности жидкости: для менее плотных жидкостей он более чувствителен. При увеличении плотностей чувствительность ареометра падает. На графике мы видим, что одинаковому приращению плотности ав и сд соответствует в первом случае увеличение глубины погружения ареометра кв₁, а во втором значительно бо̀льшее—кд. Таким образом, исследование чувствительности ареометра приводит нас к заключению, что величина этой чувствительности зависит от двух причин: от величины поперечного сечения ареометра и от величины плотности измеряемой жидкости. Как мы

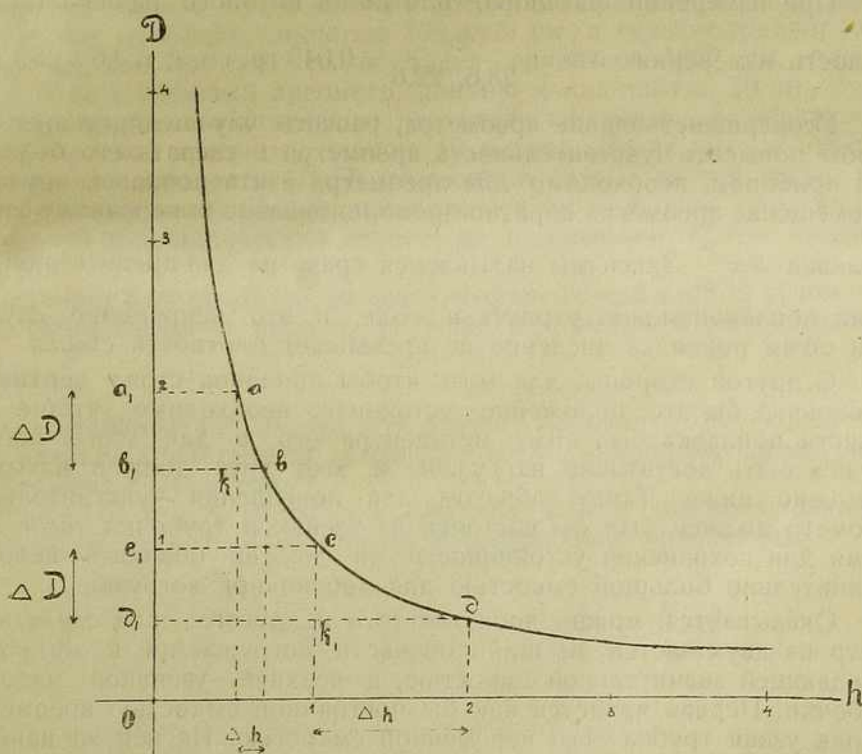
уже видели, чувствительность ареометра обратно пропорциональна поперечному сечению ареометра или обратно пропорционально квадрату диаметра этого сечения.

Что касается второго обстоятельства (плотности жидкости), то, обозначив приращение плотности через ΔD, приращение об'ема через Δv_1 вес ареометра попрежнему через P, найдем, что так как

$$D_1=\frac{P}{v_1};\quad D_2=\frac{P}{v_2};\quad \text{то}\quad D_1-D_2=\frac{P}{v_1}-\frac{P}{v_2};\quad \text{и}\quad \Delta D=\frac{P\Delta v}{v_1\ v_2}$$

Значит, приращение плотности $\Delta D=\dfrac{P\Delta v}{v_1\ v_2}$

т. е. приращение плотности пропорционально приращению об'ема и обратно пропорционально произведению об'емов измеряемых жидкостей, различающихся друг от друга на плотность ΔD.



Из этого уравнения видно, что с увеличением плотности жидкости довольно быстро падает чувствительность, а стало быть и точность ареометра: по мере увеличения плотности об'емы жидкостей, вытесняемых ареометром, уменьшаются (знаменатель уменьшается), значит ΔD будет все увеличиваться при одинаковом изменении глубины погружения ареометра.

Учитывая оба обстоятельства, влияющие на чувствительность ареометра, мы получим такое окончательное уравнение для чувствительности и точности ареометра:

$$\Delta D=\frac{P\Delta v}{v_1\ v_2};\quad v=hs;\qquad \Delta D=\frac{P\Delta sh}{h_1 h_2 S^2}=\frac{P\Delta h}{h_1\ h_2\ s}$$

Воспользуемся этим уравнением, чтобы подсчитать, какова точность измерения плотностей жидкостей нашим простым ареометром, состоящим из пробирки с дробью. Вес его 22 грамма. Хотя шкала его разделена на миллиметры, но достаточно ясными делениями мы будем считать полсантиметры; таких делений на шкале 28 всего; до ватер-линии 26.

Пусть измеряется плотность серной кислоты (1,85 гр./см. ^{3}).

Плотность серной кислоты 1,85 гр./см. ^{3}, следов., ареометр наш в ней погрузится до 26 : 1,85=14,05 деления. Если точность отсчета —1, то $\Delta D = \frac{22}{14{,}05,\ 13{,}05\ 1{,}76} = 0{,}14$ гр./см.^{3}; или при +1 $\Delta D = \frac{22}{14{,}05.\ 15{,}05.\ 1{,}76} = 0{,}13$ гр./см. ^{3}; (1,76 см^2—поперечное сечение ареометра).

При измерении раствора, плотность которого равна 1,1 гр/см ^{3}, точность измерения $\Delta D = \frac{26}{23{,}6.\ 22{,}6} = 0{,}049$ гр./см. ^{3}; (23,6=26 : 1.1).

Усовершенствование ареометра, расчеты улучшенного ареометра. Чтобы повысить чувствительность ареометра и сделать его более точным прибором, необходимо для ареометра взять поплавок поуже, ибо перемещение ареометра обратно пропорционально поперечному сечению поплавка $h = \frac{v}{s}$. Здесь мы натыкаемся сразу на два препятствия: очень узкий поплавок может утонуть в воде, и это непременно случится, если об'ем поплавка численно не превышает плотности стекла.

С другой стороны, для того, чтобы поплавок стоял вертикально и сохранял бы это положение устойчиво, необходимо, чтобы центр тяжести поплавка был ниже метацентра его, а для этого поплавок должен быть достаточно нагружен, и этот груз должен находиться возможно ниже. Таким образом, для повышения чувствительности, ареометр должен был бы состоять из узенькой трубочки, но в то же время для сохранения устойчивости он должен обладать некоторой сравнительно большой емкостью для добавочной нагрузки.

Оказывается, можно добиться того и другого, если сделать ареометр из двух частей: из широкой части, погружаемой в жидкость и обладающей значительной емкостью, и верхней—узенькой малоемкой трубочки. Первая является как бы постоянной емкостью ареометра, а вторая узкая трубка—его переменной емкостью. На ней же наносятся деления, потому что собственно ее перемещениями и измеряется плотность жидкостей

При расчетах сложного ареометра необходимо еще раз обратить внимание на

1) ватер-линию. Так называется черта, до которой погружается ареометр в воде при определенной температуре. Расчет ареометра почти всегда приходится начинать с определения положения ватер-линии.

От ватер-линии ведется счет делений и определяется их положение.

2) на величину h. Если бы ареометр представлял строго цилиндрическую трубку, то величина h, находимая посредством деления v на s, представляла бы собою действительную глубину погружения ареометра. Но каково значение величины h, если поперечное сечение

ареометра не одинаково, если, например, ареометр состоит из двух или даже трех частей разной толщины?

Оказывается, что в расчетах ареометра имеет значение не действительная глубина погружения ареометра, а теоретически находимая величина h, равная частному от деления погруженного об'ема ареометра на поперечное сечение той части его, которая находится на уровне измеряемой жидкости, т. е. на сечение узенькой градуированной цилиндрической трубки. Можно высказать такую теорему: показание ареометров, имеющих одинаковый вес и одинакового поперечного сечения градуированные трубки,—будут одинаковы, независимо от формы остальной части ареометров. Или иначе: показание [1]) ареометра не зависит от его формы, а зависит исключительно от отношения погруженного об'ема его к поперечному сечению трубки на уровне погруженной жидкости. При расчетах мы как бы заменяем данный сложный ареометр эквивалентным ему простым ареометром, имеющим строго цилиндрическую форму с поперечным сечением, равным сечению градуированной части данного ареометра. Например, если ареометр состоит из колбы, емкостью 100 куб. см., а сечение градуированной трубки 0,1 кв. см. то h будет равняться 1000 см. или 10 метрам, и наш сложный ареометр, длиною каких-нибудь 20 см., будет также чувствителен к изменению плотности жидкости, как эквивалентный ему простой ареометр, длиною 10 метров. Доказывается это тем, что изменение плотности ($\triangle D$) отражается только на той части ареометра, которая передвигаясь выставляется из жидкости, т. е., на градуированной цилиндрической трубке, на переменном об'еме ареометра ($\triangle v$).

Величину h можно было бы назвать приведенной длиной ареометра.

3. Немаловажную роль в расчетах ареометра играет величина К, равная $\frac{P}{S}$.

Это величина постоянная для данного ареометра. Ее можно было бы назвать приведенным весом ареометра. Она значительно упрощает расчеты ареометров.

Для воды h и K равны, ибо численно P и V для воды равны.

Расчеты ареометра построены на следующих уравнениях:

$$D_1 = \frac{P}{h_1 s}, \quad D_2 = \frac{P}{h_2 s} \quad \Bigg| \quad \triangle D = \frac{P \triangle h s}{h_1 h_2 s^2} = \frac{P \triangle h}{h_1 h_2 s} = \frac{K \triangle h}{h_1 h_2}$$

$$h_1 = \frac{P}{D_1 s}, \quad h_2 = \frac{P}{D_2 s} \quad \Bigg| \quad \triangle h = \frac{P \triangle D s}{D_1 D_2 s^2} = \frac{P \triangle D}{D_1 D_2 s} = \frac{K \triangle K}{D_1 D_2}$$

$$\triangle D = \frac{D_1 D_2 \triangle h}{K}$$

$$\triangle h = \frac{h_1 h_2 \triangle D}{K}$$

Из уравнения $\triangle D = \frac{K \triangle h}{h_1 h_2}$ видно, что чем больше h, тем чув-

[1]) в смысле величины делений шкалы ареометра.

ствительнее ареометр, т. е. тем меньшее ΔD соответствует одному и тому же приращению Δh.

Мы знаем уже, что приведенная глубина погружения ареометра равняется об'ему погруженной части его, деленной на поперечное сечение трубки $h = \frac{v}{s}$.

В числитель этой формулы *входит почти весь об'ем ареометра* (его широкая часть), в знаменатель поперечное сечение очень узенькой трубочки.

Отсюда становится ясно, что чем больше об'ем нижней широкой чести ареометра сравнительно с поперечным сечением верхней узкой трубки, тем значительнее будет его перемещение при изменении плотности, тем, стало быть, он будет чувствительнее и точнее.

Приготовим чувствительный ареометр из пробирки и узкой стеклянной трубочки. Насыпаем столько дроби в пробирку, чтобы она погрузилась почти до конца. Дробь закрепляется в пробирке ватой или заливается парафином. Пробирка закрывается пробкой и заливается менделеевской замазкой (или сургучем). В пробку вставляется узенькая стеклянная трубка. Опускаем ареометр в воду. Если окажется, что ареометр не достаточно погружается в воде, то опускаем несколько дробинок внутрь ареометра, пока он не погрузится на желательную для нас глубину. Теперь проградуируем ареометр, исходя например из следующих данных: вес ареометра 30 грамм; длина узкой трубки 13 см.; поперечное сечение 0,12 кв. см.

Всовываем в узкую трубку ареометра свернутую трубочкой миллиметровую бумагу и отмечаем ватер-линию ареометра, погрузив его в чистую воду.

Если бы миллиметровую бумагу оказалось трудно всунуть в узенькую трубочку ареометра, то для нанесения делений на узкой трубке можно поступить так: наждаком или напильником (с скипидаром) нанести матовую поверхность на трубочке и затем писать или карандашом или нигрозином, разведенным в палитуре.

Пусть ватер-линия проходит на расстоянии 2 см. от верхнего конца узкой трубки. Посмотрим, на каком делении от ватер-линии должна находиться черта, соответствующая плотности в 1,1 гр/см^3.

Так как вес ареометра 30 гр, то об'ем его до ватер-линии 30 куб. см., и в жидкости, плотность которой 1,1 гр см^3, он должен погрузиться на 30: 1,1=27,3 куб. см.; ниже ватер-линии на 2,7 куб. см.

Перемещение ареометра, соответствующее 2,7 куб см., будет равняться $\frac{2,7}{0,12}$=около 23 см. ниже ватер-линии. Ясно, что на нашем ареометре такой черты нанести негде: она выходит далеко за пределы его шкалы. Нетрудно высчитать, что предельной чертой на ареометре будет черта, соответствующая 1,06 $\frac{\text{гр}}{\text{см}^3}$ плотности. Об'ем узкой трубки $0,12 \times 13 = 1,56$ куб. см.

Следовательно, при поднятии ареометра на высоту всей узкой трубки, длиною 13 см., изменится об'ем погружения на 1,56 куб. см., т. е. об'ем погруженной части ареометра будет равняться 30:1,56=28,44 куб. см. Этому об'ему соответствует плотность 30 : 28,44=1,06 гр/см^3.

Градуировка сложного ареометра, у которого P=30 гр. S=0,12 кв.см.

1-я градуировка (денсиметрическая).

Формулы:

$$h=\frac{K}{D};\triangle h_1=\frac{K\triangle D}{D_1 D_2};K=\frac{30}{0,12}=250;h \text{ для воды}=250$$

Плотности D — Деления h в см.

1 гр/см³ . . . . ватер-линия (определяется опыт путем).

1,01 . . . 2,5 см ниже ват.-лини $\left[\Delta h_1=\frac{250.0,01}{1.1,01}=2,5\right]$

1,02 . . . 4,49 . . . . $\left[\Delta h_2=\frac{250.0,02}{1.1,02}=4,49\right]$

1,03 . . . 7,28 . . . .

1,04 . . . 9,61 . . . .

и т. д.

2-я градуировка (волюметрическая)

Формулы:

$$D=\frac{K}{h};\ \Delta D_1=\frac{K\ \Delta h}{h_1 h_2};h \text{ для воды}=250.$$

Деления в см. — Плотности.

Ватер-линия ...1 гр/см³

На 1 см. ниже в.-л. 1,004 $\left[\triangle D_1=\frac{250}{250,249}=0,004;\text{ или } D_1=\frac{250}{249}=1.004\right]$

— 2 . . . 1,008 $\left[\triangle D_2=\frac{250}{250.248}=0,008;\text{ или } D_2=\frac{250}{248}=1,008\right]$

— 3 . . . 1,002

— 4 . . . 1,016

и т. д.

Приготовление ареометра для молока.

Посмотрим, не будет ли годиться наш ареометр для измерения плотности молока. Для этого высчитаем прежде всего, где поставить черты, соответствующие плотности молока 1,029-1,033 гр/см³.

Обозначив через h_1 глубину погружения ареометра в молоке, плотностью 1,029, и через h_2 глубину погружения в молоке плотностью 1,033 гр/см³, получим $h_1=\frac{250}{1,029}=243,5;h_2=\frac{250}{1,033}=242,1$ ниже ватер-линии в первом случае на 6,5 см., а во втором на 7,9 см.

Отсюда видно, что при изменении плотности в 4 тысячных доли наш ареометр перемещается на 1,4 см.,—расстояние вполне достаточное, чтобы его ясно различить и обозначить на шкале ареометра. Для увеличения чувствительности ареометра можно взять маленькую колбочку, емкостью в 50 куб. см. Нагревая дно ее на сильном пламени, можно сделать посредине дна углубление для дроби: так лучше будет

закрепить ее и обеспечить устойчивость ареометра. Если поперечное сечение трубки будет 0,1 кв. см., то чувствительность ареометра повысится и станет равной для молока $\triangle D=\frac{500}{485.486}=0,0021$ гр/см³ на один см. шкалы, и при изменении плотности молока на 0,004 гр/см. ареометр перместится на 2,8 см.

Пусть требуется приготовить укороченный ареометр для молока, так чтобы им можно было измерять плотность молока в чайном стакане, т. е., общая длина его не превышала 9 см.

Берем маленькую пробирку (или запаянную с одного конца стеклянную трубку) и, оставивши 4 см. на широкую часть, остальную часть отгягиваем в узкую трубку, нагревая на достаточно сильном пламени. 5 см. узкой трубки оставляем, а остальную часть отрезываем. При отсутствии пламени с более или менее высокой температурой можно приготовить ареометр составной, взявши для этого запаянную с одного конца трубку, диаметром в сантиметр (или более) и длиною 4 см. и вставивши в нее при помощи пробки узенькую стеклянную трубку, диаметром 4 мм (или менее) и длиною 5 см. Пробка аккуратно заливается менделеевской замазкой или сургучем. Опускаем наш поплавок в воду и нагружаем его дробью мелкого калибра до тех пор, пока он не погрузится в воде до желательной нам черты, например, до черты, находящейся на расстоянии 1 см. от верхней точки ареометра; при этом вес ареометра оказался равным 3 гр. Погружение в молоке плотностью 1,029 будет равно $h=\frac{3}{1,029.0,04}=41,8$ см.; ниже чем в воде на 43-41,8=1,2 см. Следующую черту наносим для плотности 1,033. Она будет ниже ватер-линии на 1,4 см. Промежуток на шкале для одной и другой плотности составит только 0,2 см. Чтобы увеличить этот промежуток по крайней мере до 2 см., нужно увеличить об‘ем ареометра в 10 раз, т. е., взять вместо пробирки колбочку, об‘емом в 30 куб. см.

Укороченный ареометр для серной кислоты.

Такие ареометры часто изготовляются для определения плотности кислоты в аккумуляторах при помощи большой пипетки. Их шкала ватер-линии не имеет. Если вес его попрежнему будет 3 грамма, а шкалу необходимо проградуировать от 1,150 до 1,250, то мы поступаем так: погружаем ареометр в чистую воду и отмечаем, до какой черты он погружается в воде. Теперь соображаем, какова должна быть нагрузка ареометра, чтобы он до *этой же черты* погрузился в серной кислоте, плотность которой 1,250. Расчет ясен: эта нагрузка должна равняться 1.250.3= =3,75 грамма. Заделавши эту нагрузку и уже больше ее не меняя, мы наносим остальные деления простым расчетом.

Приготовление ареометра для бензина.

Иной раз изготовляются десятки очень точных ареометров, из которых каждый расчитан только на небольшой промежуток плотностей. Изготовление таких ареометров после всего сказанного вполне ясно. Составим проект ареометра, определяющего плотность от 0,670 до 0710 (для бензина), при чем требуется, чтобы промежуток между самой большой плотностью 0,710 и самой меньшей плотностью 0,670 равнялся 10 см. на шкале ареометра.

Общая формула для этого случая

$$\triangle h=\frac{P\triangle D}{D_1 D_2 S}=\frac{K\triangle D}{D_1 D_2}$$

Подставляя данные проекта, получаем $10 = \frac{K.0,04}{0,67.0,71}$, откуда $K = 120$. Если поперечное сечение узкой трубки выберем в 0,5 кв. см., то вес ареометра должен быть 60 гр., ибо $P = KS = 120.0,5 = 60$ гр.

Об'ем ареометра $60:0,71 = 84,5$ куб. см. Если-бы такой об'ем оказалось трудно подобрать из имеющейся налицо посуды обычной лаборатории, то можно взять большую пробирку, емкостью приблизительно 40 куб. см., и к ней подобрать узкую трубку, исходя из таких расчетов: нагрузка этой пробирки для погружения ее в бензине, плотностью 0,71, должна быть $0,71.40 = 28$ грамм.

Основное уравнение для ареометра, работающего в пределах плотностей 0,67-0,71, показывает, что его приведенный вес $\frac{P}{S} = 120$; значит, вес 28 грамм, деленный на поперечное сечение трубки, т. е. $K = 120$. Откуда S равняется 0,23 кв. см.

Является вопрос, где же на ареометре нанести черту, скажем, для плотности $0,67 \frac{\text{гр.}}{\text{см}^3}$ Приготовленный нами ареометр мы тщательно взвешиваем. Пусть вес его оказался равным 30 граммам. Берем чистую воду и погружаем в нее наш ареометр. Затем, делаем проволочные грузики ввиде малого кольца с отростками для насадки на шейку ареометра (шейкой мы назовем то место ареометра, где узкая часть переходит в широкую). Эти дополнительные проволочные грузики, которые нам весьма пригодятся для дальнейших работ, должны быть определенного веса и подобраны по системе обыкновенных разновесок (например 1:2:2:5).

Их лучше всего готовить из медной или алюминевой проволоки.

Насаживая на ареометр дополнительные грузики, мы можем заставить его погрузиться до желательной нам черты. Пусть эта черта находится на расстоянии 2 см. от верхнего конца ареометра, а дополнительный груз равняется 10 гр.

Тогда ясно, что до этой черты об'ем ареометра равняется $30 + 10 = 40$ куб. см.

Вес ареометра теперь должен равняться точно $0,67.40 = 26,8$ грамма, чтобы он в бензине, плотностью 0,67, погрузился до бывшей ватерлинии при нагрузке в 40 гр. Если бы заделанный ареометр весил только 25 грамм и нам неудобно было бы досыпать дроби внутрь ареометра, то весьма удобно использовать наружные дополнительные нагрузки, особенно при проверке составленного проекта. Величина поперечного сечения трубки найдется из уравнения $120. S = 26,8$. Откуда $S = 0,22$ кв. см.

Посмотрим, где придется нанести второе деление для плотности 0,71 и, таким образом, проверим наши все предварительные расчеты. $h_1 = \frac{26,8}{0,67.0,22} = 181,8$; $h_2 = \frac{26,8}{0,71.0,22} = 191,6$; расстояние между чертами 10 см.

После этой предварительной исследовательской работы можно установить определенный исполнительный план приготовления ареометра для бензина.

Ареометр для спирта.

Расчет ареометра для спирта.

Условия задания: приготовить ареометр для измерения плотности спирта с точностью до 0,001 плотности на сантиметр шкалы первого деления. Составим предварительное уравнение, устанавливающее связь между точностью измерения, разностью измеряемых плотностей, приведенным весом ареометра $\left(\frac{P}{S}=K\right)$ и перемещением шкалы ареометра.

$$\triangle D=\frac{D_1 D_2 \triangle h}{K}$$

Подставивши в это уравнение заданные величины, мы получим первые ориентировочные размеры ареометра, которые мы можем положить в основу нашего проекта построения ареометра, отвечающего определенным требованиям; затем, исследовать проект и выработать окончательный план приготовления ареометра для измерения плотности спирта.

$$0{,}001=\frac{0{,}792.0{,}791}{K}; \text{ откуда } K=\frac{0{,}792.0{,}791}{0{,}001}=626{,}5.$$

Величина K получилась равной 626,5. Значит, отношение веса ареометра к поперечному сечению трубки должно равняться 626,5. Если общий вес ареометра мы можем взять в 100 гр., то поперечное сечение должно быть 0,16 кв. см. Остается вычислить, какова должна быть длина узкой трубки, чтобы на ней уместились деления от 1 до 0,79.

$$\triangle h=\frac{626{,}5.0{,}21}{0{,}79}=166 \text{ см.} \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Очевидно, что построить ареометр, отвечающий условиям задачи, нельзя: больше 15-20 см. вряд ли удобно делать узкую трубку ареометра. Если в уравнении (4) взять K в десять раз меньшее, т. е. 63 (приблизительно), то h будет равняться 17 см. Остановимся в наших расчетах на том, что $K=63$. Подберем теперь вес ареометра и сечение трубки.

Если окажется, что $S=0{,}5$ кв. см., то P будет равно 32 гр.

Проверивши эти расчеты на временно построенном ареометре, можно приступить к окончательному сооружению ареометра, изменивши те или иные детали, сообразно с выводами исследования и имеющимся в лаборатории материалом[1]).

Между прочим, недурным резервуаром для ареометра может служить электрическая лампочка. Снявши цоколь лампочки посредством нагревания, осторожно делаем отверстие твердозакаленным напильником с треугольным острием.

Отверстие необходимо делать очень осторожно, пока не войдет воздух.

Быстро вошедший воздух разрушает лампочку. Когда же воздух войдет в лампочку, то отверстие можно смело просто пробить: лампочка останется целой. Поэтому в полуватных лампочках отверстие можно просто пробить напильником или подходящим гвоздем. Отверстие пробивается со стороны ножки лампочки, через углубление в цоколе. Отросток, через который выкачивается воздух из лампочки, остается целым. Баллоны от лампочек представляют собою очень хороший материал длл приготовления ареометров особенно, если принять во внимание, что электрические лампочки теперь делаются самых разнообразных фасонов и об'емов. Так, цилиндрической формы

---

[1]) Для перехода от плотности спирта к его крепости, выраженной в градусах, существуют специальные таблицы

лампочки точно специально приготовлены для ареометров разных типов и разной чувствительности.

Поправка на температуру.

Мы знаем, что глубина погружения ареометра h равняется об'ему погруженной части ареометра v, деленному на поперечное сечение s в том участке ареометра, где он выходит из воды, т. е. $h = \frac{v}{s}$

Если ареометр сложный, то под h мы разумеем приведенную глубину погружения ареометра.

Если об'ем ареометра изменится, например, он расширится от повышения температуры, а плотность измеряемой жидкости, предположим, останется без изменения, то как это должно отразиться на глубине погружения ареометра? Не забудем, что если плотность жидкости остается без перемены, то и об'ем погруженной части ареометра по величине тоже останется без перемены. Нетрудно сообразить, что в формуле $h = \frac{v}{s}$ при расширении ареометра изменится только s. Следовательно, поправка на температуру зависит только от расширения поперечного сечения s, и мы можем записать такое уравнение

$h_t = \frac{v}{s\,(1+2at)}$; но $\frac{v}{s} = h_0$; то $h_t = \frac{h_0}{1+2at}$; откуда $h_0 = h_t + 2h_tat; \triangle h = 2hat$

$2h_tat$ и есть искомая поправка на температуру. Ее при повышении температуры придется брать со знаком минус, ибо меньшей глубине погружения соответствуют большие плотности.

Теперь предположим, что и плотность жидкости, в которую погружен ареометр, также именилась от нагревания, как это и бывает в действительности. Как последнее обстоятельство отразится на показаниях ареометра? Что изменится в формуле $h = \frac{v}{s}$? Об'ем погруженной части v соответственно новой плотности. Следовательно, если мы произведем вычисленную выше поправку на температуру, то получим плотность жидкости при данной температуре. Если вес ареометра 30 гр., $s = 0{,}12$ см^2, то поправка на один градус для ватер линии будет равняться $\triangle h = 250.2.0{,}000008 = 0{,}004$ см. Для жидкости, в которой ареометр погружается до 240 деления, т. е. на 10 сан. ниже ват.-линии будет равняться $\triangle h. = 240.2.0{,}000008 = 0{,}0038$ см. (0,000008 коэф. расширения стекла).

Из этих расчетов мы видим, что на шкале ареометра полезно было бы ставить на ряду с плотностями еще приведенные длины ареометра.

Уравнения, которые мы вывели для расчета ареометров, для определения их чувствительности, дают возможность составить проект построения ареометра любой чувствительности для любого промежутка плотностей. Осуществление проекта зависит, конечно, от технических возможностей данной лаборатории или мастерской. Положим нам желательно приготовить ареометр, работающий с точностью до 0,0001 гр./см^3 в промежутке от ватер-линии до +1 см. шкалы. Воспользовавшись уравнением $\triangle Д = \frac{Д_1 Д_2 \triangle h}{K}$, мы получим, что K для такого ареометра должно равняться 10001, т. е. $P/s = 10001$ $\left\{ Д_1 = 1\frac{гр}{см^3}; Д_2 = 1{,}0001\frac{гр}{см^3};\right.$ $\left.\triangle h = 1 \text{ см.}; K = \frac{P}{S}\right\}$

Каковы будут абсолютные величины P/S, зависит от технических возможностей данной мастерской, но для достижения указанной чувствительности отношение между весом и поперечным сечением на данном участке ареометра должно равняться 10001.

Уравнение $\Delta D = \frac{D_1 D_1 \triangle h}{K} = \frac{D_1 D_2 s \triangle h}{P}$ показывает, как можно было бы устранить весьма существенный недостаток обыкновенных ареометров, состоящий в том, что точность их уменьшается вместе с увеличением плотностей, ибо деления, соответствующие одинаковым приращениям плотностей, становятся все мельче и мельче. Чтобы устранить этот недостаток и сделать чувствительность ареометра постоянной величиной для всяких плотностей, необходимо, чтобы в предыдущем уравнении $D_2 S = Const$ (D_1 = плотность воды, D_2 = плотность измеряемой жидкости) чтобы $Д_2 S$ была постоянной величиной, необходимо, чтобы градуированная часть ареометра имела не цилиндрическую форму, *а коническую* с таким расчетом, чтобы по мере удаления от ватер-линии (в сторону увеличения плотностей) трубка становилась уже, поперечное ее сечение уменьшалось во столько раз, во сколько увеличивается плотность измеряемой жидкости: там, где обозначена плотность 2, сечение должно быть в 2 раза меньше сечения на уровне ватер-линии. При такой форме трубки градуировка ареометра становится гораздо проще, легче и точнее, не говоря уже о том, что точность измерения для всех промежутков плотностей становится одинаковой.

О деятельности физико-математической секции научного общества при Белорусском Государственном Университете

(за 5-летний период: с февраля 1923 г. по февраль 1928 г.)

Физико-математическая Секция Научного О-ва при Б. Г. У. была основана в начале 1923 года по инициативе преподавательского состава Физ.-Мат. Отделения Педаг. Фак-та Б. Г. У.

Своею задачею Секция поставила разработку научных и научно-методических вопросов по всем отделам физики и математики.

На организационном собрании, состоявшемся в феврале 1923 г., была намечена программа деятельности и избран президиум в составе: председателя-проф. *Е. Е. Сиротина* и секретаря—*А. П. Круталевича.*

За истекшие 5 лет Секция имела 45 заседаний, на которых было сделано 74 доклада и сообщения. Доклады были, главным образом, научного характера и только отчасти по вопросам преподавания физики и математики.

Научные доклады были двоякого типа: исследовательские, представлявшие самостоятельные работы отдельных членов Секции (*Е. Е. Сиротина, В. Н. Ивановского, В. К. Дыдырко, А. П. Круталевича, Ч. Ч. Домбровского)*, и информационные, вводившие членов Секции в круг новейших идей и исследований в области физики и математики, а также знакомившие с работами Всесоюзных С'ездов физиков и математиков.

Методические доклады, посвященные вопросам преподавания физики и математики, были сосредоточены главным образом, на 1-ой Всебелорусской Физ.-Матем. Конференции при Пед. Фак-те Б. Г. У., организованной по инициативе Секции в феврале 1926 г. На этой Конференции преимущественно Членами Секции были прочтены 13 методических и 4 научно-обзорных доклада.

К деятельности Физ.-Матем. Секции надо отнести и устройство юбилейных заседаний, посвященных:

1) 450-летию со дня рождения *Н. Коперника*, в 1923 г.
2) 50-летию доктората *Г. А. Лоренца*, в 1926 г.
3) памяти *Ф. Клейна*, в 1926 г.
4) 100-летию со дня рождения *Н. Лобачевского,* в 1926 году
и 5) 200-летию со дня смерти *И. Ньютона*, в 1927 г.

Кроме того следует отметить участие большинства членов Секции в работах Терминологической Комиссии Инстит. Белор. Культуры, в работах Методич. Кабинета при Доме Раб. Просв. и др. общественных организаций.

В настоящее время Физ.-Матем. Секция насчитывает 18 действительных членов. Ежегодно бывает около 8—10 заседаний. Численность гостей на секционных заседаниях достигает в среднем 30—40 человек, поднимаясь иногда до 80—100.

Президиум Секции состоит из: председателя—проф. *Е. Е. Сиротина*, зам. председ.—проф *А. А. Михайловского* и секретаря—доцента *А. П. Круталевича.*

Перечень докладов, рефератов и сообщений, сделанных в Физ.-Матем. Секции Научного О-ва при Б. Г. У. за 1923-1928 ак. г. г. (по февраль мес.)

18/II-1923. *Общее заседание секций научного о-ва.*
проф. *Е. Е. Сиротин*—„Электрические основания процессов возбуждения в живом организме".

25/II-1923 проф. *Е. Е. Сиротин*—„Основания теории периферического зрения".

2/III-1923. доц. *В. К. Дыдырко*—„Теория определителей проф. Кагана".
проф. *Е. Е. Сиротин*—„О собственной модели автоматического ртутного насоса".

18/III-1923. *А. П. Круталевич*—„О мнимостях в геометрии".

25/III-1923. *К. М. Годыцкий-Цвирко*"—О состоянии немецкой физ.-матем. литературы за последние годы".

22/IV-1923. асс. *Ч. Ч. Домбровский*—„Основания геометрии Гильберта".
проф. *В. Н. Ивановский*—„О методологии математики".

29/IV-1923. *Торжественное заседание, посвященное памяти Н. Коперника.*
проф. *В. И. Пичета*—„Историческое значение Н. Коперника".
доц. *И. С. Пятосин*—„Биография Н. Коперника и его теория".
проф. *В. Н. Ивановский*—„Космолого-филисофское мировоззрение Н. Коперника"

10/II-1924. проф. *Е. Е. Сиротин* –„Пространственно-временной континуум в современной механике".

17/II-1924. проф. *Е. Е. Сиротин*—„Последние данные о строении верхних слоев атмосферы по Вегарду".

2/III-1924. доц. *В. К. Дыдырко*—„Геометрический смысл преобразований в теории относительности".

10/IV-1924. асс. *Ч. Ч. Домбровский*—„Кривизна пространства в теории относительности".

22/IV-1924. проф. *Е. Е. Сиротин*—„Об открытии нового химического элемента гафния".

19/X-1924. проф. *Е. Е. Сиротин*—„О IV С'езде русских физиков в Ленинграде 1924 г."

30/XI-1924. асс. *Е. В. Снятков*—„Опытные основания теории относительности".

8/II-1925. проф. *Е. Е. Сиротин*—„Основные векторы и тензоры теории относительности".

22/III-1925. доц. *В. К. Дыдырко*—„Некоторые свойства кривых III-го порядка".

5/IV-1925. проф. *Е. Е. Сиротин*—„К вопросу о высоте атмосферы".
Е. А. Ивановская—„Об одном способе механического черчения циссоиды".

15/XII-1925. проф. *Е. Е. Сиротин*—„О постановке физических исследований в Англии (личные впечатления)".

9/II-1926.—*Торжественное заседание, посвященное юбилею Г. А. Лоренца.*
проф. *Е. Е. Сиротин*—„Значение Г. Лоренца в современной физике".

асс. *Е. К. Успенский*—„Г. Лоренц, как основоположник электронной теории“.

асс. *Е. В. Снятков*—„Роль Г. Лоренца в создании теории относительности“.

9-13/II-1926.—*Заседания 1-ой Всебелор. Конференции преподавателей физики и математики при Пед. Фак-те Б. Г. У.*

проф. *Е. Е. Сиротин*—„Основные черты в развитии физики за последнее время“

асс. *Е. К. Успенский*—„Строение атома“.

доц. *Н. В. Шалауров*—„Физика в 7-летней школе“.

И. Май—„Физика в техникумах“.

доц. *И. С. Пятосин*—„К вопросу о постановке преподавания математики в школе“.

асс. *В. Н. Сирочинский*—„Самодельные приборы по физике в школьной практике“.

асс. *Н. И. Макаревский*—„К вопросу о постановке преподавания метеорологии в современной школе“.

асс. *Г. Н. Сагалович*—„Математика в комплексе“.

асс. *А. П. Круталевич*—„Математические экскурсии“.

доц. *Н. В. Шалауров*—„Практика Дальтон-плана в применении к физике в Комвузе“

М. Я. Пелеп—„Практика Дальтон-плана в применении к физике на Рабфаке и в Минск. Евр. Педтехникуме“.

В. Рутковский—„Физика по Дальтон-плану в 7-летке“.

А. Ю. Мицкевич—„Дальтон-план в применении к математике в Комвузе“.

асс. *А. П. Круталевич* „Обзор новой методической литературы по математике“.

В. Рутковский—„Иллюстрация относительных чисел“.

проф. *А. А. Михайловский*—„Успехи звездной астрономии“

асс. *Е. В. Снятков*—„Успехи радиотехники“.

13/II-1926.—*Торжественное заседание, посвященное памяти Ф. Клейна*

доц. *В. К. Дыдырко*—„Жизнь и деятельность Ф. Клейна“.

доц. *И. С. Пятосин*—„Роль и значение Ф. Клейна в методике математики“.

асс. *В. Л. Левкович*—„Роль Ф. Клейна в неевклидовой геометрии“.

30/III-1926. доц. *В. К. Дыдырко*—„О построении некоторых циркулярных кривых“.

18/IV-1926.—*Торжественное заседание, посвященное памяти Л. Лобачевского.*

доц. *И. С. Пятосин*—„Биография и очерк трудов Н. Лобачевского“.

асс. *В. Л. Левкович*—„О труде Н. Лобачевского „Новые начала геометрии“.

доц. *В. К. Дыдырко*—„Роль проективной геометрии в обосновании неевклидовых“.

30/V-1926. проф. *Е. Е. Сиротин*—„О новых успехах в изучении строения положительного ядра атома“.

28/XI-1926 доц. *В. К. Дыдырко*—„Символические формулы кривых 3-го порядка".

доц. *Е. К. Успенский*—„Электромагнитные излучения человеческого тела".

26/XII-1926. доц. *Е. К. Успенский*—„О работе Секции общей физики на V-ом Всесоюзном С'езде физиков".

доц. *Е. В. Снятков*—„Обзор работ электромагнитной Секции".

9/I-1927. асс. *А. П. Круталевич*—„Решение числовых уравнений методом дедуктивной итерации".

24/II-1927. проф. *С. Усатый*—„О новейших течениях физической мысли".

10/IV-1927.—„*Торжественное заседание, посвященное 200-летию со дня смерти И. Ньютона.*

проф. *В. И. Пичета*—„Культурное состояние эпохи Ньютона".

проф. *Е. Е. Сиротин*—„И. Ньютон, как основоположник современного физического миропонимания".

доц. *И. С. Пятосин*—„Значение И. Ньютона в анализе бесконечно-малых".

доц. *В. К. Дыдырко*—„И. Ньютон, как геометр".

проф. *А. А. Михайловский*—„И. Ньютон, как астроном".

15/V-1927. доц. *И. С. Пятосин*—„О работах Секции анализа на 1-ом Всесоюзном С'езде математиков в мае 1927 г.

доц. *В. К. Дыдырко*—„О работах Секции геометрии".

26/V1927. асс. *Ч. Ч. Домбровский*—„О современном состоянии теории множеств и философских направлениях в ней".

2/VI-1927. асс. *В. Л. Левкович*—„О построении эллиптических функций"

13/XI-1927. проф. *Е. Е. Сиротин*—„О сверхкоротких акустических волнах".

доц. *А. П. Круталевич*—„Об одном способе определения делителей числа".

25/XII-1927. доц. *Е. К. Успенский*—„Об аксиоматике механики".

доц. *В. К. Дыдырко*—„О лакунарных областях парабол центров циркулярных кривых".

19/II-1928. доц. *Е. В. Снятков*—„О передаче изображений на расстояние и о радиовидении".

асс. *Ч. Ч. Домбровский*—„Некоторые упрощения в системе геометрических аксиом Веблена".

4/III-1928. доц. *Е. К. Успенский*—„Аналогия между оптикой и механикой".

асс. *В. Л. Левкович*—„О применении теории функций комплексного переменного к нахождению определенных интегралов".

ЦЕНА 2 руб.



жавы пасьля Люблінскай вуніі.—**Д. А. Жаринов**. Крестьянская дифференц[illegible] перед падением крепостного права.—**М. О. Грёдингер**. Проблема возложения обяз[illegible] загладить вред и отношение ее к обязательству возмещения причиненного вреда.—**И. Я. Герцык**. Теория ренты в связи с трудовой теорией стоимости.—**В. И. Пичета**. Состав на[illegible]ения в господарских дворах Зап. Белоруссии в пореформенную эпоху.—**М. Б. Вейнгер**. Исследуйте еврейские диалекты! (на евр. яз.).

№ 8—9—10.—От редакции.—**А. В. Федюшин**. 1. Материалы к изучению орнитофауны Мурмана. 2. К биологии Tadorna rutila Pall.—**Н. А. Збитковский**. Материалы к флоре Белоруссии.—**Е. М. Зубкович**. К планктону водоемов Минского округа.—**А. П. Розанов**. 1. О действии тиреоидина на функции коры головного мозга. 2. О влиянии тиреоидина, церебрина и кордина на анаэробное дыхание дрожжей. 3. Новые [illegible]ные по вопросу о влиянии тиреоидина на алкогольное брожение.—**А. П. Бестужев**. К вопросу о возбуждающем действии угольной кислоты.—**С. М. Рубашев**. Нервная система мочеполового аппарата у мужчин.—**М. П. Соколовский**. К вопросу об элиминации бактерий из брюшной полости.—**Е. А. [illegible]корова**. К вопросу о формах бешенства у человека.—**Е. И. Леонов**. Опыт образования [illegible] простого условного рефлекса у рахитика.—**А. Е. [illegible] и Б. Н. [illegible]**. Материалы к изучению хрящевой пластики.—**Н. А. Прилежаев**. Окисление [illegible] перекисью бензоила.—**В. Н. Ивановский**. Из лекций по методологии наук [illegible].—**Е. Е. Сядотин**. О температурном градиенте в атмосфере и барометрической формуле.—**Г. И. Лебедкин**. К технике графических реконструкций.—Хроника Бел. [illegible] Ун[illegible]

№ 11.—От редакции.—**С. З. Каценбоген**. Диалектический материализм [illegible]ское мировоззрение.—**И. Я. Герцык**. О некоторых проблемах теории полити[illegible]мии.—**В. Н. Ширяев**. Основные начала уголовного законодательства СССР.—[illegible]дингер. Брак и закон.—**М. Я. Грёдингер**. Думкі аб неабходнасьці выданьня грамадзянскага працэсуальнага кодэксу для Беларусі.—**И. Я. Герцык**. Аграрные реформы в Западной Европе в последнюю четверть XIX столетия и после войны.—**В. І. Пічэта**. Зямельнае права ў статутах 1529 і 1566 гадоў.—**В. И. Пичета**. Крестьянское и рабочее движение в Белоруссии в эпоху 1905 года.—**С. Я. Вольфсон**. Факультэт права і гаспадаркі Беларускага Дзяржаўнага Унівэрсытэту.

№ 12.—**В. Дружчыц**. Места Менск у канцы XV і пачатку XVI ст.—**М. Шчак[illegible]**. Ілюстрацыі Даніэля Х[illegible] да „Буры“ Шэкспіра.—**А. Н. [illegible]ский**. [illegible]ная опись Гродзшенского монастыря.—**Б. М. Никольский**. Следы магической литературы в книге Псалмов.—**И. Д. Сосис**. К истории анти-еврейского движения в царской России.—**В. И. Пичета**. Крестьянское движение в Белоруссии в 1905 г.

№ 13.—**Ю. М. Иргер**. Влияние перевязки семявыносящих протоков на простату и на яички.—**И. Т. Титов**. О разрывах селезенки при малярии.—**В. Ф. Червяков**. Pancreas accessorium.—**М. А. Дворжец**. Повреждения глаз, быт и профессия.—**Д. С. Волод[illegible]вич**. К вопросу о тромбопенической пурпуре и других формах геморрагического диатеза у детей.—**С. И. Гольберг**. О новых методах изготовления противоскарлатинозной сыворотки.—**Д. А. Марков**. Электронпотерапия как самостоятельный метод.—Хроніка унівэрсытэцкага жыцьця.

№ 14—15.—**С. Я. Вольфсон**. Этическое миросозерцание Спинозы.—**Б. Быховский**. Психофизическая проблема в учении Спинозы.—**Проф. М. Грёдингер**. Вокруг вопроса об общих началах землепользования и землеустройства.—**В. Н. Ширяев**. Охрана сельско-хозяйственных интересов в уголовном законодательстве.—**Проф. И. И. Крыльцов**. Государственное устройство СССР и сопредельных стран.—**Мікола Гутноўскі**. Беларуская праўная тэрміналёгія.—**И. В. Герчиков**. Проблема империализма в русской марксистской литературе.—**В. Пичета**. Современная литература по истории народного хозяйства.—**А. Бурдзейка**. Земляўласьнік і земляроб па Літоўскаму Статуту 1566 г.—**И. Я. Герцык**. Новейшие течения в Политической Экономии в связи с проблемой кризисов.—**В. Пичета**. Рабочее движение в Белоруссии в 1905 г. Справаздача аб дзейнасьці Навуковага Таварыства пры БДУ за 1925—26 акадэмічны год.

№ 16.—**Проф. М. М. Піотуховіч**. Ля вытокаў лірыкі Янкі Купалы.—**Проф. М. М. Піотуховіч**. Поэтычнае сьветаадчуваньне ў творчасьці Якуба Коласа.—**А. Н. Вознесенский**. Традиция „формальных“ (эстетических) изучений в науке о литературе.—**В. Тепин**. Постановка внеклассного чтения в современной школе.—**П. Бузук**. Некалькі слоў аб грамаце рыжан каля 1300 г.—**Осіп Воўк-Левановіч**. Форма „прошлага ў будучым“ (буду-лъ) у мове дакумэнтаў „Літоўскай Мэтрыкі“.—**Л. М. Цьвяткоў**. Увагі аб мове філёматаў.—**Л. М. Цьвяткоў**. Увагі аб мове філёматаў.—**Проф. И. И. Замотин**. На переломе.—**Б. Быховский**. Дидро о Спинозе.—**А. М. Вазьнясенскі**. Асноўныя прынцыпы пабудовы беларускае навукі аб літаратуры.—**Павел Панкевич**. Проблема политехнического воспитания.—**Доцэнт Зьм. Ів. Даўгяла**. З беларускага пісьменства XVII стал.